МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ СССР

МОСКОВСКИЙ ордена ЛЕНИНА
ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ имени В. М. МОЛОТОВА

Кафедра теоретической механики

Утверждено
Учебным управлением МЭИ
в качестве учебного пособия
для студентов

СБОРНИК ЗАДАЧ
по
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

Часть 3

(ДИНАМИКА)

Москва 1956

ПРЕДИСЛОВИЕ

Сборник задач по теоретической механике (часть 3 «Динамика»), составленный коллективом кафедры теоретической механики, предназначен в качестве пособия для студентов и преподавателей (часть 1 «Статика» вышла из печати в 1953 году, часть 2 «Кинематика» — в 1955 году).

Большая часть задач, включенных в настоящий сборник, используется кафедрой на протяжении ряда лет.

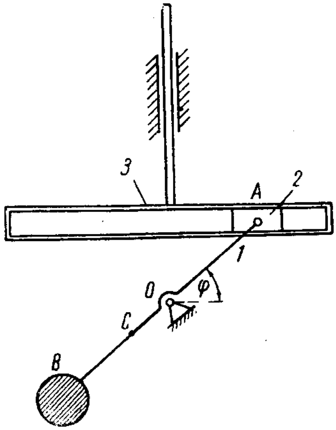
В составлении третьей части («Динамика») приняли участие П. Е. Бурцев, В. Д. Дувакин, К. Д. Зверева, Н. Ф. Ключко, Ф. М. Куровский, А. М. Пивоваров, В. Н. Разумова, М. Г. Слободянский, А. П. Соколов, А. И. Фрейдензон, Р. С. Шафаревич.

В редактировании и подготовке сборника задач к печати приняли участие В. Д. Дувакин и А. Д. Трифонов.

I. ПРИНЦИП ВОЗМОЖНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

1. В кулисном механизме кулиса *3* весит Q *кг*. Кривошип *1* вместе с противовесом B весит P *кг*.

На каком расстоянии от оси O должен находиться центр тяжести C кривошипа и противовеса, чтобы в любом положении механизм находился в равновесии? $OA=a$.

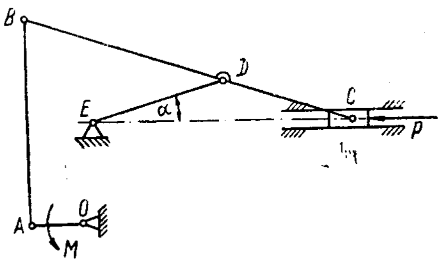


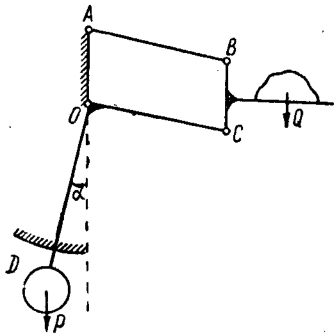
Ответ: $OC=\frac{Q}{P}a$.

2. К кривошипу OA шарнирно-стержневого пресса приложена пара с моментом $M=10$ *кгм*.

Определить горизонтальное усилие P прессования, приложенное к поршню пресса, если $OA=r=0{,}1$ *м*, $CD=DE=l=0{,}3$ *м*, $BD=a=0{,}5$ *м*, кривошип расположен горизонтально, $\angle OAB=90°$, $\angle DEC=\alpha=15°$.

Ответ: $M\frac{a+l}{2rl\operatorname{tg}\alpha}=497{,}6$ *кг*.





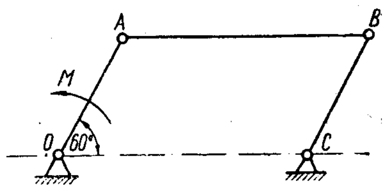
3. Груз Q, лежащий на горизонтальной чашке весов, прикрепленной к вертикальному стержню BC, уравновешивается гирей P. Система состоит из стержней AB, BC и изогнутого рычага DOC, могущего вращаться вокруг точки O.

Дано: $AB=OC=b$; $OA=BC$; $\angle DOC=90°$; $OD=a$.

Найти вес груза Q, если угол между OD и вертикалью равен α.

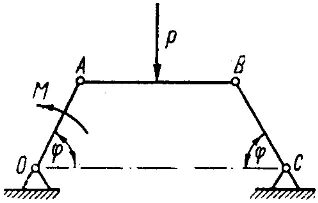
Ответ: $Q=P\dfrac{a}{b}\operatorname{tg}\alpha$.

4. В шарнирном параллелограмме $OABC$, расположенном в вертикальной плоскости, длина кривошипа $OA=20$ *см*. Шатун AB весит 4 *кг*.



Пренебрегая весами кривошипов, найти величину момента M, приложенного к кривошипу OA, при условии, что механизм находится в положении равновесия в указанном на чертеже положении.

Ответ: $M=0{,}4$ *кгм*.

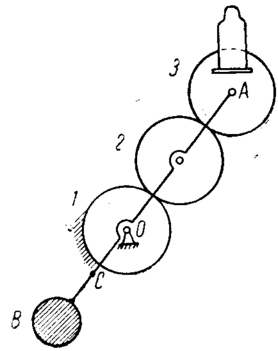


5. В шарнирном четырехзвеннике $OABC$ $OA=BC$. В середине шатуна AB приложена сила P.

Пренебрегая весами стержней, найти величину момента M при условии, что механизм в указанном на чертеже положении находится в равновесии. $\angle AOC=\angle BCO$.

Ответ: $M=0$.

6. В планетарном механизме, изображенном на чертеже, радиусы всех трех колес равны между собой. На колесо *3* поставлена гиря весом P *кг*. Общий вес кривошипа, подвижных колес и противовеса B равен Q.



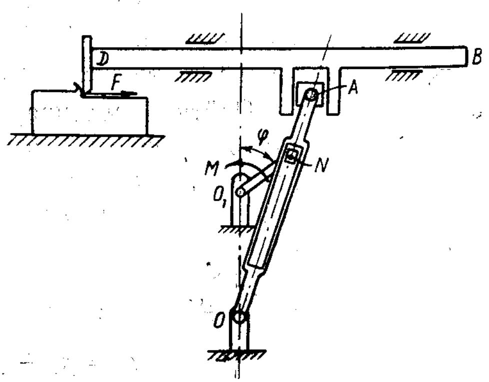
На каком расстоянии OC должен находиться центр тяжести, чтобы при постановке на колесо *3* гири весом P *кг* механизм находился бы в положении равновесия? $OA=a$.

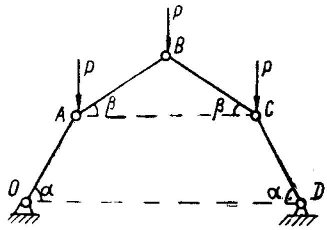
Ответ: $OC = \frac{P}{Q}\, a.$

7. Определить, какой вращающий момент M надо приложить к кривошипу строгального станка, чтобы преодолеть силу сопротивления F, приложенную к резцу, если длина кривошипа $O_1N=a$, длина кулисы $OA=l$, расстояние $OO_1=h$, угол, образуемый кривошипом с вертикальной осью, равен φ, вес кривошипа и кулисы соответственно равен p и q.

Трением при движении долбяка BD и ползушек A и N, а также весом ползушек пренебречь.

Ответ: $M = \frac{a}{2}\left\{p\sin\varphi + [q l a \sin\varphi + 2Fl(h + a\cos\varphi)]\, \frac{a + h\cos\varphi}{(h^2 + 2ah\cos\varphi + a^2)^{3/2}}\right\}.$

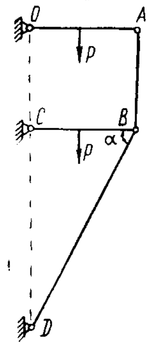




8. В изображенном на чертеже шарнирном многоугольнике $OA=AB=BC=CD=l$.

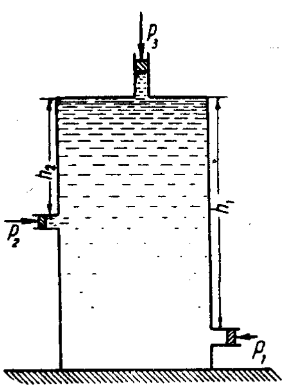
Найти соотношение между углами α и β в положении равновесия. Весами стержней пренебречь.

Ответ: $\operatorname{tg}\alpha = 3 \operatorname{tg}\beta$.



9. Найти усилие в стержне BD, если вес каждого из стержней OA и BC равен P, а стержни AB и BD невесомые. $OA=BC$; $AB=OC$; $\alpha=60°$.

Ответ: $S_{BD}=2P$.



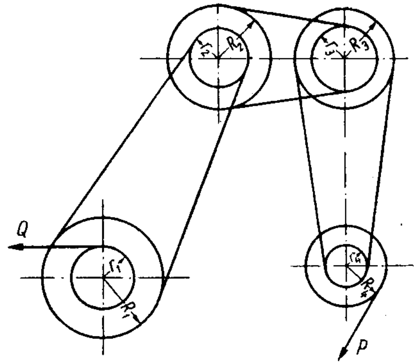
10. В сосуде, как указано на чертеже, находится тяжелая жидкость. В каждом из трех отверстий может перемещаться поршень. Первые два отверстия сделаны в стене сосуда на расстоянии h_1, h_2 от крышки, а третье отверстие сделано в крышке.

Найти давления на первый и второй поршень при равновесии жидкости, если давление на третий поршень P_3, удельный вес жидкости γ.

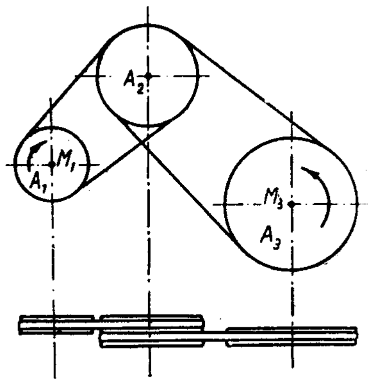
Ответ: $p_1 = p_3 + \gamma h_1$;

$p_2 = p_3 + \gamma h_2$.

11. Определить, какое усилие P надо приложить на шкив радиуса R_4, чтобы при тройной ременной передаче преодолеть сопротивление Q, приложенное к валу радиуса r_1, если каждый из валов наглухо соединен с одним из шкивов. Радиусы шкивов равны R_1, R_2, R_3, R_4 и валов r_1, r_2, r_3, r_4. Шкивы и валы представляют собой однородные диски. Трением на осях, скольжением и массой ремней пренебречь.



Ответ: $P = Q\,\dfrac{r_1}{R_1}\cdot\dfrac{r_2}{R_2}\cdot\dfrac{r_3}{R_3}\cdot\dfrac{r_4}{R_4}$.



12. Однородные шкивы A_1, A_2 и A_3, радиусы которых равны r_1, r_2 и r_3, соединены между собой двумя бесконечными ремнями. Шкив A_2 двойной ширины. К шкиву A_1 приложен вращающий момент M_1.

Какой момент M_3 надо приложить к шкиву A_3, чтобы все они находились в равновесии?

Ответ: $M_3 = M_1\,\dfrac{r_3}{r_1}$.

II. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ

13. Материальная точка массы m *г* движется вдоль оси OX под действием силы $F = \frac{mk}{a^2 + t^2}$ дин, где k и a—постоянные, m—масса. Начальная скорость точки равна v_0.

Найти уравнение движения точки.

Ответ: $x = v_0 t + \frac{k}{a}\, t \operatorname{arctg} \frac{t}{a} - \frac{a}{2} \ln\left(1 + \frac{t^2}{a^2}\right)$.

14. На точку массы m *г* действует сила, проекции которой на оси даны: $F_x = k m t^2$ дин, $F_y = a \sin kt$ дин, $F_z = 0$. Начальные условия: $t = 0$; $x_0 = y_0 = z_0 = 0$; $\dot{x}_0 = c$; $\dot{y}_0 = b$; $\dot{z}_0 = 0$.

Найти уравнения движения точки. Сила тяжести не учитывается.

Ответ:
$$x = ct - \frac{k}{12} t^2;$$
$$y = \left(b + \frac{a}{mk}\right) \cdot t - \frac{a}{mk^2} \sin kt;$$
$$z = 0.$$

15. На тяжелую точку массы m *г* действует горизонтальная сила $F = \frac{mk}{a + t}$ дин, где m—масса точки, a и k—постоянные числа. В начальный момент точка находится в покое в начале координат.

Найти уравнения движения.

Ответ: $x = k(a + t)\left[\ln\left(1 + \frac{t}{a}\right) - 1\right] + ka$;
$$y = \frac{gt^2}{2}.$$

16. **На тяжелую точку веса $P = 2$ *кг* действует горизонтальная сила $F = 4\ \sin 2t$ *кг*, причем t выражено в сек. В начальный момент точка находится в покое в начале координат.**

Найти уравнения движения точки, g считать равным 10 *м/сек²*.

Ответ: $x = 5(2t - \sin 2t)$;

$y = 5t^2$.

17. Сила тяги паровоза при движении из состояния покоя изменяется по закону $Q = (200 + 12t)$ *кг*, где t — время движения в сек.

Определить, через какой промежуток времени скорость паровоза сделается равной 72 *км/час*, если сила сопротивления постоянна и равна 200 *кг*. Вес паровоза 10 *т*, движение предполагается прямолинейным.

Ответ: $t_1 = \frac{100}{3}\sqrt{3} \simeq 57{,}7$ сек.

18. Заряженный шарик веса $P = 200$ *г* подвешен на пружине в переменном электрическом поле и на него действует вертикальная сила, проекция которой на вертикальную ось, направленную вниз, равна $F = 156{,}8\ \sin 14t$ дин.

Статическое удлинение пружины $f_{cm} = 5$ *см*. В начальный момент $t = 0$ шарик находился в покое в положении статического равновесия.

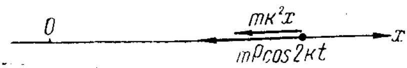
Найти закон колебаний шарика, приняв за начало координат его начальное положение; $g = 980$ *см/сек²*.

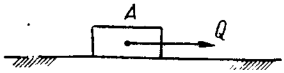
Ответ: $x = 0{,}002\ \sin\ 14t - 0{,}028\ t \cdot \cos 14t$.

19. Частица массы m находится под действием силы, равной mk^2x и направленной к неподвижной точке O, кроме того на частицу действует сила, проекция которой на ось Ox равна $mP \cos 2kt$. В начальный момент точка находилась в покое.

Найти уравнение движения и доказать, что наибольшее отклонение от положения равновесия в одну и в другую сторону от O есть $\frac{3P}{8k^2}$; $\frac{2P}{3k^2}$.

Ответ: $x = \frac{P}{3k^2}(\cos 2kt - \cos kt)$.





20. К ползуну A веса P, лежащему на горизонтальной шероховатой плоскости, приложена горизонтальная движущая сила, изменяющаяся по закону: $Q = \frac{a}{b+x}$ *кг*, где a и b — постоянные, а x — расстояние центра тяжести ползуна от его начального положения.

Считая, что коэффициент трения ползуна о плоскость равен f, определить максимальную скорость ползуна.

Ответ: $v_{макс} = \sqrt{\frac{2ga}{P}\left(\ln\frac{a}{fbP} - 1\right) + 2gfb}$,

$$\frac{a}{b} > fP.$$

21. Материальная точка массы 1 *г* притягивается к неподвижному центру силой, обратно пропорциональной квадрату расстояния; эта сила равна 50 дин при расстоянии, равном 1 *см*.

