

Рис. 39

## Д20. Удар по механической системе

Уравнения Лагранжа 2-го рода для системы, обладающей  $s$  степенями свободы, в случае удара записывается в виде

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)_1 - \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)_0 = \int_0^1 Q_i^{y\Delta} dt = R_i^{y\Delta}, \quad i = 1, \dots, s, \quad (6.14)$$

где  $T$  — кинетическая энергия,  $\dot{q}_i$  — обобщенные скорости,  $R_i^{y\Delta}$  — обобщенные ударные импульсы:

$$R_i^{y\Delta} = \frac{\delta A_i(\vec{S}^{y\Delta})}{\delta q_i},$$

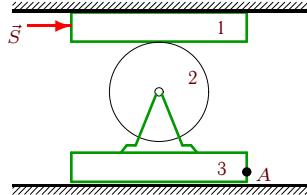
где  $\delta A_i(\vec{S}^{y\Delta})$  — элементарные работы ударных импульсов на возможных перемещениях  $\delta q_i$ .

Состояние 0 (нижний индекс в (6.14)) соответствует системе до удара, 1 — после удара. Импульсы неударных сил (активных сил, сил тяжести) в уравнения не входят.

### Условия задач

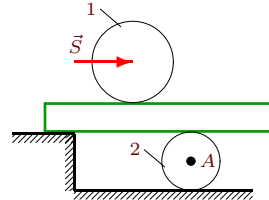
К одному из тел механической системы с двумя степенями свободы с идеальными связями, находящейся в состоянии покоя, приложен ударный импульс  $S$ . Тела, массы которых не указаны, считать невесомыми. Найти скорость точки  $A$  после удара.

Д20. 25.

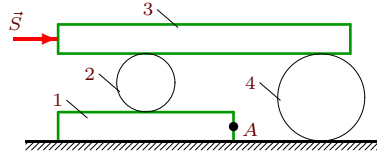


$m_1=1$  кг,  $m_2=3$  кг,  $m_3=5$  кг,  $S=86$  Нс.

Д20. 26.

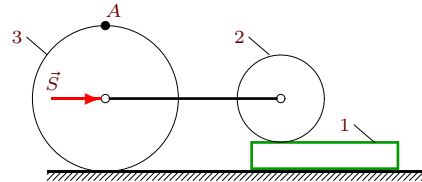


Д20. 27.



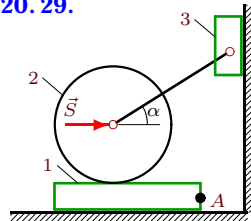
$m_1 = 1$  кг,  $m_2 = 4$  кг,  $m_3 = 1$  кг,  
 $m_4 = 3$  кг,  $S = 423$  Нс.

Д20. 28.



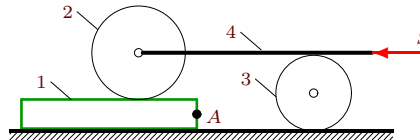
$m_1 = 2$  кг,  $m_2 = 4$  кг,  
 $m_3 = 1$  кг,  $S = 52$  Нс.

Д20. 29.



$m_1 = 1$  кг,  $m_2 = 3$  кг,  $m_3 = 2$  кг,  
 $\alpha = \pi/6$ ,  $S = 96$  Нс.

Д20. 30.



$m_1 = 2$  кг,  $m_2 = 4$  кг,  $m_3 = 6$  кг,  
 $m_4 = 2$  кг,  $S = 296$  Нс.

**Пример решения**

**Задача.** Механическая система состоит из бруска массой  $m_1 = 1$  кг, расположенного на гладкой горизонтальной поверхности, бруска массой  $m_2 = 2$  кг, однородного цилиндра массой  $m_3 = 4$  кг и невесомого стержня, шарнирно соединяющего ось цилиндра и брусок 2 (рис. 40). Цилиндр может катиться по плоскости без проскальзывания и трения. Система находится в состоянии покоя. К бруску 1 приложили ударный импульс  $S = 72$  Нс. В момент удара  $\alpha = \pi/4$ . Найти скорость точки A после удара.

**Решение**

Система имеет две степени свободы. Выберем две обобщенные координаты:  $x$  — горизонтальное смещение бруска 1 и  $\varphi$  — угол наклона стержня. Угол отсчитываем против часовой стрелки от положительного направления оси  $x$  (рис. 41).

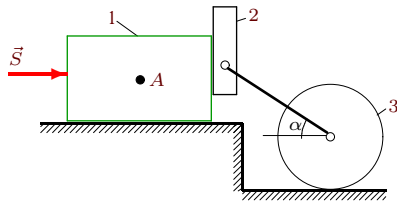


Рис. 40

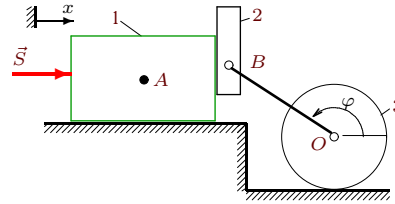


Рис. 41

Согласно уравнению (6.14), с. 117 с учетом начального состояния покоя механизма имеем два уравнения Лагранжа

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} &= R_x^{y\Delta}, \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} &= R_\varphi^{y\Delta}. \end{aligned} \quad (6.15)$$

Кинетическая энергия системы имеет вид

$$T = \frac{m_1 \dot{x}^2}{2} + \frac{m_2 v_B^2}{2} + \frac{3m_3 v_O^2}{4}.$$

Здесь для кинетической энергии тела 3 применена формула (2.12), с. 26 для однородного цилиндра, катящегося без проскальзывания. Выразим скорости  $v_B$  и  $v_O$ , входящие в это выражение, через обобщенные скорости. Запишем кинематический граф

$$O \xrightarrow[\varphi]{l} B,$$

где  $l$  — длина стержня  $OB$ . В проекциях на оси получим

$$\begin{aligned} v_{Bx} &= v_{Ox} - \dot{\varphi} l \sin \varphi, \\ v_{By} &= v_{Oy} + \dot{\varphi} l \cos \varphi. \end{aligned}$$

Так как  $v_{Bx} = \dot{x}$ ,  $v_{Oy} = 0$ , то отсюда следует  $v_{Ox} = \dot{x} + \dot{\varphi} l \sin \varphi$ ,  $v_{By} = \dot{\varphi} l \cos \varphi$ . Таким образом, получаем кинетическую энергию системы, выраженную через обобщенные скорости

$$T = \frac{2m_1 + 2m_2 + 3m_3}{4} \dot{x}^2 + \frac{3m_3 l \sin \varphi}{2} \dot{x} \dot{\varphi} + \frac{2m_2 \cos^2 \varphi + 3m_3 \sin^2 \varphi}{4} l^2 \dot{\varphi}^2.$$

С учетом данных задачи получаем

$$T = \frac{9\dot{x}^2}{2} + 3l\sqrt{2}\dot{x}\dot{\varphi} + 2l^2\dot{\varphi}^2.$$

Вычисляя обобщенные импульсы точно также, как это делалось при вычислении обобщенных сил (с. 84), получаем  $R_x^{y_d} = S$ ,  $R_\varphi^{y_d} = 0$ .

Система (6.15) принимает вид

$$9\dot{x} + 3\sqrt{2}l\dot{\varphi} = 72$$

$$3\sqrt{2}\dot{x} + 4l\dot{\varphi} = 0.$$

Решаем систему уравнений и находим  $\dot{x} = 16$  м/с,  $\dot{\varphi} = -12\sqrt{2}/l$ . Таким образом, скорость точки  $A$  после удара равна 16 м/с.