Пример решения

Задача. Механическая система состоит из грузов A, E, блоков B, C и однородного цилиндра D. Блок B вращается вокруг неподвижной оси, блок C и цилиндр катятся по поверхности. Груз A движется вертикально (рис. 95). Даны радиусы ободов и радиусы инерции блоков $R_B = 4$ см, $r_B = 2$ см, $i_B = 3$ см, $R_C = 3$ см, $r_C = 1$ см, $i_C = 2$ см. Массы тел $m_A = 5$ кг, $m_B = 4$ кг, $m_C = 9$ кг, $m_D = 8$ кг, $m_E = 18$ кг. Найти приведенную массу системы в формуле $T = \mu v_A^2/2$, где v_A — скорость груза.

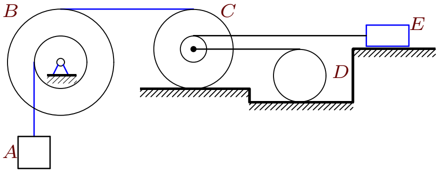

Рис. 95

Решение

Грузы A и E совершают поступательное движение, блок B — вращательное, блок C и цилиндр D — плоское. Выписываем выражения для соответствующих кинетических энергий

$$\begin{aligned} &T_A = m_A v_A^2/2, \quad T_B = J_B \omega_B^2/2, \\ &T_C = m_C v_C^2/2 + J_C \omega_C^2/2, \\ &T_D = (3/4) m_D v_D^2, \quad T_E = m_E v_E^2/2. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Кинетическая энергия всей системы имеет вид

$$T = T_A + T_B + T_C + T_D + T_E. \tag{3.9}$$

Переходя от одного тела к другому, последовательно выражаем все кинематические величины, входящие в (3.8), через скорость груза A.

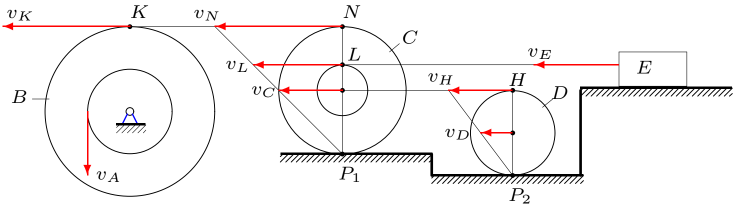

Рис. 96

Используем метод мгновенных центров скоростей [1]. Выражаем угловую скорость блока B через v_A: $\omega_B = v_A/r_B$. Отсюда легко получить

[1] Метод мгновенных центров скоростей удобно применять при определении *модулей* скоростей, как, например здесь, где в кинетическую энергию входят только квадраты скоростей. Там, где требуются *знаки проекций*, например, в задачах на принцип возможных перемещений (с. 122) или при составлении уравнения Лагранжа 2-го рода (с. 128), лучше использовать метод кинематических графов.

скорость точки K на внешнем ободе блока B: $v_K = \omega_B R_B = v_A R_B / r_B$. Нить нерастяжима, следовательно $v_N = v_K$. Мгновенный центр скоростей P_1 блока C находится в точке касания поверхности. Получаем угловую скорость блока: $\omega_C = v_N/(2R_C) = v_A R_B/(2r_B R_C)$. Определяем скорость центра масс блока $v_C = \omega_C R_C = v_A R_B/(2r_B)$ и скорость точки L меньшего обода блока $v_L = \omega_C(R_C + r_C) = v_A R_B(R_C + r_C)/(2r_B R_C)$. Очевидно, $v_L = v_E$. Исходя из того, что мгновенный центр скоростей цилиндра находится в точке касания поверхности, получаем скорость центра цилиндра $v_D = v_C/2 = v_A R_B/(4r_B)$.

Таким образом, все кинематические величины, входящие в кинетическую энергию системы выражены через v_A. Для моментов инерций имеем формулы $J_B = i_B^2 m_B$, $J_C = i_C^2 m_C$. Подставляем скорости, угловые скорости и моменты инерции в (3.8). С учетом числовых данных получаем

$$T_A = 5\frac{v_A^2}{2}, \quad T_B = \frac{m_B\, {i_B}^2\, v_A^2}{2\, {r_B}^2} = 9\frac{v_A^2}{2},$$

$$T_C = \frac{mc\, {R_B}^2\, ({i_C}^2 + {R_C}^2)\, v_A^2}{8\, {r_B}^2\, {R_C}^2} = 13\frac{v_A^2}{2},$$

$$T_D = \frac{3\, m_D\, v_A^2\, {R_B}^2}{64\, {r_B}^2} = 3\frac{v_A^2}{2},$$

$$T_E = \frac{m_E\, v_A^2\, {R_B}^2\, (R_C + r_C)^2}{8\, {r_B}^2\, {R_C}^2} = 32\frac{v_A^2}{2}.$$

Отсюда имеем приведенные массы тел: $\mu_A = 5$, $\mu_B = 9$, $\mu_C = 13$, $\mu_D = 3$, $\mu_E = 32$. Приведенная масса всей системы, согласно (3.9), равна $\mu = 5 + 9 + 13 + 3 + 32 = 62$ кг.

Заметим, что радиус цилиндра D по условию не задан и для решения не потребовался.

Maple-программа для решения этой задачи дана на с. 239.