Часть I

ДИНАМИКА

Глава 1

Динамика точки

Д1. Теорема об изменении количества движения точки

Если проинтегрировать на интервале времени $[t_0, t_1]$ уравнение движения точки $m\vec{a} = \vec{F}$ и ввести векторные величины $m\vec{v} = \vec{q}$ (количество движения точки [1]) и $\int\limits_{t_0}^{t_1} \vec{F}dt = \vec{S}$ (импульс силы), то получим математическое выражение теоремы об изменении количества движения точки в интегральной форме

$$\vec{q}_1 - \vec{q}_0 = \vec{S}. \tag{1.1}$$

Условия задач

Точка массой m движется в декартовой системе координат xy по закону $x = x(t)$, $y = y(t)$ (в метрах). Найти суммарный импульс сил, действующих на точку в интервале времени $0 \leqslant t \leqslant 1$ с.

Д1.1.
$x = 12(t\sqrt{1-t^2} + \arcsin(t))$,
$y = 19t^2(t^2 - 2)$,
$m = 2$ кг.

Д1.2.
$x = (8/3)t(3 - t^2)$,
$y = 3(t\sqrt{1-t^2} + \arcsin(t))$,
$m = 1$ кг.

[1] Физики эту величину называют также импульсом материальной точки.

Д1.19.
$x = 24e^t(2-t)$,
$y = (20/3)t^{3/2}$,
$m = 3$ кг.

Д1.20.
$x = 24(t^2 - 2t + 2\ln(1+t))$,
$y = 9t^2$,
$m = 3$ кг.

Д1.21.
$x = (8/3)t^{3/2}$,
$y = 8t^2(2t-3)$,
$m = 2$ кг.

Д1.22.
$x = 3t^2$,
$y = 9t^2(t^2-2)$,
$m = 4$ кг.

Д1.23.
$x = (5/2)(t\sqrt{1-t^2} + \arcsin(t))$,
$y = 13t^2(t^2-2)$,
$m = 2$ кг.

Д1.24.
$x = 10t^2(t^2-2)$,
$y = 6(t\sqrt{1-t^2} + \arcsin(t))$,
$m = 4$ кг.

Д1.25.
$x = (15/2)(t\sqrt{1-t^2} + \arcsin(t))$,
$y = 9^t/\ln 9$,
$m = 3$ кг.

Д1.26.
$x = (16/3)t(3-t^2)$,
$y = (24/\pi)\cos(\pi t/2)$,
$m = 1$ кг.

Д1.27.
$x = 14(1-t)^{3/2}$,
$y = 20e^t(2-t)$,
$m = 3$ кг.

Д1.28.
$x = (7/2)t(2-t)$,
$y = 24(t^2 - 2t + 2\ln(1+t))$,
$m = 2$ кг.

Д1.29.
$x = 11^t/\ln 11$,
$y = 16t^{3/2}$,
$m = 2$ кг.

Д1.30.
$x = (36/\pi)\cos(\pi t/2)$,
$y = 12t^2$,
$m = 1$ кг.

Пример решения

Задача. Точка массой $m = 1$ кг движется в декартовой системе координат xy по закону

$$x = 6e^{t/2}(7 - 4t + t^2), \quad y = 2t^2,$$

(в метрах). Найти суммарный импульс сил, действующих на точку в интервале времени $0 \leqslant t \leqslant 1$ с.

Решение

Теорему об изменении количества движения (1.1), с. 6 записываем в координатной форме

$$mv_{1x} - mv_{0x} = S_x, \quad mv_{1y} - mv_{0y} = S_y, \tag{1.2}$$

где v_{1x}, v_{1y}, v_{0x}, v_{0y} — компоненты скорости соответственно в конце и в начале интервала, т. е. при $t = 1$ и $t = 0$.

Проекции вектора скорости находим, дифференцируя закон движения точки по времени

$$v_x = \dot{x} = 3e^{t/2}(t^2 - 1),$$
$$v_y = \dot{y} = 4t.$$

Отсюда имеем значения проекций скорости в начале заданного интервала движения и в конце

$$v_{x0} = -3 \text{ м}/c, \quad v_{x1} = 0,$$
$$v_{y0} = 0, \quad v_{y1} = 4 \text{ м}/c.$$

Из (1.2) получаем компоненты суммарного импульса сил

$$S_x = 3 \text{ Нс}, \quad S_y = 4 \text{ Нс}.$$

Находим модуль импульса

$$S = \sqrt{S_x^2 + S_y^2} = 5 \text{ Нс}.$$

На рисунке 1 изображена траектория движения точки [1].

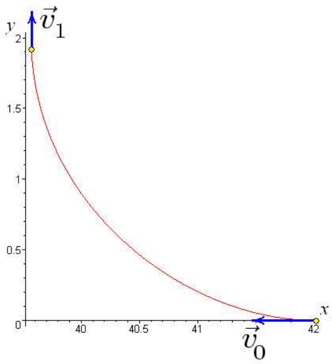

Рис. 1

Заметим, что найденное значения импульса сил ничего не говорит о конкретных силах, действующих на точку в заданном промежутке

[1]Использован оператор системы Maple построения графиков в параметрической форме plot([x,y,t=0..1]).