Найти скорость точки в том положении, когда ее расстояние от неподвижного центра в 10 раз меньше начального. В начальный момент $x_0 = 100$ *см*, $v_0 = 0$. Силой тяжести пренебречь.

Ответ: $v = -3$ *см/сек*.

22. Материальная точка падает без начальной скорости под действием силы притяжения к центру Земли обратно пропорциональной квадрату расстояния от этого центра. В начальный момент точка находится от поверхности Земли на расстоянии, равном радиусу Земли.

Найти отношение скорости точки при достижении ею поверхности Земли к той скорости, которую она имела бы в этот момент, если бы сила притяжения была всюду такова же, как на поверхности Земли.

Ответ: $v_1 = \sqrt{gR}$; $\dfrac{v_1}{\sqrt{2gR}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

23. Точка брошена с поверхности Земли вертикально вверх со скоростью v_0.

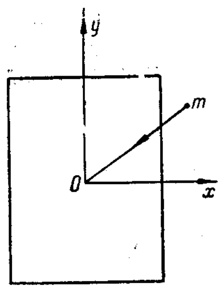
Считая, что сила тяжести обратно пропорциональна квадрату расстояния точки от центра Земли, и пренебрегая сопротивлением воздуха, найти: 1) скорость точки, как функцию ее расстояния от центра земли; 2) максимальную высоту, на которую точка поднимается. Радиус земли R.

Ответ: $$v = \sqrt{v_0^2 - 2gR\left(1 - \frac{R}{x}\right)};$$
$$h_{макс} = \frac{v_0^2 R}{2gR - v_0^2}.$$

24. Две точки A и B одинаковой массы движутся под воздействием силы взаимного притяжения обратно пропорционально квадрату расстояния между ними. Множитель пропорциональности равен k. В начальный момент расстояние между точками равно a: $v_A = 0$; $v_B = v_0$ и направлено по прямой AB.

Найти, в какой момент времени расстояние между точками равно $\dfrac{a}{2}$.

Ответ: $$t_1 = \frac{2}{\left(v_0 - \frac{2k}{ma}\right)^2}\left[\left(v_0 - \frac{2k}{ma}\right)^2 (x_2 - x_1) + \right.$$
$$\left. + \frac{2}{m}\right]^{3/2} - \frac{\frac{4}{m}}{\left(v_0 - \frac{2k}{ma}\right)^2}\sqrt{\left(v_0 - \frac{2k}{ma}\right)^2 (x_2 - x_1) + \frac{2}{m}}.$$



25. Каждая из четырех вершин прямоугольника притягивает точку массы m с силой пропорциональной расстоянию (k^2m — коэффициент пропорциональности).

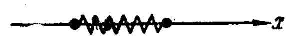
1. Найти траекторию точки при произвольном начальном положении ее в плоскости прямоугольника и при начальной скорости равной нулю.

2. При каком значении k^2 точка будет двигаться по окружности, если в начальный момент она расположена на одной из осей симметрии прямоугольника, а ее начальная скорость перпендикулярна к этой оси?

Ответ: 1. $\frac{x}{x_0}=\frac{y}{y_0}$, **если начало координат находится в точке пересечения диагоналей прямоугольника, а оси** Ox **и** Oy **параллельны его сторонам.**

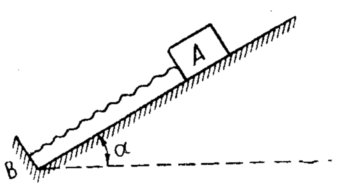
2. $k=\frac{\dot{x}_0}{2y_0}$, $\quad k=\frac{\dot{y}_0}{2x_0}$.

26. Два шарика массы m_1 и m_2 связаны пружиной, натуральная длина которой l; предполагая, что шарики расположены в горизонтальной плоскости и считая, что $m_1=m_2=m$, а жесткость пружины равна c, определить закон движения шариков, если при $t=0$, $v_A=v_B=0$ и начальное удлинение пружины равно a.



Ответ: $x_A=\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\cos\sqrt{\frac{2c}{m}}\cdot t$;

$$x_B=l+\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\cos\sqrt{\frac{2c}{m}}\cdot t.$$



27. Тело A весом P *кг* соединено с неподвижной точкой B пружиной, ось которой параллельна наклонной плоскости. Угол наклона плоскости с горизонтом $\alpha=30°$. Длина нерастянутой пружины $l=$ $=60$ *см*; сила, необходимая для изменения ее длины на 1 *см*, равна 0,2 *кг*.

Пружину сжимают до длины $l_0=20$ *см* и отпускают без начальной скорости. Когда пружина достигает своей натуральной длины, требуется определить:

1. Чему должен равняться вес P, чтобы скорость тела была равна нулю?

2. Какую скорость будет иметь тело, если вес его $P=3$ *кг*?

Ответ: $P=8$ *кг*,

$$v=10\sqrt{654}\ \text{см/сек} \simeq 2{,}56\ \text{м/сек}.$$

28. Пружина, ось которой параллельна наклонной плоскости, прикреплена одним концом в неподвижной точке B, а другим концом соединена с телом A весом P. Длина нерастянутой пружины $l=60$ *см*; коэффициент ее жесткости $c=1$ *кг/см*. Коэффициент трения $k=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

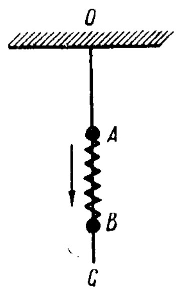
Угол наклона плоскости с горизонтом $\alpha=30°$. Пружину сжимают до длины $l_0=20$ *см* и отпускают тело без начальной скорости.

Определить: 1. Какое максимальное перемещение совершит тело вверх по наклонной плоскости, если положить $P=10$ *кг*?

2. Чему должно равняться P, чтобы максимальная длина вытянутой пружины была бы в $1^1/_2$ раза больше натуральной длины пружины?

Ответ: $S=60$ *см*, $P=5$ *кг*.

29. Ползун A массы m_1 и ползун B массы m_2 надеты на идеально-гладкий вертикальный стержень OC и соединены пружиной. Свободная длина пружины равна l, ее жесткость равна c. Размерами ползунов и массой пружины пренебречь. Первоначально ползун A был прикреплен к потолку, ползун B висел неподвижно. Затем ползун A освобожден и ползуны с пружиной падают.



1. Выразить в функции времени удлинение движущейся пружины: $z=AB-l$.

2. Найти массу m^* груза, частота колебаний которого, если его подвесить на той же пружине, один конец которой прикреплен к потолку, будет такова же, как час-

тота колебаний груза B относительно точки A в данной задаче.

Ответ: 1. $z=\frac{m_2 g}{c}\cos\left(\sqrt{\frac{(m_1+m_2)c}{m_1\cdot m_2}}\cdot t\right).$

2. $\frac{1}{m^*}=\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2};$

при $m_1=m_2=m;\quad m^*=\frac{m}{2}.$

30. Лодке сообщена начальная скорость v_0. При своем движении лодка испытывает сопротивление воды, величина которого пропорциональна скорости лодки, причем коэффициент пропорциональности равен $c=km$, где m—масса лодки.

Через какой промежуток времени T и на каком расстоянии скорость лодки станет вдвое меньше начальной?

Ответ: $T=\frac{1}{k}\ln 2;\quad x_1=\frac{v_0}{2k}.$

31. Поезд, вес которого вместе с электровозом $Q=40$ *т*, движется по прямолинейному горизонтальному пути. Сила тяги электровоза $F=200$ *кг*, сила сопротивления $R=A+Bv=100+2v$ (в *кг*).

Найти, через сколько времени и на каком расстоянии после начала движения поезд приобретает скорость движения 12 *км/час*, $g=10$ *м/сек*^{2}.

Решать задачу в общем виде и в ответ поставить заданные числа.

Ответ: $t_1=\frac{Q}{gB}\ln\frac{F-A}{F-A-Bv_1}=2\cdot 10^3\ln\frac{15}{14}$ сек.

$$x_1=\frac{Q(F-A)}{gB^2}\ln\frac{F-A}{F-A-Bv_1}-\frac{m}{B}\cdot v_1=$$

$$=10^4\left(10\ln\frac{15}{14}-\frac{2}{3}\right)\cong 10^4(0{,}69-0{,}67)\cong 200\ \text{м},$$

здесь $m=\frac{Q}{g}$.

32. Материальная точка веса p брошена в сопротивляющейся среде вертикально вверх со скоростью v_0. Закон сопротивления среды выражается $F=kv$ (k—const, v—скорость).

Определить наибольшую высоту h подъема брошенной точки.

Ответ: $x = \frac{p}{kg}\left(v_0 - \frac{p}{k}\right)\left(1 - e^{-\frac{kg}{p}t} + \frac{p}{k}\,t\right)$.

33. Материальная точка веса P, благодаря толчку, приобрела вертикальную скорость v_0 *см/сек*, направленную вниз. Точка находится в сопротивляющейся среде; закон сопротивления выражается зависимостью $F = kv$ (k—const, v—скорость точки).

Определить закон движения точки.

Ответ: $x = \frac{P}{k}\cdot t - \frac{P}{k^2 g}\,(P - k v_0)\,\left(1 - e^{-\frac{kg}{P}t}\right)$.

34. Тяжелое тело брошено с поверхности земли по вертикали вверх с начальной скоростью v_0 *см/сек*. Сила сопротивления воздуха равна mkv дин, где m — масса тела в граммах, v—скорость, k—коэффициент пропорциональности.

Определить, через какой промежуток времени скорость тела уменьшится в два раза и какое расстояние за это время будет пройдено.

Ответ: $t_1 = \frac{1}{k}\ln\frac{2(g + k v_0)}{2g + k v_0}$,

$$x = \frac{v_0}{2k} + \frac{g}{k^2}\ln\frac{k v_0 + 2g}{2(k v_0 + g)}.$$

35. Тяжелая точка падает без начальной скорости в среде, сопротивление которой пропорционально первой степени скорости.

Определить скорость точки в конце второй секунды после начала движения, если при $v = 1$ *м/сек*, сила сопротивления равна одной десятой веса точки.

Ответ: При $t = 2$ сек.,

$$v = 10(1 - e^{-0{,}2\,g}) \cong 10\,(1 - e^{-2}).$$

36. Материальная точка, которой сообщена начальная скорость v_0 *см/сек*, движется в среде, сопротивление которой пропорционально первой степени скорости. Коэффициент пропорциональности в выражении силы равен k *г/сек*,

Какое расстояние пройдет точка до остановки, если, кроме силы сопротивления, на нее не действуют никакие другие силы. Масса точки m *г*.

Ответ: $x_1 = \frac{m v_0}{k}$.

37. Тяжелое тело падает по вертикали без начальной скорости. Сила сопротивления равна kmv дин, где m—масса тела в *г*, v — скорость в *см/сек*, k — коэффициент пропорциональности.

Найти движение тела.

Ответ: $x = \frac{g}{k} \cdot t - \frac{g}{k^2} (1 - e^{-kt})$.

38. Материальная точка массы m *г*, имея начальную скорость v_0 *см/сек*, движется, находясь под действием только силы сопротивления R; $R = av + bv^2$ дин, где a и b — постоянные числа. Сила тяжести точки не учитывается.

Найти путь, пройденный точкой до остановки.

Найти также закон движения (зависимость между x и t).

Ответ: $x_{макс} = \frac{m}{b} \ln \left(1 + \frac{b}{a} v_0 \right)$;

$$x = \frac{m}{b} \ln \left[1 + \frac{b}{a} v_0 \left(1 - e^{-\frac{a}{m} t} \right) \right].$$

39. По достижении скорым поездом скорости в 90 *км/час* машинист закрыл пар. По прохождении какого пути скорость поезда упадет до 36 *км/час*?

Для расчета сопротивления F (в *кг/т* веса поезда) имеется эмпирическая формула $F = 2{,}5 + 0{,}5v^2$, где v — скорость поезда в *км/час*. Принять $g = 10$ *м/сек*^{2}.

Ответ: $S = 100 \ln \frac{2{,}5 + 0{,}5 \cdot 90^2}{2{,}5 + 0{,}5 \cdot 36^2} \cong \mathbf{182}$ *м*.

40. Точка массы m *г* начинает движение со скоростью v_0 *см/сек* в среде, сила сопротивления которой есть $F = k^2 m v^2$ дин, где m — масса точки.

Через какой промежуток времени T и на каком расстоянии скорость точки станет вдвое меньше начальной?

Силой тяжести пренебречь.

Ответ: $T=\frac{1}{k^2 v_0}$; $x_1=\frac{\ln 2}{k^2}$.

41. Точка массы m *г* падает без начальной скорости по вертикали вниз под действием силы тяжести; сила сопротивления воздуха выражается так: $R=k^2mgv^2$ дин, где k—постоянный коэффициент пропорциональности.

Найти пройденный путь x как функцию времени.

Ответ: $$x=\frac{1}{k^2 g}\ln\frac{e^{kgt}+e^{-kgt}}{2}=\frac{1}{k^2 g}\ln\operatorname{ch}(kgt).$$

42. Шар веса P *г* падает в вязкой жидкости без начальной скорости.

Предполагая, что сопротивление выражается зависимостью $R=kv^2$ дин, где k—данный коэффициент, зависящий от плотности жидкости, v — скорость падения, определить, какую скорость приобретает шар к моменту t.

Ответ: $$v=\sqrt{\frac{pg}{k}}\,\frac{e^{2\sqrt{\frac{kg}{p}}\,t}-1}{e^{2\sqrt{\frac{kg}{p}}\cdot t}+1}=$$
$$=\sqrt{\frac{pg}{k}}\,\frac{e^{\sqrt{\frac{kg}{p}}\cdot t}-e^{-\sqrt{\frac{kg}{p}}\,t}}{e^{\sqrt{\frac{kg}{p}}\,t}+e^{-\sqrt{\frac{kg}{p}}\,t}}=\sqrt{\frac{pg}{k}}\operatorname{th}\sqrt{\frac{kg}{p}}\,t.$$

43. Точка массы m движется прямолинейно в среде, сопротивление которой пропорционально кубу скорости точки. В начальный момент точка имеет скорость v_0 *см/сек*. Сила тяжести точки не учитывается. При скорости, равной единице, сопротивление среды равно k *г*.

Найти закон движения (зависимость между пройденным путем и временем).

Ответ: $$x=\frac{\sqrt{m}}{kv_0}\left(\sqrt{m+2kv_0t}-\sqrt{m}\right).$$

44. Точка мыссы m *г* движется в сопротивляющейся среде. Сила сопротивления $R=av^2+bv^3$ дин. Начальная скорость точки равна v_0 *см/сек*. Силой тяжести пренебрегаем.

Найти зависимость между пройденным путем и скоростью.

Ответ: $x = \frac{m}{b} \ln \frac{a + b v_0}{a + b v}$.

45. Если выстрелить из ружья под углом в 45° с некоторой начальной скоростью v_0, то пуля ударит в землю на расстоянии 3 *км*.

Как велика дальность полета пули при выстрелах под углом в 30° и 60° при той же начальной скорости v_0?

Сопротивлением воздуха пренебрегаем.

Ответ: $x = 1500 \sqrt{3}$ *м* $\cong 2598$ *м* $\cong 2600$ *м*.

46. Максимальная дальность полета пули составляет 1800 *м*.

Найти, какова будет дальность полета пули, если выстрел производится под углом в 30° к горизонту. v_0 считать в обоих случаях одинаковой. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Ответ: $S = 900 \sqrt{3} \cong 1557$ *м*.

