

**Задача.** Механическая система, состоящая из трех стержней, груза 1 и блока 2, движется под действием внешних сил (рис. 74). Внешний

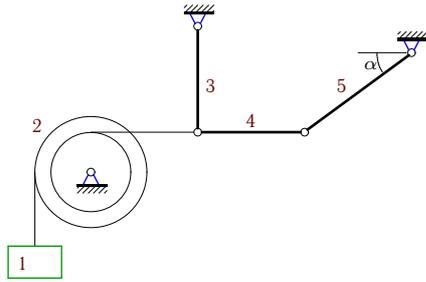


Рис. 74

радиус блока равен 5 см, внутренний — 3 см, радиус инерции — 4 см. Стержни считать однородными. Даны массы:  $m_1 = 1$  кг,  $m_2 = 25$  кг,  $m_3 = 25$  кг,  $m_4 = 75$  кг,  $m_5 = 3$  кг. Стержень 3 в данный момент вертикальный, 4 — горизонтальный,  $\cos \alpha = 0,8$ . Вычислить приведенную массу системы  $\mu$  в формуле  $T = \mu v_1^2/2$ , где  $v_1$  — скорость груза 1.

### Решение

Груз 1 движется поступательно, блок 2 и стержни 3, 5 вращаются, а стержень 4 совершает плоское движение. Кинетические энергии тел системы имеют вид

$$\begin{aligned} T_1 &= m_1 v_1^2/2, & T_2 &= J_2 \omega_2^2/2, \\ T_3 &= J_3 \omega_3^2/2, & T_4 &= J_4 \omega_4^2/2 + m_4 v_C^2/2, \\ T_5 &= J_5 \omega_5^2/2, \end{aligned} \quad (7.15)$$

где  $v_C$  — скорость центра масс стержня 4 (рис. 75),  $J_2 = m_2 \rho^2$ ,  $J_3 = m_3 l_3^2/3$ ,  $J_5 = m_5 l_5^2/3$  — моменты инерции блока 2 и стержней 3 и 5 относительно осей вращения,  $J_4 = m_4 l_4^2/12$  — момент инерции стержня относительно центра масс ( $l_3, l_4, l_5$  — длины стержней).

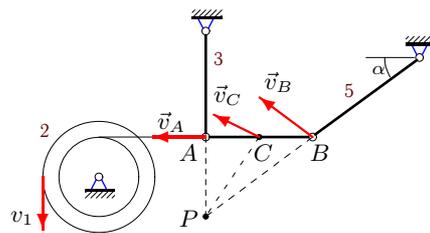


Рис. 75

Все скорости и угловые скорости, входящие в выражения для кинетических энергий, выразим через скорость  $v_1$ . Очевидно,

$$\omega_2 = v_1/R_2, \quad v_A = \omega_2 r_2 = v_1 r_2/R_2, \quad \omega_3 = v_A/l_3.$$

Для того, чтобы найти остальные кинематические величины, воспользуемся методом мгновенного центра скоростей<sup>1</sup>. Вектора скоростей точек  $A$  и  $B$  направлены перпендикулярно соответствующим стержням. МЦС стержня 4 лежит на пересечении перпендикуляров к эти векторам (рис. 75). Расстояния до МЦС:

$$\begin{aligned} AP &= l_4 \operatorname{tg} \alpha = 3l_4/4, \\ BP &= l_4 / \cos \alpha = 5l_4/4, \\ CP &= \sqrt{AP^2 + l_4^2/4} = l_4\sqrt{13}/4. \end{aligned}$$

Имеем следующие выражения для скоростей точек стержня  $AB$ , имеющего МЦС в точке  $P$ :

$$\begin{aligned} v_A &= \omega_4 AP, \\ v_C &= \omega_4 CP, \\ v_B &= \omega_4 BP. \end{aligned}$$

Из первого равенства находим угловую скорость стержня 4

$$\omega_4 = v_A/AP = 4v_1r_2/(3l_4R_2), \quad (7.16)$$

а из второго скорость

$$v_C = \omega_4 CP = \sqrt{13}v_1r_2/(3R_2). \quad (7.17)$$

Остается найти угловые скорости стержней 3 и 5. Поделив скорости точек  $A$  и  $B$  на длины стержней, получим

$$\omega_3 = v_A/l_3 = v_1r_2/(l_3R_2), \quad \omega_5 = v_B/l_5 = 5v_1r_2/(3l_5R_2). \quad (7.18)$$

Подставим скорости и угловые скорости (7.16) – (7.18) в выражения для кинетических энергий (7.15). Получим

$$\begin{aligned} T_1 &= m_1v_1^2/2 = v_1^2/2, T_2 = \rho_2m_2v_1^2/(2R_2^2) = 8v_1^2, \\ T_3 &= r_2^2m_3v_1^2/(6R_2^2) = 3v_1^2/2, \\ T_4 &= 43r_2^2m_4v_1^2/(54R_2^2) = 43v_1^2/2, \\ T_5 &= 25r_2^2m_5v_1^2/(54R_2^2) = v_1^2/2. \end{aligned} \quad (7.19)$$

<sup>1</sup> Другой способ — уравнения трех угловых скоростей (2.5), с. 18. Система уравнений имеет вид

$$\begin{aligned} \omega_4l_4 + (4/5)\omega_5l_5 &= 0, \\ -\omega_3l_3 + (3/5)\omega_5l_5 &= 0. \end{aligned}$$

Следовательно, приведенные массы системы (коэффициенты при  $v_1^2/2$ ) равны  $\mu_1 = 1$  кг,  $\mu_2 = 16$  кг,  $\mu_3 = 3$  кг,  $\mu_4 = 43$  кг,  $\mu_5 = 1$  кг. Суммарная приведенная масса

$$\mu = 1 + 16 + 3 + 43 + 1 = 64 \text{ кг.}$$

### Д7. Теорема об изменении кинетической энергии

**Теорема.** Изменение кинетической энергии системы при некотором ее перемещении равно сумме работ на этом перемещении всех сил, приложенных к ней [?].

В отличие от теоремы об изменении количества движения и момента количества движения в теореме присутствуют как внешние ( $F_k^e$ ) так и внутренние ( $F_k^i$ ) силы. Кроме того она имеет скалярный вид

$$T_1 - T_0 = \sum_k A(F_k^e) + A(F_k^i),$$

здесь  $T_0$  и  $T_1$  — кинетическая энергия системы в начальном и конечном состоянии соответственно. Для неизменяемых систем<sup>1</sup> работа внутренних сил  $A(F_k^i)$  равна нулю. В настоящем параграфе все системы неизменяемые — нити нерастяжимые, связи идеальные.

#### Условия задач

Механическая система движется под действием внешних сил. Заданы радиусы цилиндров, блоков и длины стержней. Радиусы инерции даны для блоков, цилиндры и стержни считать однородными. Для вариантов 1, 4, 10, 14, 20, 24, 30 считать, что механизм расположен в вертикальной плоскости, в остальных — в горизонтальной. Пронумерованные тела имеют массу, другие — считать невесомыми. Какую скорость (см/с) приобретет брусок (клин, шток), переместившись из состояния покоя на расстояние  $S$ ?

<sup>1</sup>Например, твердое тело.