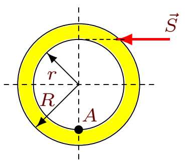
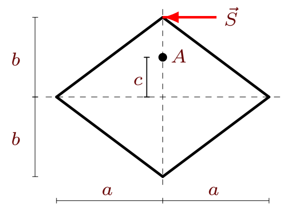
Д19. 29.



$m = 1$ кг, $R = 6$ см, $r = 3$ см,
$S = 90$ кг см/с.

Д19. 30.



$m = 4$ кг, $a = 8$ см, $b = 4$ см,
$c = 2$ см, $S = 320$ кг см/с.

Пример решения

Задача. К плоскому однородному телу массой 1 кг приложен ударный импульс $S = 0.49$ Нс (рис. 37). Даны размеры $a = 4$ см, $b = 1$ см, $c = 3$ см. Найти скорость точки A после удара.

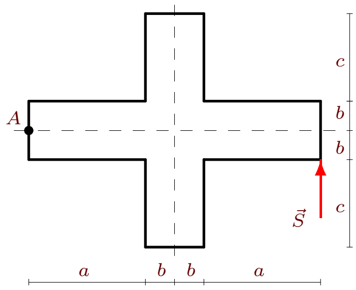


Рис. 37

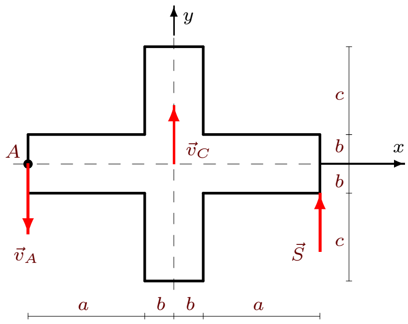


Рис. 38

Решение

Вычисляем площадь фигуры, разбивая ее на прямоугольник размером $2(a + b) \times 2b$ и два прямоугольника $c \times 2b$:

$$F = 4(a + b)b + 4bc = 32 \text{ см}^2$$

Вычисляем *геометрические моменты* инерции фигуры относительно осей x и y (рис. 38), пользуясь формулой для момента инерции прямоугольника $I_u = l_1 l_2^3/12$, где l_1 — размер прямоугольника вдоль оси u (табл. 1, с. 124). Имеем

$$I_x = 4b(c + b)^3/3 + 4ab^3/3 = 272/3 \text{ см}^4,$$
$$I_y = 4b(a + b)^3/3 + 4cb^3/3 = 512/3 \text{ см}^4.$$

В силу симметрии фигуры момент инерции относительно оси z является ее главным моментом инерции

$$I_{zC} = I_x + I_y.$$

Радиус инерции фигуры

$$\rho^2 = I_{zC}/F = 49/6 \text{ см}^2, \rho = 2{,}857 \text{ см}.$$

Момент инерции фигуры относительно оси z

$$J_{zC} = m\rho^2 = 49/6 \text{ кгсм}^2. \tag{6.13}$$

Учитывая, что $S_y = S$, $S_x = 0$, пользуясь (6.10), (6.11), находим скорость центра масс фигуры

$$v_{Cy} = S_y/m = 49 \text{ см/с}, \quad v_{Cx} = 0.$$

Согласно (6.12) определяем угловую скорость тела в момент удара

$$\omega_z = S_y(a+b)/J_{zC} = 30 \text{ с}^{-1}.$$

Искомую скорость точки находим по формуле для скоростей точек при плоском движении в проекции на ось y (граф $C \xrightarrow[\pi]{} A$)

$$v_{Ay} = v_{Cy} + \omega_z(a+b)\cos\pi = v_{Cy} - \omega(a+b) = 49 - 30 \cdot 5 = -101 \text{ см/с}.$$

Таким образом, после удара точка A будет двигаться вниз (рис. 38).

Замечание. Вычисление момента инерции можно поручить маплету, описанному в [14]. Маплет вычисляет осевые и центробежные геометрические моменты инерции фигуры и радиус инерции относительно центральной оси, перпендикулярной плоскости фигуры. Именно этот момент используется в формуле (6.13) для вычисления искомого момента инерции. Для ввода информации о фигуре достаточно ввести в программу координаты ее контура при обходе по часовой стрелке. Интерфейс маплета представлен на рисунке 39. Файл маплета [1] невелик — около 3 кБ, однако для его работы необходима установленная система компьютерной математики Maple. Маплет тестировался на версиях Maple 11-16.

[1] Расположен по адресу http://vuz.exponenta.ru/MMin.rar.

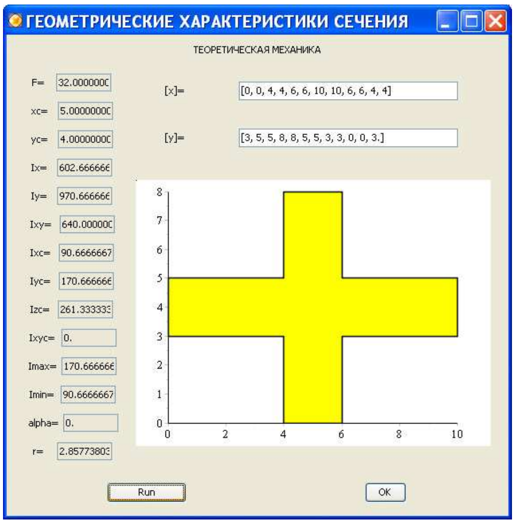


Рис. 39

Д20. Удар по механической системе

Уравнения Лагранжа 2-го рода для системы, обладающей s степенями свободы, в случае удара записывается в виде

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)_1 - \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)_0 = \int\limits_0^1 Q_i^{\text{уд}} dt = R_i^{\text{уд}}, \ i = 1, ..., s, \qquad (6.14)$$

где T — кинетическая энергия, $\dot{q}_i$ — обобщенные скорости, $R_i^{\text{уд}}$ — обобщенные ударные импульсы:

$$R_i^{\text{уд}} = \frac{\delta A_i(\vec{S}^{\text{уд}})}{\delta q_i},$$

где $\delta A_i(\vec{S}^{\text{уд}})$ — элементарные работы ударных импульсов на возможных перемещениях δq_i.

Состояние 0 (нижний индекс в (6.14)) соответствует системе до удара, 1 — после удара. Импульсы неударных сил (активных сил, сил тяжести) в уравнения не входят.

Условия задач

К одному из тел механической системы с двумя степенями свободы с идеальными связями, находящейся в состоянии покоя, приложен ударный импульс S. Тела, массы которых не указаны, считать невесомыми. Найти скорость точки A после удара.