47. Самолет летит с постоянной горизонтальной скоростью v_0 *м/сек* на высоте h *м* над землей. С самолета в трубу наблюдают некоторый неподвижный объект M, находящийся на поверхности земли.

Какова должна быть величина угла трубы с вертикалью, чтобы бомба, брошенная в этот момент с самолета без начальной скорости относительно самолета, попала в объект M.

Сопротивлением воздуха пренебречь.

Ответ: $\operatorname{tg} \varphi = v_0 \sqrt{\frac{2}{gh}}$,

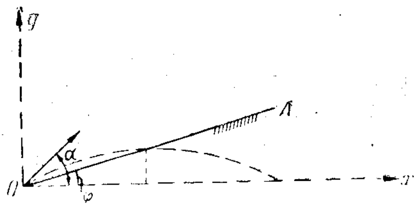
48. Материальная точка брошена в безвоздушном пространстве под некоторым углом α к горизонту так, что наибольшая высота, достигнутая ею, была равна h *м*, а дальность полета была равна S *м*.

Найти ее наибольшую возможную дальность полета при той же начальной скорости.

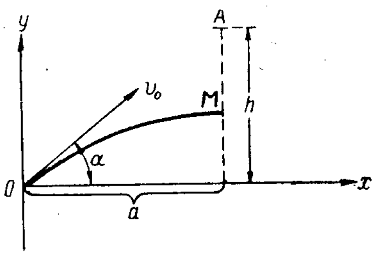
Ответ: $S_{макс} = \frac{16 h^2 + S^2}{8 h}$.

49. Снаряд выброшен орудием со скоростью v_0 под углом α к горизонту.

Найти точку M на наклонной плоскости OA (угол наклона φ), в которую попадает снаряд. Найти также тот угол, при котором расстояние OM будет максимальным.



Ответ: $$OM = \frac{v_0^2}{g\cos\varphi}(\sin 2\alpha - 2\operatorname{tg}\varphi\cos^2\alpha) = \frac{2v_0^2}{g}\,\frac{\sin(\alpha-\varphi)\cos\alpha}{\cos^2\varphi},\qquad OM_{макс} \text{ при } \alpha = \frac{\varphi}{2} + 45^\circ.$$



50. Материальная точка M массы m падает из положения A (с координатами $x=a$, $Y=h$) на землю.

Под каким углом к горизонту должен быть сделан из точки $O(x=0,\ Y=0)$ выстрел, чтобы пуля попала в точку M, если выстрел производится в тот момент, когда точка M начинает падать? Какова должна быть начальная скорость снаряда, чтобы встреча произошла на поверхности земли? Сопротивлением воздуха пренебрегаем.

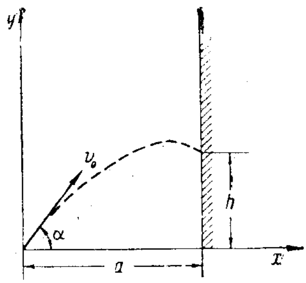
Ответ: $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{h}{a}$.

51. Материальная точка веса P движется по горизонтальной оси Ox из положения $A(OA=a)$ к началу координат O под действием постоянной силы F с начальной скоростью, равной нулю. Из точки O одновременно делается по этой точке выстрел, причем снаряд вылетает с начальной скоростью v_0. Сопротивлением воздуха и трением точки о землю пренебрегаем.

Найти, под каким углом α к горизонту должен быть сделан этот выстрел, чтобы снаряд попал в точку M, когда она пройдет половину своего расстояния от точки O. Какой высоты достигнет при этом снаряд?

Ответ: $\cos\alpha = \frac{1}{2 v_0} \sqrt{\frac{aF}{m}}$,

$$y_{макс} = \frac{1}{2g}\left(v_0^2 - \frac{aF}{4m}\right).$$



52. Под каким углом α к горизонту нужно бросить камень, чтобы при заданной начальной скорости v_0 и расстоянии a до стены h было максимальным? Сопротивлением воздуха пренебречь.

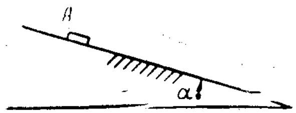
Найти также координаты $x_1 - y_1$ наивысшего положения камня на траектории.

Ответ: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{v_0^2}{g a}$;

$$x_1 = \frac{a v_0^4}{a^2 g^2 + v_0^4};$$

$$y_1 = \frac{v_0^6}{2g(v_0^4 + a^2 g^2)}.$$

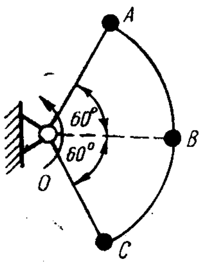
III. ОСНОВЫ КИНЕТОСТАТИКИ



53. Брус скользит с постоянной скоростью по шероховатой плоскости с уклоном 30°.

Каково будет его ускорение на пути с уклоном 60°, предполагая, что сопротивление трения в обоих случаях пропорционально нормальному давлению?

Ответ: $w = \frac{g\sqrt{3}}{3}$.

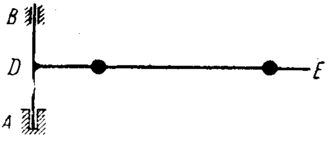


54. Вокруг неподвижной точки O равномерно вращается в своей плоскости круговой сектор, содержащий угол в 120°. На концах и в середине дуги сектора прикреплены грузы A, B, C, масса каждого из них равна m *г*.

Массой сектора пренебречь. Радиус сектора равен r *см*.

Найти реакцию шарнира O, если скорость грузов равна v $\frac{см}{сек}$.

Ответ: $R = 2\frac{mv^2}{r}$.

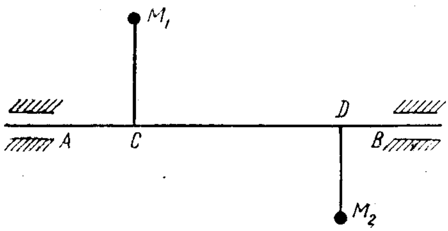


55. На невесомый горизонтальный стержень DE длины l насажены два точечных груза веса P каждый, расположенные от конца стержня D на расстоянии $\frac{1}{4}l$ и l. Стержень с грузами вращается вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью ω.

Определить реакции подпятника A и подшипника B, если $AD=DB=h$.

Ответ: $X_B=\frac{5}{8}Pl\left(\frac{\omega^2}{g}+\frac{1}{h}\right)$; $Y_A=Y_B=0$;

$$X_A=\frac{5}{8}Pl\left(\frac{\omega^2}{g}-\frac{1}{h}\right);\quad Z_A=2P.$$

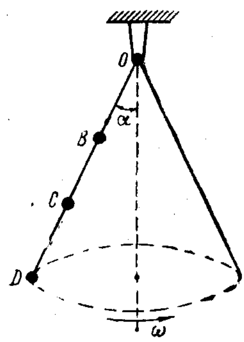


56. Два груза M_1 и M_2, весом 10 *кг* каждый, насажены на кривошипы, лежащие в одной плоскости и вращающиеся вместе с валом AB; $AB=100$ *см*, $AC=30$ *см*, $CD=50$ *см*, $M_1C=30$ *см*, $M_2D=20$ *см*. Угловая скорость вала 600 *об/мин*. Считая грузы материальными точками и пренебрегая весами кривошипов и вала, найти давления на опоры A и B в моменты, когда грузы M_1 и M_2 находятся в вертикальной плоскости.

Ответ: $N_A=-\frac{68000\,\pi^2}{981}+9\cong-671$ *кг*;

$$N_B=\frac{28000\,\pi^2}{981}+11\cong 291 \text{ кг}.$$

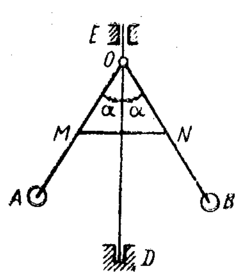
57. Невесомый стержень OD вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг неподвижной точки O (в точке O шаровой шарнир). На стержне закреплены в точках B, C и D три равных груза, массы m каждый, $OB=BC=CD=a$.



Найти угол отклонения стержня α от оси Oz.

Ответ: $\cos\alpha=\frac{3}{7}\frac{g}{\omega^2 a}$.

58. Два невесомых стержня $OA=$ $=OB=l$ прикреплены концами при помощи шарнира O к вертикальной оси DE, а к другим концам A и B присоединены по грузу веса P каждый.



Стержни AO и OB посредине соединены между собой горизонтальной тягой MN, образуя с осью ED углы $\alpha=30°$.

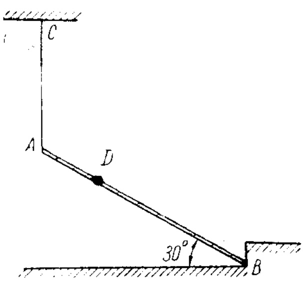
Вся эта система вращается около оси ED с постоянной угловой скоростью ω.

Найти усилие в тяге MN и давление одного из стержней на шарнир O.

Ответ: $S=P\left(\frac{\omega^2 l}{g}-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$;

$X_0=P\left(\frac{\omega^2 l}{2g}-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$;

$Y_0=P$.



59. Лестница AB длиной 5 *м* и весом 40 *кг* подвешена за конец A к веревке AC, а концом B упирается в неподвижный угол. По лестнице из точки B в точку A бежит человек; закон его движения — $S=0{,}4\ t$ *м*, вес $=80$ *кг*.

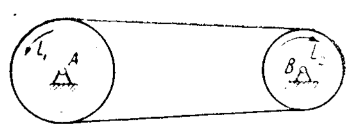
Найти натяжение веревки AC и давление лестницы на угол B в тот момент, когда человек достигает точки D лестницы. $AD={}^1/_3\ AB$.

Ответ: $X_B=\frac{160\sqrt{3}}{49}\simeq 5{,}65$ *кг*,

$Y_B=\frac{3100}{49}\simeq 63{,}3$ *кг*,

$T=60$ *кг*.

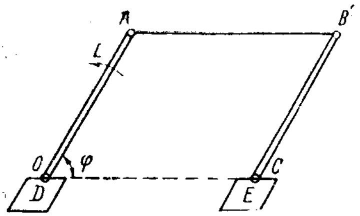
60. Два шкива A и B веса P_1 и P_2, радиусов R_1 и R_2 соединены ремнем. К шкиву A приложен постоянный вращающий момент L_1 *кгм*, а к шкиву B — постоянный момент сопротивления L_2 *кгм*.



Принимая шкивы за однородные диски, найти их угловые ускорения. Массой ремня пренебрегаем.

Ответ: $\varepsilon_1 = \frac{1}{R_1} \frac{2g}{P_1 + P_2} \left(\frac{L_1}{R_1} - \frac{L_2}{R_2}\right)$,

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{R_2} \frac{2g}{P_1 + P_2} \left(\frac{L_1}{R_1} - \frac{L_2}{R_2}\right).$$

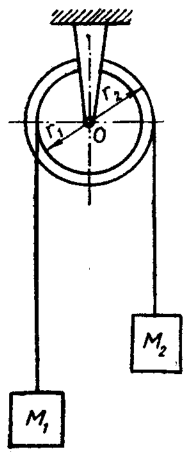


61. К кривошипу OA шарнирного механизма $OABC$, приложен вращающий момент L. Момент инерции кривошипа OA с противовесом D относительно точки O равен I_0, а момент инерции стержня CB с противовесом E относительно точки C равен I_c.

Пренебрегая массой стержня AB и считая, что центры тяжести кривошипа OA и стержня CB совпадают с неподвижными точками O и C, определить угловые ускорения кривошипа и усилие в стержне AB. $OA = CB$, $AB = OC$.

Ответ: $\varepsilon = \frac{L}{I_0 + I_c}$.

62. Два груза M_1 веса P_1 и M_2 веса P_2 подвешены на двух гибких нерастяжимых нитях, которые навернуты, как указано на чертеже, на барабаны радиусов r_1 и r_2, насаженные на общую ось; грузы движутся под влиянием силы тяжести.

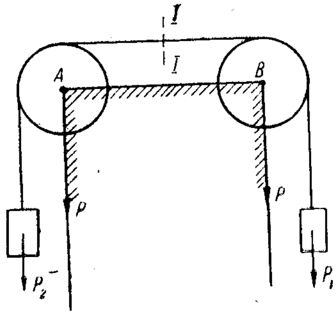


Определить давление барабанов на ось, пренебрегая их массами и массой нитей.

Ответ: $N = P_1 + P_2 - \frac{(P_2 r_2 - P_1 r_1)^2}{P_1 r_1^2 + P_2 r_2^2} =$

$$= \frac{P_1 P_2 (r_1 + r_2)^2}{P_1 r_1^2 + P_2 r_2^2}.$$

63. К нити, перекинутой через блоки A и B одинакового радиуса r, прикреплены грузы P_1 и P_2. Вес каждого блока P.

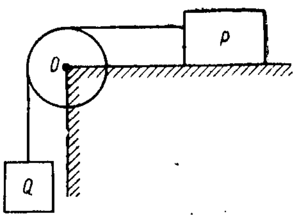


Определить угловые ускорения блоков, если в начальный момент система находилась в покое. Определить также натяжение нити в сечении I.

Ответ: $\varepsilon = \dfrac{(P_2 - P_1)\,g}{(P_1 + P_2 + P)\,r}$,

$$T = \frac{P\,(P_1 + P_2) + 4\,P_1 P_2}{2\,(P_1 + P_2 + P)}.$$

64. Груз P лежит на гладкой горизонтальной плоскости. К нему привязана невесомая горизонтальная веревка, переброшенная через весомый сплошной однородный блок O и несущая на конце груз Q.



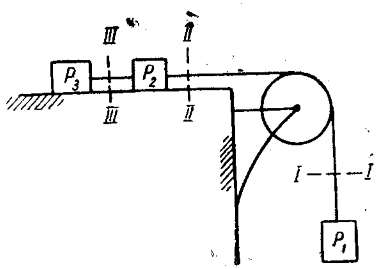
Найти ускорение груза Q. $P=20$ *кг*, $Q=5$ *кг*, вес блока O $G=5$ *кг*; радиус его $r=10$ *см*.

Определить также натяжение нити на горизонтальном участке.

Ответ: $w = g\,\dfrac{Q}{P + Q + \dfrac{G}{2}} = \dfrac{2}{11}\,g \cong 1{,}78\ \dfrac{\text{м}}{\text{сек}^2}$,

$$T = \frac{2PQ}{2\,(P+Q)+G} \cong 3{,}64\ \text{кг}.$$

65. Через невесомый блок переброшена нить с грузами P_1, P_2, P_3. Коэффициент трения между грузами и горизонтальной плоскостью, на которой они лежат, $k=0{,}5$. Нити невесомые, нерастяжимые.

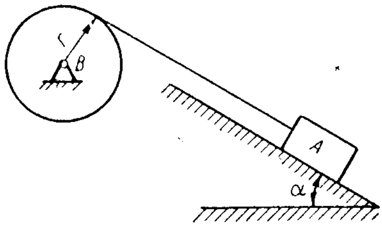


Определить ускорение грузов и натяжение нити в сечениях I, II, III. $P_1=19{,}6$ *кг*; $P_2=P_3=4{,}9$ *кг*.

