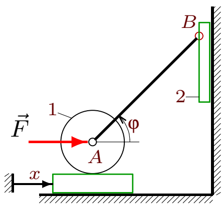
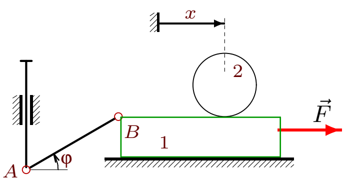
Д6.27.



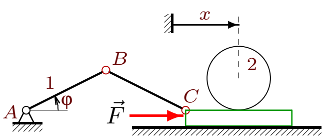
Цилиндр 1 массой $m_1 = m$ и пластина 2 массой $m_2 = m$ соединены невесомым стержнем AB длиной a. Пластина скользит по вертикальной плоскости, цилиндр катится по бруску, скользящему по горизонтальному основанию. За обобщенные координаты принять угол поворота φ стержня и смещение x бруска.

Д6.28.

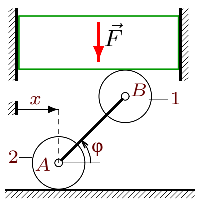


Стержень AB соединяет вертикальный шток и горизонтально скользящий брусок массой $m_1 = m$. По бруску катается цилиндр массой $m_2 = 3m$. К бруску приложена горизонтальная сила F. За обобщенные координаты принять угол поворота φ стержня и смещение x оси цилиндра.

Д6.29. Двухзвенник ABC соединяет неподвижный шарнир с пластиной, скользящей по горизонтальному основанию. Масса стержня AB равна m_1. По пластине катается цилиндр массой $m_2 = 3m_1$. К пластине приложена горизонтальная сила F. За обобщенные координаты принять угол поворота φ стержня AB и смещение x оси цилиндра.



Д6.30. Два цилиндра соединены невесомым стержнем AB длиной a. Верхний цилиндр массой m_1 катается по горизонтальной поверхности поршня, нижний, массой $m_2 = 3m_1$ — по горизонтальному основанию. К поршню приложена вертикальная сила F. За обобщенные координаты принять угол поворота φ стержня AB и смещение x оси цилиндра A.



Ответы к задачам см. в табл. 18 на с. 253.

Пример решения

Задача. Цилиндр радиуса r катается без проскальзывания по бруску. Брусок скользит по гладкой горизонтальной поверхности (рис. 107). Масса бруска 1 равна m, масса точки 2, расположенной на ободе цилиндра, равна m, цилиндра 3 — $3m$. За обобщенные координаты принять смещение бруска x и угол поворота цилиндра φ. Найти функцию Рауса.

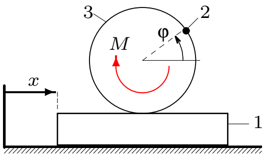


Рис. 107

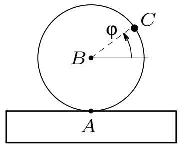


Рис. 108

Решение

Для начала решим задачу кинематики. Точку соприкосновения цилиндра и бруска обозначим A, ось цилиндра — B, точку на ободе — C (рис. 108). Найдем выражения скорости точки C и оси цилиндра через выбранные обобщенные скорости $\dot{x}$ и $\dot{\varphi}$. Составим следующий кинематический граф

$$A \xrightarrow[\pi/2]{R} B \xrightarrow[\varphi]{R} C\,.$$

Ему соответствуют два уравнения

$$v_{Cx} = v_{Ax} - r\dot{\varphi}\sin(\pi/2) - r\dot{\varphi}\sin\varphi,$$
$$v_{Cy} = v_{Ay} + r\dot{\varphi}\cos(\pi/2) + r\dot{\varphi}\cos\varphi.$$

С учетом $v_{Ax} = \dot{x}$, $v_{Ay} = 0$, получаем отсюда следующие выражения для проекций скоростей точки C

$$v_{Cx} = \dot{x} - r\dot{\varphi}(1 + \sin\varphi),$$
$$v_{Cy} = r\dot{\varphi}\cos\varphi.$$

Из графа $A \xrightarrow[\pi/2]{R} B$ получаем компоненты скорости центра цилиндра $v_{Bx} = \dot{x} - r\dot{\varphi}\sin(\pi/2) = \dot{x} - r\dot{\varphi}$, $v_{By} = r\dot{\varphi}\cos(\pi/2) = 0$.

