Д8. 25.
$\varphi = 2t + \pi/3,\ \psi = 2t^2,\ \theta = 4t + \pi/2,$
$J_x = 4,\ J_y = 5,\ J_z = 2.$

Д8. 26.
$\varphi = 2t + \pi/3,\ \psi = 2t^2,\ \theta = 4t + \pi/2,$
$J_x = 5,\ J_y = 3,\ J_z = 4.$

Д8. 27.
$\varphi = 2t + \pi/3,\ \psi = 4t^2,\ \theta = 4t + \pi/2,$
$J_x = 1,\ J_y = 3,\ J_z = 3.$

Д8. 28.
$\varphi = 2t + \pi/3,\ \psi = 4t^2,\ \theta = 4t + \pi/2,$
$J_x = 2,\ J_y = 4,\ J_z = 3.$

Д8. 29.
$\varphi = 2t + \pi/3,\ \psi = 4t^2,\ \theta = 4t + \pi/2,$
$J_x = 3,\ J_y = 2,\ J_z = 2.$

Д8. 30.
$\varphi = 2t + \pi/3,\ \psi = 4t^2,\ \theta = 4t + \pi/2,$
$J_x = 3,\ J_y = 5,\ J_z = 4.$

Пример решения

Задача. Движение твердого тела, закрепленного шарнирно в начале координат, задано углами Эйлера[1] $\varphi = t + \pi/2$, $\psi = 2t$, $\theta = t(1 - t) + \pi/6$. Известны главные моменты инерции тела $J_x = 4$ кгм^2, $J_y = 6$ кгм^2, $J_z = 3$ кгм^2. Найти модуль главного момента, приложенного к телу, при $t = 0$.

Решение

Динамические уравнения Эйлера имеют вид

$$\begin{aligned} M_x &= J_x \frac{d\omega_x}{dt} + (J_z - J_y)\,\omega_y\,\omega_z, \\ M_y &= J_y \frac{d\omega_y}{dt} + (J_x - J_z)\,\omega_x\,\omega_z, \\ M_z &= J_z \frac{d\omega_z}{dt} + (J_y - J_x)\,\omega_x\,\omega_y, \end{aligned} \tag{8.1}$$

где M_x, M_y, M_z — проекции искомого вектора момента.

Воспользуемся кинематическими уравнениями Эйлера для определения проекций угловой скорости на подвижные оси координат (4.1), с. 102. Получим

$$\begin{aligned} \omega_x &= 2\cos(\theta_1)\cos(t) + (2t - 1)\sin(t), \\ \omega_y &= -2\cos(\theta_1)\sin(t) + (2t - 1)\cos(t), \\ \omega_z &= 1 + 2\sin(\theta_1)\cos(t), \end{aligned} \tag{8.2}$$

где $\theta_1 = t(1 - t) + \pi/3$. При $t = 0$ имеем следующие значения: $\theta_1 = \pi/3$, $\omega_x = 1$ с$^{-1}$, $\omega_y = -1$ с$^{-1}$, $\omega_z = 1 + \sqrt{3} = 2{,}73$ с$^{-1}$.

[1] См. рисунок 60, с. 102.

Подставляя в динамические уравнения (8.1) данные задачи и найденные зависимости (8.2), получим [1]

$$M_x = (2t-1)(1-14\,\sin(\theta_1))\,\cos(t) - 2\,\sin(t)(\cos(\theta_1) - 3\,\sin(2\theta_1) - 4),$$
$$M_y = (2t-1)\sin(t)(14\sin(\theta_1) - 5) - 2\cos(t)(5\,\cos(\theta_1) - 6 - \sin(2\theta_1)),$$
$$M_z = 2(2t-1)\cos(\theta_1)(1+4\cos^2(t)) + 2\sin(2t)((2t-1)^2 - 4\cos^2(\theta_1)).$$

При $t = 0$ имеем $M_x = 7\sqrt{3} - 1 = 11{,}124$ Нм, $M_y = \sqrt{3} + 7 = 8{,}732$ Нм, $M_z = -5{,}000$ Нм. Окончательно получаем модуль момента

$$M_0 = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} = 15 \text{ Нм}.$$

Д9. Кинетический момент

Момент количества движения системы, равный векторной сумме моментов количества движения ее частей

$$\vec{L}_O = \sum_k \vec{l}_{Ok}$$

применительно к твердому телу часто называют кинетическим моментом. Вычисление кинетического момента по заданному закону движения составляет первую задачу динамики. Вторая задача динамики (или основная) значительно сложнее — определение закона движения по заданным силам.

Условия задач

Движение твердого тела, закрепленного шарнирно в начале координат, задано углами Эйлера. Известны моменты инерции тела (кгм^2). Найти модуль кинетического момента тела при $t = 0$.

Д9. 1.
$\varphi = 2t - \pi/2,\ \ \psi = 2t,\ \ \theta = 2t,$
$J_x = 3,\ J_y = 2,\ J_z = 4,$
$J_{xy} = 2,\ J_{xz} = -1,\ J_{yz} = 1.$

Д9. 2.
$\varphi = t + \pi/6,\ \ \psi = 2t,\ \ \theta = 5t + \pi/3,$
$J_x = 3,\ J_y = 4,\ J_z = 5,$
$J_{xy} = 0,\ J_{xz} = 0,\ J_{yz} = 1.$

Д9. 3.
$\varphi = 2t + \pi/2,\ \ \psi = \pi/6,\ \ \theta = 3t + \pi/2,$
$J_x = 3,\ J_y = 2,\ J_z = 4,$
$J_{xy} = 1,\ J_{xz} = 1,\ J_{yz} = -2.$

Д9. 4.
$\varphi = 2t + \pi/6,\ \ \psi = 2t,\ \ \theta = t + \pi/3,$
$J_x = 4,\ J_y = 3,\ J_z = 4,$
$J_{xy} = 0,\ J_{xz} = 0,\ J_{yz} = 1.$

[1] Подобные аналитические преобразования рекомендуется выполнять в какой-либо системе компьютерной алгебры, например Maple [?, ?].