Ответ: $w=\frac{P_1-k(P_2+P_3)}{P_1+P_2+P_3}g=\frac{g}{2}=4{,}9\ \frac{м}{сек^2}$,

$$T_1=T_2=P_1\left[1-\frac{P_1-k(P_2+P_3)}{P_1+P_2+P_3}\right]=g=9{,}8\ кг,$$

$$T_3=\frac{g}{2}=4{,}9\ кг.$$



66. Груз A веса P приводит в движение вал радиуса r и веса $4\ P$, скользя без трения по наклонной плоскости, образующей с горизонтом угол α.

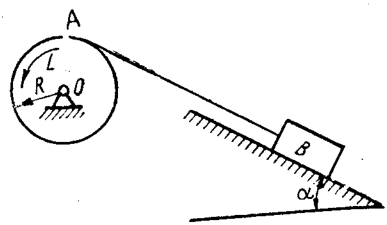
Определить ε вала и натяжение нити, пренебрегая ее массой.

Ответ: $\varepsilon=\frac{g\sin\alpha}{3r}$,

$$T=\frac{2}{3}\ P\sin\alpha.$$

67. Диск A веса P и радиуса R приводится во вращение постоянным моментом L, заставляя посредством нити двигаться груз B веса Q, который может скользить без трения по наклонной плоскости.

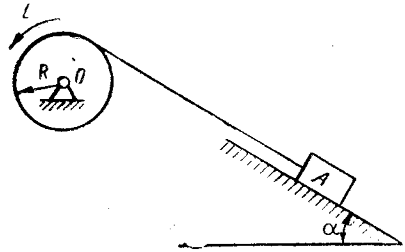
Определить w груза B и натяжение нити S.



Ответ: $w=\frac{L-QR\sin\alpha}{(P+2Q)R}\cdot 2\ g$,

$$S=\frac{Q}{R}\ \frac{PR\sin\alpha+2L}{P+2Q}.$$

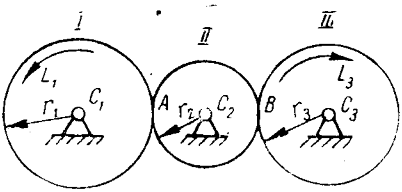
68. На диск радиуса R и веса Q намотана нить, а свободный конец нити прикреплен к грузу A весом P. Диск вращается под действием постоянного момента L и приводит в движение груз A. Коэффициент трения груза A с наклонной плоскостью равен k.



Определить угловое ускорение диска и натяжение нити.

Ответ: $\varepsilon = \dfrac{L - PR(\sin\alpha + k\cos\alpha)}{(Q+2P)R^2}\cdot 2g,$

$$T = \frac{P}{R}\,\frac{2L + QR(\sin\alpha + k\cos\alpha)}{Q+2P}.$$



69. К зубчатому колесу I приложен момент L_1, а к зубчатому колесу III момент сопротивления L_3. Точки C_1, C_2 и C_3 неподвижны.

Определить угловые ускорения зубчатых колес, если их моменты инерции относительно C_1, C_2, C_3 соответственно равны I_1, I_2, I_3. Определить также окружные усилия в точках A и B.

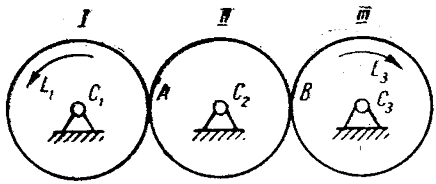
Ответ: $\varepsilon_1 = \dfrac{r_2^2 r_3 (L_1 r_3 - L_3 r_1)}{I_1 r_2^2 r_3^2 + I_2 r_1^2 r_3^2 + I_3 r_1^2 r_2^2};$

$$\varepsilon_2 = \frac{r_1 r_2 r_3 (L_1 r_3 - L_3 r_1)}{I_1 r_2^2 r_3^2 + I_2 r_1^2 r_3^2 + I_3 r_1^2 r_2^2};$$

$$\varepsilon_3 = \frac{r_1 r_2^2 (L_1 r_3 - L_3 r_1)}{I_1 r_2^2 r_3^2 + I_2 r_1^2 r_3^2 + I_3 r_1^2 r_2^2};$$

$$T_A = \frac{L_1 r_1 (I_2 r_3^2 + I_3 r_2^2) + L_3 I_1 r_2^2 r_3}{I_1 r_2^2 r_3^2 + I_2 r_1^2 r_3^2 + I_3 r_1^2 r_2^2};$$

$$T_B = \frac{L_3 r_3 (I_2 r_1^2 + I_1 r_2^2) + L_1 I_3 r_1 r_2^2}{I_1 r_2^2 r_3^2 + I_2 r_1^2 r_3^2 + I_3 r_1^2 r_2^2}.$$



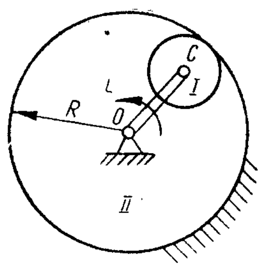
70. К зубчатому колесу I приложен момент L_1, а к зубчатому колесу III — момент сопротивления L_3. Точки C_1, C_2 и C_3 неподвижны.

Определить угловые ускорения зубчатых колес, если масса каждого колеса равна m, а радиус — r. Определить окружные усилия в точках A и B.

Ответ: $\varepsilon = \dfrac{2(L_1 - L_3)}{3mr^2}$;

$$T_A = \frac{2L_1 + L_3}{3r};$$

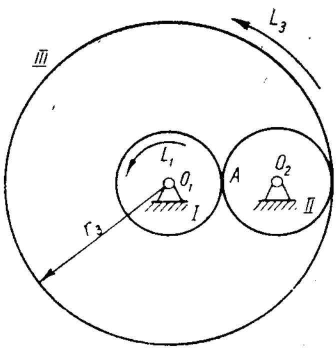
$$T_B = \frac{2L_3 + L_1}{3r}.$$



71. Невесомый кривошип OC, к которому приложен вращающий момент L, приводит в движение зубчатое колесо I радиуса r, катящееся по неподвижному колесу II радиуса R.

Определить угловое ускорение кривошипа, если масса зубчатого колеса I равна M, а момент инерции относительно центра равен I_c; механизм расположен в горизонтальной плоскости.

Ответ: $\varepsilon = \dfrac{Lr^2}{Mr^2 + I_c(R-r)^2}$.

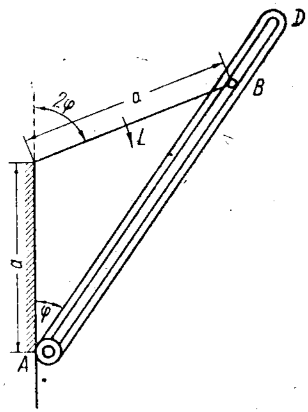


72. К зубчатому колесу радиуса r_3, вращающемуся вокруг неподвижной точки O_1, приложен вращающий момент L_3. К зубчатому колесу радиуса r_1 приложен момент сопротивления L_1.

Определить угловое ускорение колеса I, а также касательное усилие в точке A, если моменты инерции колес относительно неподвижных центров соответственно равны I_1, I_2, I_3. Принять $I_1=I_2$, $r_1=r_2$.

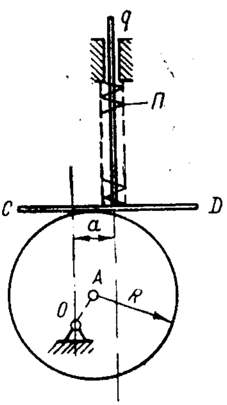
Ответ: $$\varepsilon=\frac{(L_3 r_2-L_1 r_3) r_3}{(I_1+I_2) r_3^2+I_3 r_2^2}=\frac{3 (L_3-3 L_1)}{18 I_1+I_3},$$
$$T=\frac{L_1 (9 I_1+I_3)+3 L_3 I_1}{r_1 (18 I_1+I_3)}.$$

73. Кривошип OB, к которому приложен вращающий момент L, приводит во вращение кулису AD при помощи круглого штифта B, скользящего вдоль кулисы без трения.



Определить угловое ускорение кулисы и давление в точке B, если $OB=OA=a$. Момент инерции кривошипа относительно точки O равен I_0, момент инерции кулисы относительно точки A равен I_A. Механизм находится в горизонтальной плоскости.

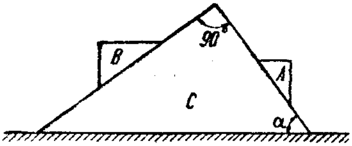
Ответ: $$\varepsilon=\frac{2 L}{4 I_0+I_A}.$$



74. Круглый эксцентрик радиуса R с центром A вращается равномерно с угловой скоростью ω вокруг оси O, перпендикулярной его плоскости и отстоящей от центра A на расстоянии a *см*. Эксцентрик приводит в движение вертикальный стержень, на конце которого имеется жестко с ним связанный плоский горизонтальный толкатель CD, касающийся поверхности эксцентрика. Между толкателем и направляющими помещена пружина $П$, которая в самом нижнем положении толкателя сжата на b *см*. Вес толкателя со стержнем равен P *кГ*.

Определить, какова должна быть жесткость пружины c, чтобы толкатель не покидал поверхности эксцентрика во все время движения.

Ответ: $$c>\frac{P}{b}\left(\frac{a \omega^2}{g}-1\right).$$

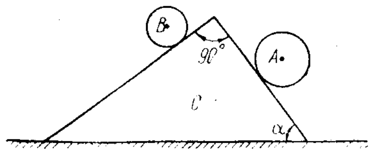


75. На гладкой горизонтальной плоскости лежит призма C, по боковым граням которой скользят две гладкие призмы A и B.

Найти ускорение призмы C, если веса призм A, B и C соответственно равны P_1, P_2, Q.

Ответ: Считая ускорение положительным, когда оно направлено влево, имеем:

$$w = \frac{(P_1 - P_2)\sin 2\alpha}{2(Q + P_1 \sin^2\alpha + P_2 \cos^2\alpha)} \cdot g.$$

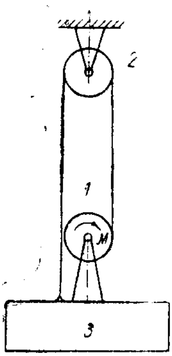


76. На гладкой горизонтальной плоскости лежит призма C, по боковым граням которой катятся без скольжения два однородных круглых цилиндра A и B.

Определить ускорение призмы, если вес цилиндра A равен P_1, цилиндра B—P_2 и призмы C—Q.

Ответ: Считая ускорение положительным, когда оно направлено влево, имеем:

$$w = \frac{(P_1 - P_2)\sin 2\alpha}{3(Q + P_1 + P_2) - 2(P_2 \sin^2\alpha + P_1 \cos^2\alpha)}.$$



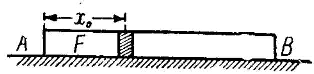
77. Веревка, закрепленная одним концом на барабане I, несколько раз наматывается на него, далее перебрасывается через неподвижный блок 2, а затем прикрепляется в точке A к платформе 3. Барабан и блок однородные цилиндры радиуса r и веса P *кг*. К барабану приложена пара сил, момент которой равен M *кгм*.

Предполагая, что платформа движется поступательно и веревка не проскальзывает по блоку, найти ускорение, с которым будет подниматься платформа, весящая Q *кг*.

Ответ: $w = 2g\dfrac{2M - r(Q+P)}{r(2Q + 7P)}$.

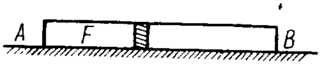
IV. ТЕОРЕМА О ДВИЖЕНИИ ЦЕНТРА МАСС И ТЕОРЕМА О КОЛИЧЕСТВЕ ДВИЖЕНИЯ

78. Однородная гладкая трубка AB длиною l и весом Q лежит на гладкой горизонтальной плоскости. Под действием внутреннего давления газа в трубке перемещается поршень весом P. Конец трубки A закрыт. Начальное положение поршня $x_0 = \frac{l}{4}$.



Определить длину S, на которую передвинется трубка AB, когда поршень дойдет до конца B трубки.

Ответ: $S = \frac{3}{4} \frac{Pl}{P+Q}$.



79. Однородная гладкая трубка AB весом Q лежит на гладкой горизонтальной плоскости.

Под действием постоянного внутреннего давления газа с силой F в трубке перемещается поршень весом P. Конец A трубки закрыт.

Определить: 1) ускорение трубки и 2) ускорение поршня относительно трубки.

Ответ: 1) $w_{AB} = \frac{Fg}{Q}$;

2) $w_{отн} = \frac{Fg}{PQ}(P+Q)$.

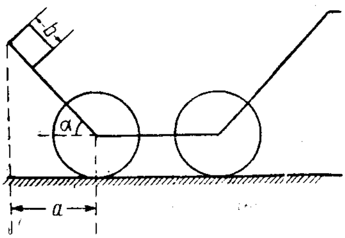
80. Две одинаковые вагонетки, массы M каждая, катились по инерции с одинаковой скоростью v на небольшом расстоянии одна за другой. На задней вагонетке стоял человек массы m. Затем человек перепрыгнул на переднюю вагонетку,

причем горизонтальная составляющая его абсолютной скорости во время прыжка равнялась u.

Чему равна скорость передней вагонетки v_1 и задней вагонетки v_2 после прыжка?

Ответ: $v_1 = \dfrac{Mv + mu}{M + m}$;

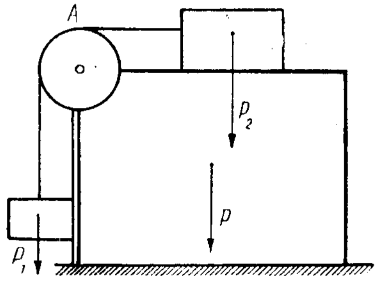
$$v_2 = \frac{(M+m)v - mu}{M + m}.$$



81. На тележку, указанную на чертеже, положен ящик, имеющий форму прямоугольной призмы. Вес ящика равен P, тележки — Q.

Определить длину l, на которую передвинется тележка, когда ящик, спускаясь по ее спинке, дойдет до горизонтальной плоскости тележки, если трение между ящиком и спинкой тележки и между колесами и горизонтальной плоскостью, по которой катится тележка, отсутствует.

Ответ: $l = \dfrac{(b\cos\alpha - a)}{P + Q} \cdot P.$

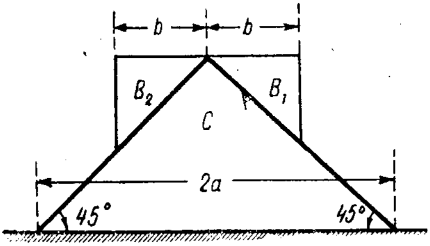


82. К параллелепипеду, весящему P, скользящему по гладкой горизонтальной плоскости, прикреплен блок A, через который переброшена нить с грузами P_1 и P_2. Груз P_2 скользит по гладкой поверхности параллелепипеда.

Найти перемещение параллелепипеда при опускании груза P_1 на высоту h, если в начальный момент система находилась в покое. Массой блока пренебречь. Груз P_1 скользит в направляющих без трения.

Ответ: $x = \dfrac{P_2 h}{P + P_1 + P_2}.$

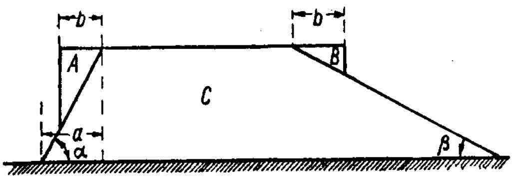
83. Две призмы B_1 и B_2 положены на призму C, которая лежит на горизонтальной плоскости. Поперечные сечения призм—прямоугольные треугольники. Веса призм B_1, B_2 и C соответственно равны: P_1, P_2, Q, причем $P_1 > P_2$.