Кинетическая энергия системы состоит из кинетической энергии точки C, кинетической энергии поступательного движения бруска и плоского движения цилиндра и имеет вид

$$T = \frac{m_1\dot{x}^2}{2} + \frac{m_2(v_{Cx}^2 + v_{Cy}^2)}{2} + \frac{m_3(v_{Bx}^2 + v_{By}^2)}{2} + \frac{J\dot{\varphi}^2}{2},$$

где $J = m_3 r^2/2$ — момент инерции однородного цилиндра. С учетом значений масс $m_1 = 4m$, $m_2 = m$, $m_3 = 3m$, и выражений для скоростей получим

$$T = m(4\dot{x}^2 - r\dot{x}\dot{\varphi}(4 + \sin\varphi) + r^2\dot{\varphi}^2(13 + 4\sin\varphi)/4).$$

Потенциальная энергия имеет вид

$$\Pi = M\varphi + m_2 gr\sin\varphi.$$

Функция Лагранжа: L =(кинетич. эн/.) – (потенц. эн/.)=кинетич. потенц.):

$$L = T - \Pi = m(4\dot{x}^2 - r\dot{x}\dot{\varphi}(4+\sin\varphi) + r^2\dot{\varphi}^2(13+4\sin\varphi)/4) - \\ -M\varphi - mgr\sin\varphi. \tag{3.23}$$

Обобщенная координата x не входит в выражение для L и является циклической. Найдем обобщенный импульс p_x, соответствующий циклической координате x. Имеем циклический интеграл

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m(8\dot{x} - r\dot{\varphi}(4+\sin\varphi)).$$

В силу уравнения Лагранжа p_x =const. Выразим отсюда циклическую скорость

$$\dot{x} = r\dot{\varphi}(4+\sin\varphi)/8 + p_x/(8m). \tag{3.24}$$

Запишем функцию Рауса $R = p_x\dot{x} - L$. После подстановки выражения для $\dot{x}$ и некоторых преобразований получим [1]

$$R = -mr^2(35+8\sin\varphi+\cos^2\varphi)\dot{\varphi}^2/16 + \\ +p_x r\dot{\varphi}(4+\sin\varphi)/8 + M\varphi + mgr\sin\varphi + p_x^2/16. \tag{3.25}$$

Функция Рауса удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial R}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial R}{\partial \varphi} = 0$$

или

$$r^2m\dot{\varphi}^2(\sin\varphi - 4)\cos\varphi - r^2m\ddot{\varphi}(35+8\sin\varphi+\cos^2\varphi) - \\ -8mgr\cos\varphi - 8M = 0. \tag{3.26}$$

Из этого уравнения можно найти $\varphi(t)$. Циклическая координата определяется из интеграла

$$x(t) = \int \frac{\partial R}{\partial p_x} dt = r(4\varphi - \cos\varphi)/8 + p_x t/(8m) + C, \tag{3.27}$$

где C — постоянная интегрирования. Константы C и p_x определяют из начальных условий для $x(t)$. Заметим, что уравнения Лагранжа 2-го рода дают связанную систему уравнений

$$mr^2(13+4\sin\varphi)\ddot{\varphi} - 8mr\ddot{x}\sin\varphi + 2mr^2\dot{\varphi}^2\cos\varphi + 2M + 2rmg\cos\varphi = 0,$$

$$r(4+\sin\varphi)\ddot{\varphi} - 8\ddot{x} + r\dot{\varphi}^2\cos\varphi = 0.$$

Maple-программа для определения функции Рауса, интегрирования уравнения (3.26) и анимации полученного решения дана на с. 233.

[1] В некоторых учебниках [7], функция Рауса берется с обратным знаком.