Определить расстояние S, на которое передвинется призма C, когда призма B_1, спускаясь по призме C, дойдет до горизонтальной плоскости, если плоскость и призмы идеально гладкие.

Ответ: Переместится вправо на величину

$$S = \frac{(a-b)(P_1-P_2)}{Q+P_1-P_2\cos 2\alpha}.$$

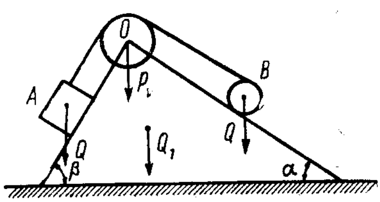


84. Две призмы A и B положены на призму C, лежащую на горизонтальной плоскости. Поперечные сечения призм A и B — прямоугольные треугольники, а призмы C — трапеция. Размеры и углы показаны на чертеже. Веса призм A, B и C соответственно равны: P_1, P_2, Q.

Определить расстояние S, на которое передвинется призма C, когда призма A, спускаясь по призме C, дойдет до горизонтальной плоскости, если эта плоскость и призмы идеально гладкие. Рассмотреть также случаи: 1) $\alpha = \beta$, 2) вместо призм A и B рассмотреть две материальные точки A и B.

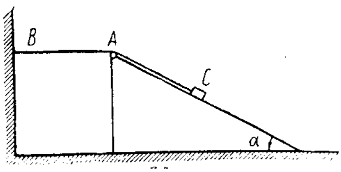
Ответ: $$S = \frac{(a-b)(P_1\sin 2\alpha - P_2\sin 2\beta)}{2\cos\alpha\,[(Q+P_1)\sin\alpha - P_2\sin\beta\cos(\alpha+\beta)]}.$$

85. Определить перемещение призмы веса Q_1 по гладкой горизонтальной плоскости, если центр тяжести диска B передвинется по призме на расстояние S. Считать качение диска по наклонной плоскости



призмы происходящим без скольжения. Конец нити, намотанной на диск B и переброшенной через блок O веса P_1, прикреплен к грузу A веса Q. Углы α и β известны.

Ответ: $x = \dfrac{P\,S\cos\alpha + Q\cdot 2\,S\cos\beta}{P + P_1 + Q + Q_1}$.

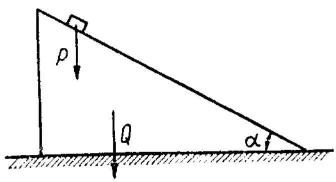


86. Частица массы m движется под действием силы тяжести по гладкой наклонной стороне клина, составляющей угол α с горизонтом. Частица соединена с неподвижной точкой B невесомой нитью, перекинутой через блок A, установленный на верхнем угле клина.

Найти ускорение клина и натяжение веревки, считая, что между клином и горизонтальной плоскостью нет трения. Масса клина равна M.

Ответ: $w = \dfrac{mg\sin\alpha}{M + 2m(1-\cos\alpha)}$;

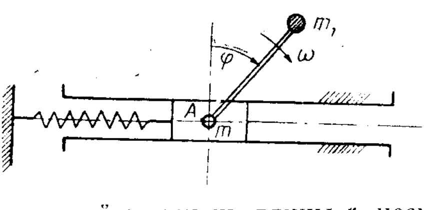
$$T = [M + m(1-\cos\alpha)]\cdot w.$$



87. Треугольная призма веса Q лежит на шероховатой плоскости. Коэффициент трения между горизонтальной плоскостью и призмой равен k, угол при вершине призмы равен α.

При каком значении веса призмы Q она начнет скользить по плоскости, если на гладкой наклонной плоскости призмы положить груз веса P?

Ответ: $Q = P\left(\dfrac{1}{k}\,\dfrac{\sin 2\alpha}{2} - \cos^2\alpha\right)$.



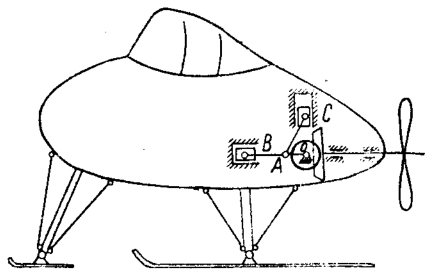
88. Ползун массы m может двигаться в горизонтальных направляющих без трения. Пружина жесткостью c прикреплена одним концом к ползуну, другим — к неподвижной стене. Невесомый стержень длины r, несущий на конце массу m_1, вращается вокруг оси A, расположенной на ползуне перпенди-

кулярно плоскости его движения. Угловая скорость вращения стержня постоянна и равна ω.

Определить вынужденные колебания ползуна, если в начальный момент угол φ равен нулю.

Ответ: $x_{вын} = \dfrac{m_1 r \omega^2}{c - (m + m_1)\omega^2} \sin \omega t.$

89. На аэросанях, стоящих на льду со снятым пропеллером, производится испытание двигателя внутреннего сгорания.

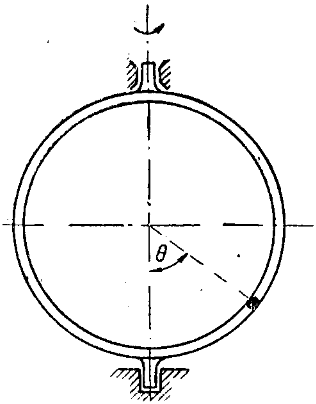


Определить, на какое расстояние передвинутся аэросани, когда кривошип OA перейдет из крайнего левого положения в вертикальное нижнее. Предполагается, что коэффициент трения между полозьями и льдом равен нулю. Длина кривошипа $OA = a$, длины шатунов $AB = AC = l$, вес каждого из ползунов B и C равен P, вес каждого шатуна AB и AC равен P_1, вес кривошипа OA равен Q, вес аэросаней вместе со всеми механизмами кроме двигателя равен Q_1.

Ответ:

$$S = \frac{2P(a + l - \sqrt{l^2 - a^2}) + P_1(3a + l - \sqrt{l^2 - a^2}) + Q \cdot a}{2(2P + 2P_1 + Q + Q_1)}.$$

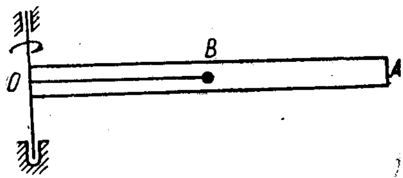
V. ТЕОРЕМА О КИНЕТИЧЕСКОМ МОМЕНТЕ



90. Трубка, согнутая в форме кольца, рассматриваемого как однородная материальная окружность массы M, вращается вокруг своего вертикального диаметра с угловой скоростью ω_0. Находящийся в наинизшей точке кольца шарик массы m в некоторый момент, вследствие полученного толчка, начинает движение по кольцу.

Определить угловую скорость кольца как функцию положения шарика, пренебрегая трением.

Ответ: $\omega = \dfrac{M}{M + 2m\sin^2\theta} \cdot \omega_0.$

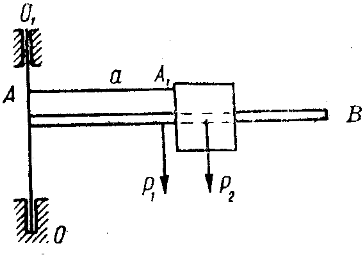


91. Горизонтальная трубка OA весом P_1 *кг* и длиной $2a$ вместе с находящимся в ее середине и привязанным нитью шариком B весом P_2 *кг* сначала вращается по инерции около вертикальной оси O с угловой скоростью ω_0. Затем нить перерезают.

Определить угловую скорость вращения трубки в тот момент, когда шарик вылетает из нее. Трубку рассматривать, как однородный стержень.

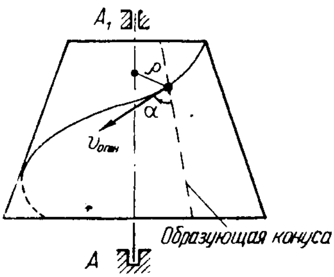
Ответ: $\omega = \dfrac{4P_1 + 3P_2}{4P_1 + 12P_2}\ \omega_0.$

92. Стержень AB вместе с грузом P_2, прикрепленным к стержню при помощи нити AA_1, вращается вокруг вертикальной оси OO_1 с угловой скоростью ω_0. В некоторый момент нить пережигается.



Определить угловую скорость стержня AB как функцию расстояния груза от оси вращения r. Длина нити $AA_1=a$. Вес стержня P_1, момент инерции относительно оси OO_1 равен I_z.

Ответ: $\omega=\dfrac{I_z \cdot g+P_1 a^2}{I_z g+P_1 r^2}\ \omega_0$.



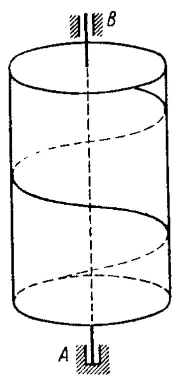
93. Усеченный конус вращается вокруг вертикальной оси AA_1. Вдоль канавки на поверхности конуса движется шарик веса P с относительной скоростью $v_{отн}$. Угол между касательной к винтовой линии канавки и образующей конуса $\alpha =$ пост.

Найти угловую скорость конуса как функцию расстояния ρ от шарика до оси, если в начальный момент система была в покое.

Момент инерции конуса относительно оси равен I.

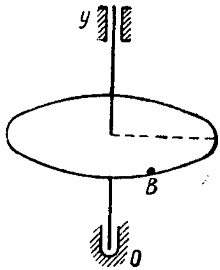
Ответ: $\omega=\dfrac{P \cdot \rho \cdot v_{отн} \cdot \sin\alpha}{I g+P \rho^2}$.

94. Цилиндр радиуса R и весом P может вращаться вокруг вертикальной оси. По желобу, проложенному по винтовой линии, движется точка веса Q со скоростью $v_{отн}=v$.



Найти, с какой скоростью будет вращаться цилиндр вокруг оси. Масса цилиндра равномерно распределена по объему цилиндра. Шаг винта h. В начальный момент точка и цилиндр находились в покое.

Ответ: $\omega=\dfrac{4\pi Q v}{(P+2Q)\sqrt{h^2+4\pi^2 r^2}}$.



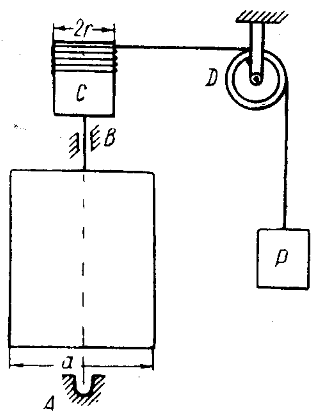
95. Однородный горизонтальный диск радиуса r и веса P_1 *кг* может вращаться около вертикальной оси Oy. По краю диска идет человек весом P_2 *кг*, причем движение совершается по закону $AB=S={}^1/_2\, at^2$. В начальный момент диск находится в покое.

Найти угловую скорость ω и угловое ускорение ε диска, рассматривая человека как материальную точку.

Ответ: $\omega=\dfrac{2P_2a}{(P_1+2P_2)r}\,t,$

$$\varepsilon=\frac{2P_2a}{(P_1+2P_2)r}.$$

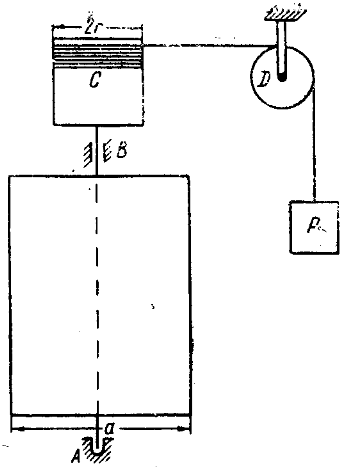
96. На вертикальную ось насажены однородная тонкая пластинка веса Q и шкив C. На шкив намотана нить, которая, сходя с него по горизонтальному направлению, охватывает далее блок D и несет на конце своем груз P. На пластинку действует пара в плоскости, перпендикулярной оси вращения с постоянным моментом L.



Определить угловое ускорение пластинки, если момент пары недостаточен для уравновешивания груза и последний опускается. Массами блока, шкива и нити, сопротивлением трения пренебречь.

Ответ: $\varepsilon=g\,\dfrac{Pr-L}{Q\dfrac{a^2}{12}+Pr^2}.$

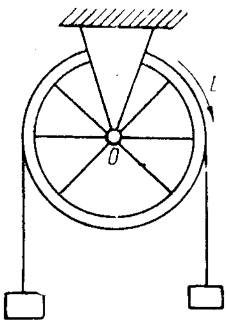
97. На вертикальную ось насажены однородная тонкая пластинка веса Q и шкив C. На шкив намотана нить, которая, сходя с него по горизонтальному направлению, охватывает далее блок D и несет на конце своем груз P. На пластинку действует пара в плоскости, перпендикулярной оси вращения с постоянным моментом L.



Определить угловое ускорение пластинки, если действие пары таково, что груз поднимается. Массами блока, шкива и нити, а также сопротивлениями движению пренебрегаем.

Ответ: $\varepsilon = \dfrac{L - Pr}{\dfrac{Qa^2}{12} + Pr^2} g.$

98. Через неподвижный блок радиусом 0,5 *м* и весом 100 *кг* переброшен канат, к концам которого прикреплены клетки: одна порожняя, весящая 100 *кг*, и другая груженая, весящая 800 *кг*.

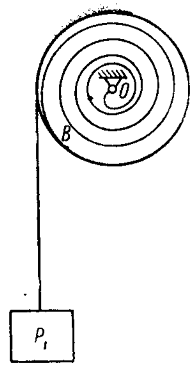


В момент, когда клетки двигались со скоростью, равной 5 *м/сек*, включен мотор, создающий некоторый постоянный тормозящий момент L, в результате чего клетки остановились через 5 сек. после момента включения мотора.

Найти численное значение тормозящего момента.

Масса блока равномерно распределена по его ободу. Весом каната пренебрегаем. Считать $g=10$ *м/сек*^{2}.

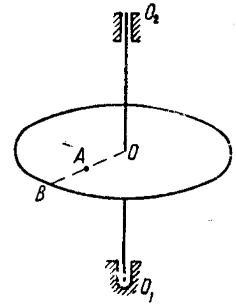
Ответ: $L=400$ *кгм*.



99. Спиральная пружина прикреплена одним концом к неподвижной точке O, а другим концом к боковой поверхности барабана B. На барабане намотана нить, к концу которой прикреплен груз P_1 *кг*, вес барабана — Q *кг*, радиус R *м*, масса равномерно распределена по объему барабана. Жесткость пружины—C *кгм*.

Предполагая, что в начальный момент пружина недеформирована и момент сопротивления пружины пропорционален углу поворота барабана ($M = -c\varphi$), определить ε в тот момент, когда груз опустится на высоту h.

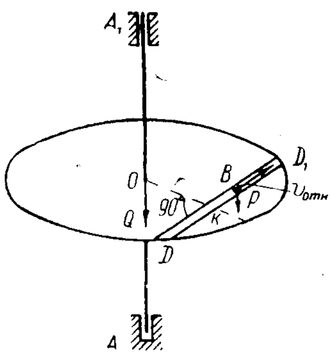
Ответ: $\varepsilon = \frac{2g}{R^3}\,\frac{(PR^2 - ch)}{(Q + 2P)}$.



100. Горизонтальной платформе радиуса r *см* и веса P_1 *кг*, вращающейся около вертикальной оси O_2, сообщается начальная угловая скорость ω_0. Человек A весом P_2 *кг*, находившийся в начальный момент в центре платформы, идет вдоль радиуса OB.

Найти угловую скорость вращения платформы ω как функцию расстояния $OA = x$.

Ответ: $\omega = \frac{P_1 r^2}{P_1 r^2 + 2P_2 x^2}\,\omega_0$.

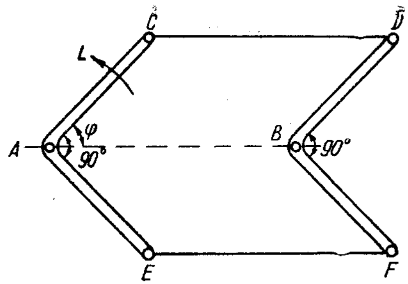


101. Горизонтальный диск веса Q и радиуса R вращается вокруг вертикальной оси AA_1, проходящей через его центр. По канавке движется шарик B веса P с относительной скоростью $v_{отн}$.

Найти угловую скорость платформы как функцию расстояния x от точки B до точки k середины канавки DD_1, если в начальный момент система находилась в покое. $OK = r$.

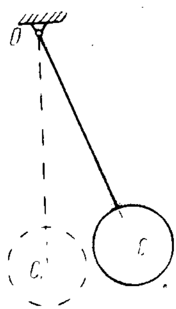
Ответ: $\omega = \frac{2Prv_{отн}}{QR^2 + 2P(r^2 + x^2)}$.

102. К изогнутому стержню CAE, вращающемуся вокруг неподвижной точки A, приложен вращающий момент L. Изогнутый стержень DBF вращается вокруг неподвижной точки B и соединен со стержнем CAE при помощи невесомых стержней CD и EF.



Определить угловые ускорения стержней, если их моменты инерции относительно A и B соответственно равны I_A и I_B и механизм находится в горизонтальной плоскости. $AB=CD=EF$; $AC=BD=AE=BF$.

Ответ: $\varepsilon = \dfrac{L}{I_A + I_B}$.

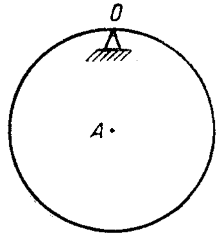


103. Однородный шар, диаметр которого равен 10 *см*, подвешен при помощи тонкой нити длиной 1 *м*.

Найти длину эквивалентного математического маятника.

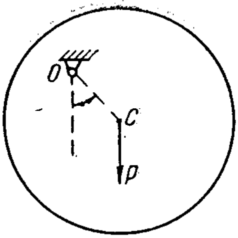
Ответ: $l=105{,}1$ *см*.

104. Колесо внутренней поверхностью своего обода опирается на поперечное горизонтальное лезвие, расстояние которого от центра равно 0,09 *м*. Найдено, что период малых колебаний колеса около лезвия ножа равен 2 сек.



Найти радиус инерции колеса относительно центра (принять $g=\pi^2$ *м сек*^{2}).

Ответ: $\rho=0{,}28$ *м*.



105. Круглый диск, вес которого P *кг* и радиус R *см,* насажен эксцентрично на горизонтальную ось, вокруг которой совершает малые колебания в вертикальной плоскости с периодом колебания T.

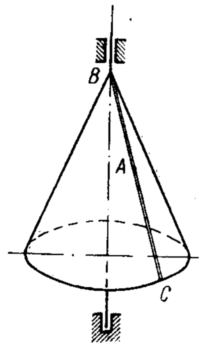
Найти расстояние центра инерции диска C от оси привеса O.

Ответ: $OC = \frac{T^2 g}{8\pi^2} \pm \sqrt{\frac{T^4 g^2}{64\pi^4} - \frac{R^2}{2}}$.

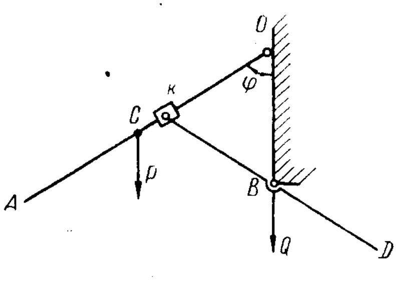
106. Шарик A массы m движется из вершины однородного сплошного кругового конуса без начальной скорости по желобу, направленному по образующей конуса, имеющего массу M в 10 раз большую массы шарика.

В начальный момент движения шарика угловая скорость конуса равна ω_0.

Определить угловую скорость конуса в момент, когда шарик достигнет его основания. Конус вращается вокруг своей оси без трения.



Ответ: $\omega = \frac{0{,}3M}{0{,}3M + m}\,\omega_0 = \frac{3}{4}\,\omega_0$.



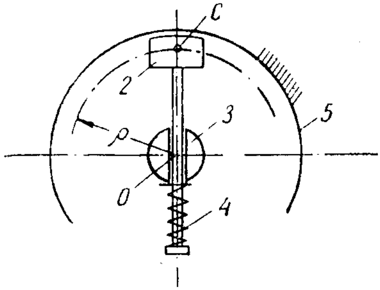
107. Кривошипно-кулисный механизм расположен в вертикальной плоскости. Вес кулисы OA равен P и приложен в точке C ($OC=a$). Вес кривошипа KD равен Q и приложен в точке B; $KB=BD=l$, $OB=l$. Момент инерции кривошипа относительно точки B равен I_B. Момент инерции кулисы относительно точки O равен I_0.

Найти силу давления ползуна K на кулису и угловое ускорение кулисы как функцию угла φ.

Ответ: $N = \dfrac{2 I_B P a}{l (I_0 + 4 I_B)} \cdot \operatorname{tg} \varphi;$

$$\varepsilon = \frac{Pa \sin \varphi}{I_0 + 4 I_B}.$$

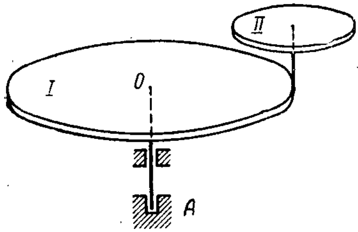
108. Регулятор скорости радиального действия с трением скольжения состоит из стержня, проходящего сквозь вращающуюся муфту 3. Стержень вместе с муфтой вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через точку O, перпендикулярно плоскости чертежа. На одном конце стержня имеется инерционная масса 2, могущая прижиматься к внутренней поверхности неподвижного барабана 5. К другому концу стержня прикреплена пружина 4, противоположный конец которой упирается в муфту 3.



Определить скорость центра тяжести инерционной массы и ее предельное значение при $t \to \infty$ при следующих данных: величина инерционной массы m, коэффициент трения о барабан f, начальная скорость центра тяжести инерционной массы v_0, сила упругости пружины при касании массы о барабан равна Q и ρ — расстояние центра тяжести массы от оси вращения.

Ответ: $v = a \dfrac{(a + v_0)\, e^{\frac{2af}{\rho} \cdot t} - (a - v_0)}{(a + v_0)\, e^{\frac{2af}{\rho} \cdot t} + (a - v_0)};$

$$v_\infty = a = \sqrt{\frac{Q\rho}{m}}; \quad v_0 > a.$$



109. Площадка I, имеющая форму сплошного однородного диска радиуса R и веса P, может вращаться без трения вокруг вертикальной оси AO.

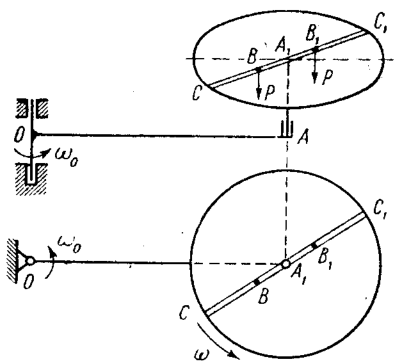
На краю этой площадки на вертикальной оси, заклиненной неподвижно на площадке, помещен сплошной однородный диск II радиуса r и веса Q, могущий вращаться вокруг своей оси без трения.

Вначале и площадка и диск были неподвижны. Затем имеющаяся при диске пружина приводит его во вращение вокруг оси.

По истечении некоторого промежутка времени угловая скорость диска относительно площадки I достигает численного значения равного ω_2.

Какова будет в этот момент угловая скорость площадки?

Ответ: $\omega_1 = -\dfrac{Q r^2}{(P+2Q) R^2 + Q r^2}\,\omega_2.$



110. Стержень OA вращается вокруг вертикальной оси с угловой скоростью ω_0. Вокруг оси AA_1 вращается с угловой скоростью ω_0' горизонтальная платформа веса Q и радиуса r.

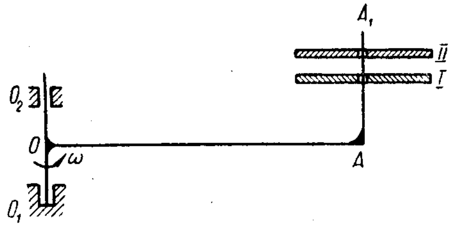
Вдоль канавки CC_1, проходящей через центр платформы, движутся шарики веса P со скоростью $v_{отн}$ в противоположные стороны.

Найти угловую скорость платформы ω' и угловую скорость ω стержня OA как функцию расстояния $A_1B = A_1B_1 = x$, если в начальный момент времени шарики находились в центре платформы.

Ответ: $\omega = \omega_0,$

$$\omega' = \frac{Q r^2 \omega_0'}{Q r^2 + 4 P x^2}.$$

111. Стержень OA вращается вокруг вертикальной оси OO_1 с угловой скоростью ω_0. Вокруг вертикальной оси AA_1 вращаются с угловыми скоростями ω_1 и ω_2 две кулачковые муфты веса P_1 и P_2 соответственно.

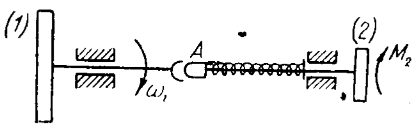


Найти угловую скорость ω' кулачковых муфт I и II в момент их сцепления, а также угловую скорость ω стержня OA в этот момент.

Ответ: $\omega = \omega_0$,

$$\omega' = \frac{P_1\omega_1 + P_2\omega_2}{P_1 + P_2}.$$

112. На чертеже дана упрощенная схема инерционного стартера, служащего для использования кинетической энергии диска 1 для сообщения диску 2, загруженному моментом сопротивления M_2, определенной угловой скорости. Вначале диск 2 находится в покое, а диск 1 имеет угловую скорость, равную $\omega_0\ \frac{1}{сек}$.

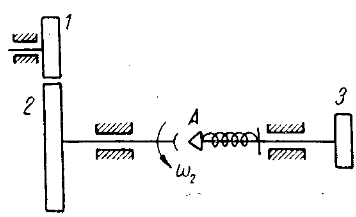


Пренебрегая трением в подшипниках, найти максимальную угловую скорость диска 2 ($\omega_{2\,макс}$) после включения муфты A. Моменты инерции дисков I_1 и I_2, момент сопротивления M_2 и момент трения в муфте A, равный M, известны.

Ответ: $\omega_{2\,макс} = \dfrac{(k-1)I_1}{(k-1)I_1 + kI_2}\,\omega_0$;

где $k = \dfrac{M_2}{M}$.

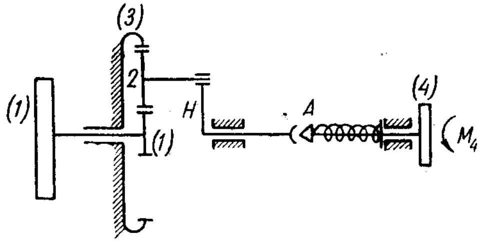
113. Показанный на чертеже механизм состоит из зубчатых колес 1 и 2, муфты трения A и диска 3. Вначале диск 3 находился в покое, а колесо 2 имело угловую скорость, равную $\omega_0\ \frac{1}{сек}$.



Пренебрегая трением в подшипниках, найти угловую скорость диска 3 (ω_3) после включения муфты A. Моменты инерции I_1, I_2, I_3 и радиусы колес r_1 и r_2 известны.

Ответ: $\omega_3 = \dfrac{I_1 r_2^2 + I_2 r_1^2}{I_1 r_2^2 + (I_2 + I_3) r_1^2} \omega_0.$

114. На чертеже дана схема инерционного стартера. Назначение данного механизма состоит в том, что кинетическая энергия маховика 1 используется для разгона диска 4, загруженного моментом сопротивления M_4. Между маховиком и диском 4 находится планетарный редуктор, состоящий из колес 1, 2, 3 и муфты трения A.



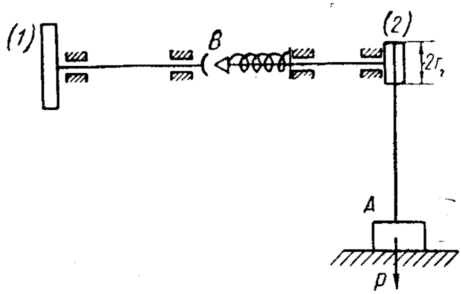
Вначале диск 4 находится в покое, а маховик и жестко с ним связанное колесо 1 вращаются с угловой скоростью, равной ω_0. После включения муфты A диск 4 начинает разгоняться.

Пренебрегая трением в подшипниках и массой колеса 2 и рычага H, найти максимальную угловую скорость диска $4 - \omega_{4\,макс}$, если известны числа зубцов z_1 и z_2; моменты инерции маховика и диска 4 соответственно равны I_1 и I_4. Момент сопротивления M_4 и момент трения в муфте M известны.

Ответ: $\omega_{4\,макс} = \dfrac{2 I_1 \cdot z_1 (z_1 + z_2) \omega_0}{4 I_1 (z_1 + z_2)^2 + \dfrac{k}{k-1} I_4 \cdot z_1^2};$

где $k = \dfrac{M}{M_4}$; $(k > 1)$.

115. Механизм, показанный на чертеже, служит для использования кинетической энергии маховика *1* при подъеме груза *A* при помощи веревки, намотанной на барабан *2*, и муфты трения *B*. Вначале барабан находится в покое, а маховик вращается с угловой скоростью, равной ω_0. После включения муфты кинетическая энергия маховика будет преобразовываться в кинетическую энергию барабана и груза *A*, в работу трения в муфте и на подъем груза.

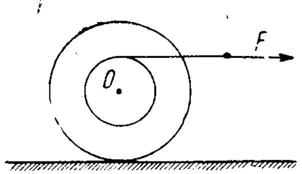


Пренебрегая трением в подшипниках, найти максимальную угловую скорость барабана $\omega_{2\,макс}$. Моменты инерции маховика и барабана I_1 и I_2, радиус барабана r_2, вес груза *A* равен *P* и момент трения в муфте *M* известны. $(M > p\,r_2)$.

Ответ: $$\omega_{2\,макс} = \frac{I_1(k-1)\cdot\omega_0}{I_1(k-1) + \left(I_2 + \frac{P}{g}r_2^2\right)};$$

где $$k = \frac{M}{P r_2}.$$

VI. ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ



116. Каток весом P *кг* и радиусом R *м* лежит на идеально гладкой горизонтальной плоскости.

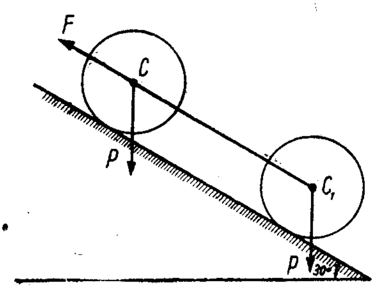
На барабан намотана нить, к которой приложена постоянная по величине сила F *кг*, направленная горизонтально. Момент инерции катка относительно его оси равен $I_0 \dfrac{кгм}{сек^2}$.

Найти, при каком размере радиуса r барабана каток будет катиться по горизонтальной плоскости без скольжения, а также найти закон движения оси катка в этот случае.

Ответ: $r = \dfrac{I_0}{RP} \cdot g; \quad x_0 = \dfrac{gF}{P} \dfrac{t^2}{2}$.

117. Два цилиндра одинакового веса P и радиуса r, соединенных между собой невесомой нитью CC_1, катятся по наклонной плоскости без скольжения под действием постоянной по величине силы F.

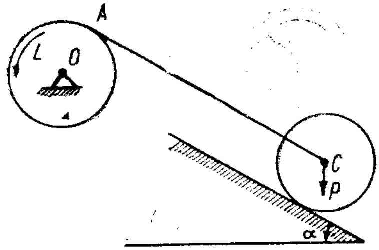
Определить ускорение центра масс цилиндра C и натяжение нити.



Ответ: $T = \dfrac{F}{2}$;

$$w_c = \frac{F - 2P\sin\alpha}{3P} g = \frac{F - P}{3P} g.$$

118. К диску радиуса R *см* и веса Q *кг*, вращающемуся вокруг точки O, приложен момент L. К нити, намотанной на диск, прикреплен центр C второго диска, веса P *кг* и радиуса r *см*, катящегося по наклонной плоскости без скольжения.

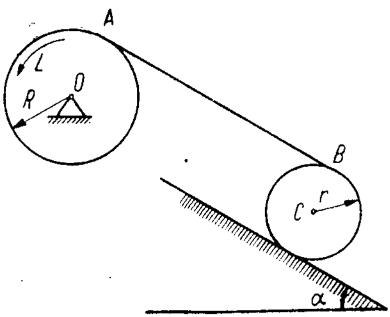


Определить угловые ускорения дисков. Нить CA параллельна наклонной плоскости. Определить также натяжение нити.

Ответ: $$\varepsilon_0 = \frac{L - PR\sin\alpha}{Q + 3P}\,\frac{2g}{R^2};$$

$$\varepsilon_c = \frac{L - PR\sin\alpha}{Q + 3P}\,\frac{2g}{Rr};$$

$$T = \frac{P(3L + QR\sin\alpha)}{R(Q + 3P)}.$$

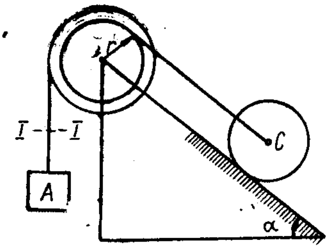


119. Два диска (A весом P и радиуса R и B веса Q и радиуса r) обмотаны нитью, кусок которой AB параллелен наклонной плоскости. Диск A приводится во вращение постоянным моментом L, заставляя двигаться диск B, который катится без скольжения по наклонной плоскости.

Определить w_c диска B и натяжение веревки.

Ответ: $$w_c = \frac{2L - QR\sin\alpha}{(4P + 3Q)R}\cdot 2g,$$

$$T_{AB} = \frac{Q(3L + 2PR\sin\alpha)}{(4P + 3Q)R}.$$



120. Тяжелый однородный цилиндр катится по неподвижной наклонной плоскости без скольжения и приводит в движение при помощи нити ступенчатый блок и груз A, привязанный к нити.

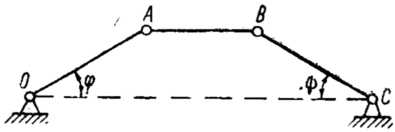
Найти ускорение w_A груза A и ускорение центра цилиндра w_C. Дано: радиус цилиндра r, вес его P, радиусы блоков r, R (массой блоков пренебречь). Вес груза A равен Q. Угол между наклонной плоскостью и горизонтом α. Определить также натяжение нити в сечении I.

Ответ: $$w_C = g\,\frac{2r(Pr\sin\alpha - QR)}{2QR^2 + 3Pr^2};$$

$$w_A = \frac{R}{r}\,w_C;$$

$$T_I = \frac{PQr(3r + 2R\sin\alpha)}{2QR^2 + 3Pr^2}.$$

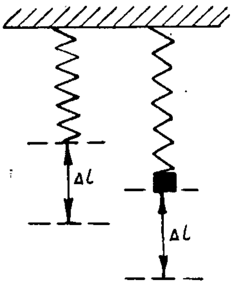
VII. РАБОТА СИЛЫ И ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ



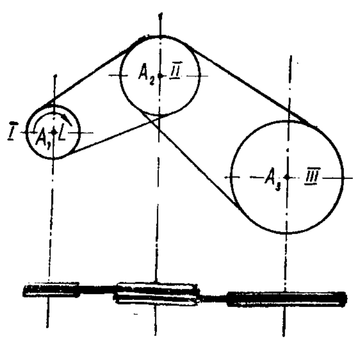
121. Определить кинетическую энергию двухкоромыслового механизма, изображенного на чертеже. $OA=CB=a$, $AB=l$ *м*, $\varphi=\psi=30°$. Вес каждого из стержней OA и BC равен P, вес стержня AB равен Q.

Масса стержней равномерно распределена вдоль стержней. Угловая скорость коромысла OA равна $\omega_0 \ \frac{1}{сек}$.

Ответ: $T=\frac{a^2\omega_0^2}{12g}(4P+3Q)$.



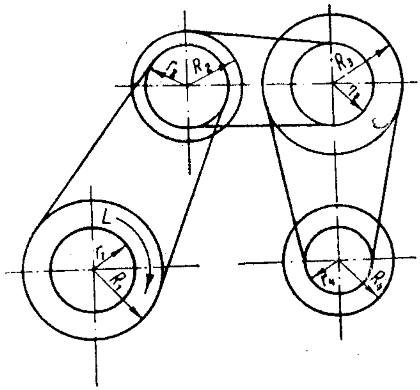
122. Доказать, что для добавочного растяжения пружины, к которой подвешен груз, на заданную длину нужно затратить ту же работу, что и для такого же удлинения той же пружины, свободно висящей.



123. Шкивы *I*, *II* и *III* соединены между собой двумя бесконечными ремнями. Шкив *II* двойной ширины. Под действием вращающегося момента *L*, приложенного к шкиву *I*, все они вращаются вокруг параллельных неподвижных осей.

Пренебрегая трением на осях, скольжением и массой ремней, найти угловое ускорение шкива III, если радиусы шкивов соответственно равны r_1, r_2 и r_3, а их веса P_1, P_2, P_3 (шкивы рассматривать как однородные диски).

Ответ: $\varepsilon_3 = \dfrac{2Lg}{r_1 r_3 (P_1 + P_2 + P_3)}$.



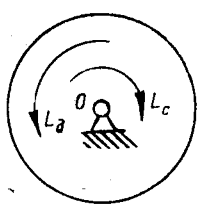
124. К первому шкиву тройной ременной передачи приложен постоянный вращающий момент L, в результате чего вся система вращается вокруг горизонтальных параллельных неподвижных осей.

Определить угловое ускорение четвертого шкива, если радиусы шкивов и наглухо соединенных с ними валов соответственно равны R_1, R_2, R_3, R_4 и r_1, r_2, r_3, r_4 и моменты инерций каждого шкива с наглухо соединенными с ними валами относительно оси вращения равны I_1, I_2, I_3 и I_4 соответственно.

Ответ:

$$\varepsilon_4 = \frac{L}{\frac{r_2}{R_1}\cdot\frac{r_3}{R_2}\cdot\frac{r_4}{R_3} I_1 + \frac{r_3}{R_2}\frac{r_4}{R_3}\frac{R_1}{r_2} I_2 + \frac{r_4}{R_3}\frac{R_1}{r_2}\frac{R_2}{r_3} I_3 + \frac{R_1}{r_2}\frac{R_2}{r_3}\frac{R_3}{r_4} I_4}.$$

125. К маховому колесу радиуса $R=0{,}3$ *м* и веса $P=40$ *кг*, вращающемуся вокруг неподвижной горизонтальной оси O, приложен движущий момент L_∂ и момент сопротивления L_c. Движущий момент изменяется в зависимости от угла φ поворота маховика по закону: $L_\partial = 5\,(1-\cos\varphi)$, а момент сопротивления $L_c = 5$ *кГм* $=$ const.



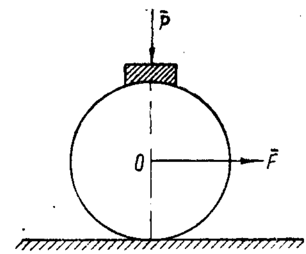
Начальная угловая скорость маховика при $\varphi = 0$ $\omega_0 = 10\,\dfrac{1}{сек}$.

Определить максимальную и минимальную угловую скорость маховика и соответствующие значения угла φ. Маховик принять за однородный цилиндр того же радиуса.

Ответ: $\omega_{макс} = 12{,}4\ \frac{1}{сек}$ при $\varphi = \frac{3}{2}\pi$;

$$\omega_{мин} = 6{,}8\ \frac{1}{сек} \text{ при } \varphi = \frac{\pi}{2}.$$

126. Колесо, рассматриваемое как однородный цилиндр радиуса R и веса Q, катится по прямолинейному рельсу без скольжения под действием постоянной силы F, приложенной к центру колеса. В момент, когда скорость центра колеса была равна U, к тормозной колодке приложили силу P, вследствие чего произошло торможение колеса, а затем и его остановка.



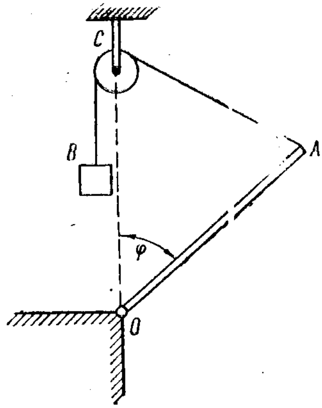
Найти путь S, пройденный центром колеса до остановки (коэффициент трения колеса о колодку равен f).

Ответ: $S = \dfrac{3QU^2}{4g(2Pf - F)}$.

127. Крышка люка, осуществленная в виде однородного, круглого радиуса r, диска, весьма малой толщины, с горизонтальной осью вращения, расположенной по касательной к окружности диска, начинает свое движение из положения неустойчивого равновесия, без начальной скорости.

Определить скорость центра тяжести крышки в момент закрытия люка.

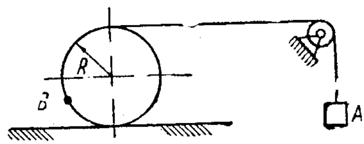
Ответ: $v = 2\sqrt{\dfrac{2gr}{5}}$.



128. Стержень OA длины l и веса Q приводится во вращательное движение вокруг неподвижной оси, проходящей через точку O, из горизонтального положения грузом веса P, который привязан к концу нити B, перекинутой через невесомый блок C.

Найти угловую скорость стержня в функции угла φ.

Ответ: $$\omega^2 = \frac{3g\left(2\sqrt{2}\,P - 4P\sin\frac{\varphi}{2} - Q\cos\varphi\right)}{l\left(Q + 3P\cos^2\frac{\varphi}{2}\right)}.$$



129. Невесомый обруч радиуса R катится без скольжения по горизонтальной прямой линии при помощи невесомой нити, навернутой на его окружность. Нить сходит с обруча в горизонтальном направлении и, огибая невесомый блок, несет на конце груз A веса Q. На окружности обруча закреплена масса B весом P. Движение начинается без начальной скорости в момент, когда масса B находится в самом нижнем положении.

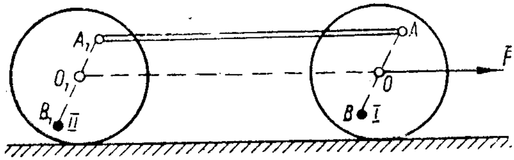
Определить скорость груза A в момент, когда масса B находится в наивысшем положении.

Ответ: $$v_A = 2\sqrt{g\frac{(\pi Q - P)R}{Q + P}}.$$

130. Колеса I и II радиуса R катятся по горизонтальному рельсу без скольжения под действием постоянной горизонтальной силы F, приложенной к центру первого колеса. Колеса соединены между собой стержнем AA_1 веса Q. Вес каждого колеса равен P. К колесам прикреплены противовесы B и C веса $\frac{Q}{2}$ каждый.

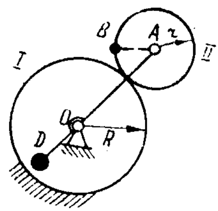
Дано: $O_1A_1 = O_1B_1 = OA = OB = r$; $AA_1 = O_1O$.

Найти ускорение центра колеса O. Колеса считать однородными дисками.



Ответ: $w_0 = \dfrac{F}{3P + 2\left(1 + \dfrac{r^2}{R^2}\right)\cdot Q}\cdot g.$

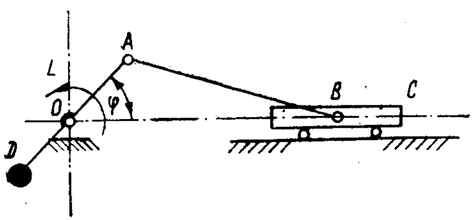
131. К кривошипу OA приложен вращающий постоянный момент L. При вращении кривошипа колесо II радиуса r катится по неподвижному колесу I радиуса $R = 2r$. На окружности колеса II закреплена точечная масса B весом P. В начальном вертикальном положении кривошипа угловая скорость его равна нулю и точка B была в точке касания колес.



Пренебрегая массой колеса II, определить угловую скорость кривошипа при его горизонтальном положении. Механизм расположен в вертикальной плоскости и момент инерции кривошипа относительно оси O равен I. Центр тяжести кривошипа OA с противовесом D совпадает с точкой O.

Ответ: $\omega = \sqrt{\dfrac{\pi L + 4Pr}{I\cdot g + 36Pr^2}}\cdot g.$

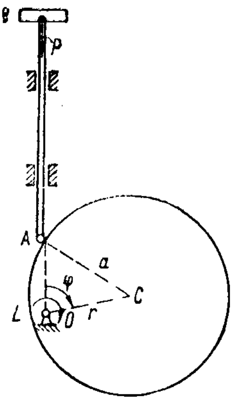
132. Платформа транспортера приводится в движение кривошипно-шатунным механизмом OAB, к кривошипу OA которого приложен постоянный движущий вращающий момент L.



Момент инерции кривошипа относительно оси O равен I, масса платформы m, $OA=r$.

Определить, пренебрегая массой шатуна, угловую скорость кривошипа при $\varphi=\frac{\pi}{2}$ если при $\varphi=0$ угловая скорость его равна нулю. Центр тяжести кривошипа OA с противовесом D совпадает с точкой O.

Ответ: $\omega=\sqrt{\frac{\pi L}{I+mr^2}}$.



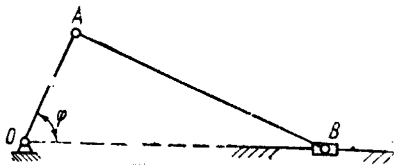
133. Эксцентрик радиуса a вращается вокруг точки O под действием постоянного вращающего момента L и приводит в движение вертикальный шток AB с грузом P на конце.

Найти скорость штока как функцию угла поворота эксцентрика φ, если $OC=r$ и в начальный момент $\angle\varphi=0$.

Ответ:

$$\dot{x}^2=\frac{2g}{P}\left[L\varphi+P(a+r-r\cos\varphi-\right.$$
$$\left.-\sqrt{a^2-r^2\sin^2\varphi})\right].$$

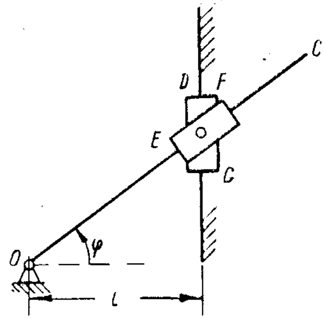
134. Кривошипно-шатунный механизм, расположенный в горизонтальной плоскости, начинает свое движение из состояния покоя, причем при $t=0$, $\angle\varphi=0$.



Предполагая, что на кривошип действует пара с моментом M *кгм*, определить угловую скорость кривошипа в указанном на чертеже положении ($\angle\varphi=60°$, $\angle OAB=90°$). Массы кривошипа и шатуна соответственно равны m_1 и m_2 и распределены равномерно. Масса ползуна m_3. Длина кривошипа l *м*. Трением пренебречь.

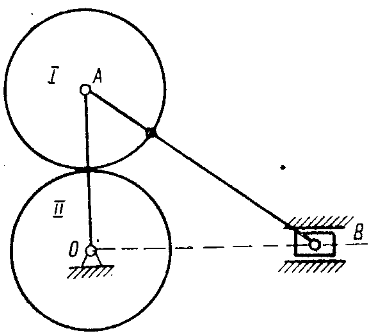
Ответ: $\omega_к=\frac{1}{l}\sqrt{\frac{6M\pi}{3m_1+10m_2+12m_3}}$.

135. На кулису OC тангенсного механизма действует пара с моментом $M = M_0 \cos\varphi + M_1$.



Предполагая, что механизм расположен в горизонтальной плоскости и считая, что момент инерции кулисы OC вокруг точки O равен I, масса каждого из ползунов EF и DG равна m, найти угловую скорость кулисы OC в функции угла φ, если $OB = l$ и в начальный момент (при $t=0$): $\varphi = \varphi_0$ и угловая скорость кулисы равна нулю.

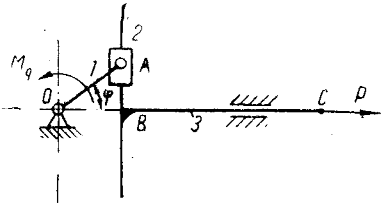
Ответ: $$\omega^2 = \frac{2\left[M_0(\sin\varphi - \sin\varphi_0) + M_1(\varphi - \varphi_0)\right]}{I + \dfrac{2ml^2}{\cos^4\varphi}}.$$



136. На чертеже изображен кривошипно-шатунный механизм OAB. С шатуном AB наглухо скреплена шестеренка I, приводящая в движение шестеренку II. Радиусы шестеренок $r_I = r_{II} = R$. Длина шатуна $AB = l$. На кривошип OA действует пара с моментом M.

Предполагая, что механизм находится в горизонтальной плоскости, а массы шатуна, кривошипа и шестеренок распределены равномерно, определить угловую скорость кривошипа OA в заданном на чертеже положении. В начальный момент OA горизонтально и начальная угловая скорость $\omega_0 = 0$. Вес ползуна равен P, вес шестеренок — Q, шатуна — P_1, момент инерции кривошипа относительно O равен I.

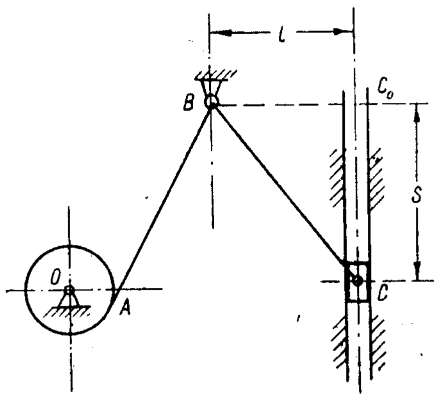
Ответ: $$\omega_{OA} = \sqrt{\frac{M\pi g}{Ig + 2R^2(3Q + 2P_1 + 2P)}}.$$



137. Определить угловую скорость кривошипа OA при $\varphi = \frac{\pi}{2}$, если начальная угловая скорость кривошипа при $\varphi = 0$ $\omega_0 = 10\ \frac{1}{сек}$ и к нему приложен постоянный вращающий момент $M_\partial = 10$ *кГм*, а к кулисе BC приложена горизонтальная сила сопротивления $P = 10$ *кг*; $OA = 0{,}1$ *м*; момент инерции кривошипа относительно O равен $I_0 = 0{,}1$ *кГм·сек*², масса кулисы BC равна $m_3 = 9{,}8\ \frac{кГ\,сек^2}{м}$, массой ползуна A и трением пренебречь.

Ответ: $\omega \approx 19\ \frac{1}{сек}$.

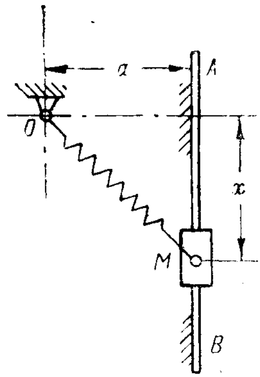
138. Однородный круглый цилиндр радиуса r приводится во вращение при помощи нити ABC, намотанной на него и идущей через неподвижное колечко B к ползуну C, который движется под действием силы тяжести вниз в вертикальных неподвижных направляющих.



Пренебрегая трением, определить угловую скорость цилиндра в функции пути S ползуна C, если в начальном положении точка C находилась на одной горизонтали с точкой B, начальная скорость равна нулю, момент инерции цилиндра относительно оси вращения равен I, вес ползуна P, $BC_0 = l$.

Ответ: $\omega = \sqrt{\dfrac{2PgS}{Ig + PR^2\left(1 + \dfrac{l^2}{S^2}\right)}}$.

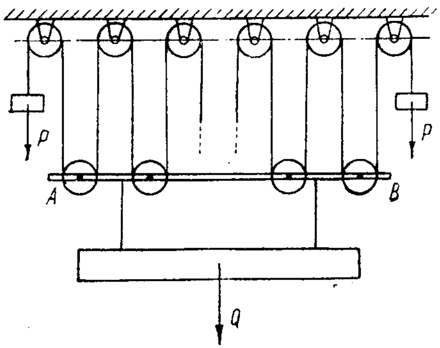
139. Ползун M весом P свободно скользит без трения вдоль вертикального стержня AB. К ползуну присоединена пружина, конец которой O закреплен неподвижно на расстоянии a от стержня AB. Ползун начинает двигаться без начальной скорости из положения, когда OM горизонтально. В этом положении пружина не растянута.



Найти: 1) скорость ползуна M в функции его расстояния от начального положения, принимая жесткость пружины равной c; 2) жесткость пружины, при которой ползун остановится на расстоянии a от начального положения.

Ответ: 1) $v^2 = \frac{2g}{P}\left[Px + ac\sqrt{x^2+a^2} - c\left(\frac{x^2}{2}+a^2\right)\right]$;

2) $c_1 = (6+4\sqrt{2})\,\frac{P}{a}$.



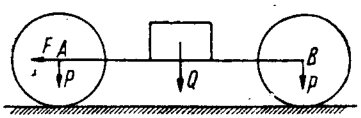
140. Система состоит из n неподвижных блоков и $(n-1)$ подвижных, сидящих на подвижной обойме AB. Все эти блоки охватывает нить, к концам которой прикреплены грузы весом P каждый. Эти грузы, опускаясь, поднимают груз Q, подвешенный к обойме.

Пренебрегая трением, массой блоков обоймы и нити определить ускорение грузов.

Ответ: $w_P = \frac{2P(n-1)-Q}{2P(n-1)^2+Q}\,(n-1)\cdot g$;

$$w_Q = \frac{2P(n-1)-Q}{2P(n-1)^2+Q}\cdot g.$$

VIII. УРАВНЕНИЯ В ОБОБЩЕННЫХ КООРДИНАТАХ



141. Два колеса, одинакового веса P и радиуса r, катятся по горизонтальной плоскости без скольжения. Центры колес соединены стержнем AB, несущим груз Q. К болту, прикрепленному к стержню AB, приложена постоянная горизонтальная сила F.

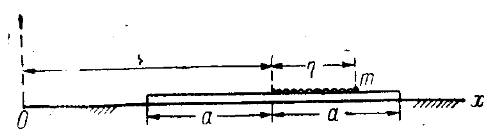
Определить ускорение центра колеса A.

Ответ: $w_A = \dfrac{F}{3P+Q}\,g.$

142. Однородный стержень массы M и длины $2a$ может перемещаться без трения по горизонтальной прямой.

Точка массы m соединена с серединой стержня пружиной длины l ($l<a$) и жесткости c. Стержень удерживается в покое, когда точка оттягивается к одному из концов стержня. Затем стержень и точка отпускаются.

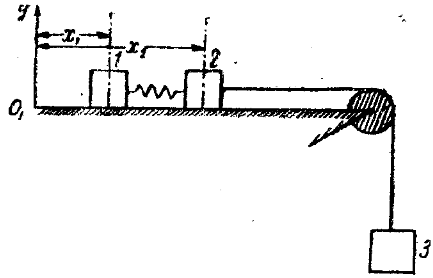
Найти последующее движение точки.



Ответ: Гармоническое колебание с периодом

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{mM}{(m+M)\cdot c}}.$$

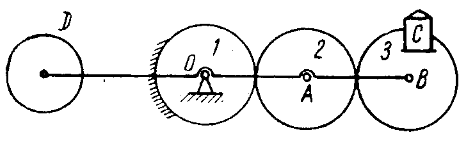
143. Два груза, соединенные пружиной, приводятся в движение третьим грузом посредством гибкой нерастяжимой нити, перекинутой через блок и соединяющей второй и третий грузы.



Пренебрегая трением, массами блока и нити, найти закон движения первого и второго грузов по горизонтальной плоскости, если веса трех грузов одинаковы и равны P, жесткость пружины c, в начальный момент расстояние между первым и вторым грузами при ненапряженной пружине равно l. Начало координат выбрать в начальном положении первого груза.

Ответ: $x_2 = \frac{g}{6} t^2 + \frac{P}{9c} - \frac{P}{9c} \cos \sqrt{\frac{3c}{2m}}\, t + l;$

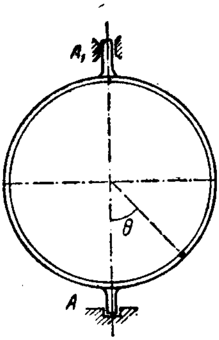
$$x_1 = \frac{g}{6} t^2 + \frac{2P}{9c} \cos \sqrt{\frac{3c}{2m}}\, t - \frac{2P}{9c}.$$



144. Планетарный механизм, состоящий из неподвижного колеса *1*, кривошипа OB и подвижных колес *2-3*, начинает двигаться из горизонтального положения под действием гири C, установленной на подставке колеса *3* (центр тяжести колес *2-3*, кривошипа и противовеса D находится на оси вращения кривошипа).

Найти угловую скорость кривошипа в тот момент, когда он будет в нижнем вертикальном положении. Гиря весит Q *кг*, колеса — однородные диски радиуса r и веса P *кг*; момент инерции кривошипа и противовеса относительно оси вращения I *кГм сек*^{2}.

Ответ: $\omega = 2 \sqrt{\frac{2Qrg}{Ig + (16Q + 22P) r^2}}.$

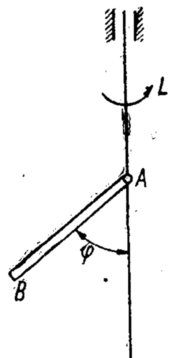


145. Трубка, согнутая в форме кругового кольца, рассматривается как материальная окружность массы M радиуса r с находящимся в ней шариком, рассматриваемым как материальная точка массы m, вращается вокруг своего вертикального диаметра.

Составить дифференциальные уравнения движения системы.

Ответ: $$\left(\frac{1}{2} M + m\sin^2\theta\right)\ddot{\varphi} + (m\sin 2\theta)\dot{\varphi}\dot{\theta} = 0,$$

$$r\ddot{\theta} - \frac{1}{2} r\dot{\varphi}^2 \sin 2\theta + g\sin\theta = 0.$$



146. Однородный стержень AB длины l и веса P прикреплен шаровым шарниром A к вертикальному валу. Вал приводится во вращение постоянным моментом L из состояния покоя.

Пренебрегая диаметрами вала и стержня, размером шарнира, трением и массою вертикального вала, составить дифференциальные уравнения движения стержня.

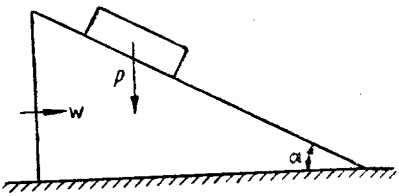
Ответ: 1. $2I_A\ddot{\varphi} + I_A\sin 2\varphi\cdot\dot{\psi}^2 + Pl\sin\varphi = 0.$

2. $I_A\sin^2\varphi\cdot\ddot{\psi} + I_A\cdot\sin 2\varphi\cdot\dot{\varphi}\cdot\dot{\psi} - L = 0,$

где I_A — момент инерции стержня относительно точки A.

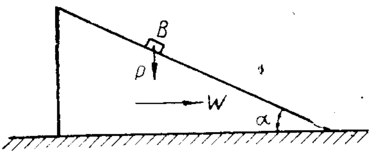
IX. ОТНОСИТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ

147. Прямоугольный клин поставлен одним из катетов на гладкие горизонтальные рельсы. На его гипотенузу, образующую угол α с горизонтом, кладут тело, могущее скользить по клину без трения. Вес тела P.



Какое горизонтальное ускорение w надо сообщить клину, чтобы тело на клине осталось в равновесии?

Ответ: $w=g\cdot\operatorname{tg}\alpha$.



148. На гладкой горизонтальной плоскости лежит призма A.

Какое ускорение w следует сообщить призме, чтобы груз P, лежащий на наклонной шероховатой плоскости, находился в покое относительно призмы. Коэффициент трения равен k, угол при вершине призмы равен α.

Ответ: $g\operatorname{tg}(\alpha+\varphi)\geqslant w\geqslant g\cdot\operatorname{tg}(\alpha-\varphi)$,

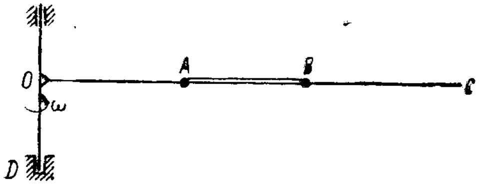
$$k=\operatorname{tg}\varphi.$$

149. Грузовик, движущийся со скоростью 36 *км/час*, был резко заторможен, после чего он прошел до остановки 10 *м*.

Считая движение грузовика равнозамедленным, найти, каково наименьшее возможное значение коэффициента трения ящика, стоявшего в кузове, о дно кузова, если он относительно кузова не сдвинулся.

Принять $g=10$ *м/сек*^{2}.

Ответ: $f\geqslant\frac{1}{2}$.

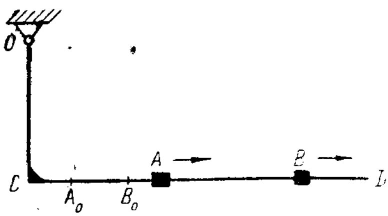


150. Горизонтальный стержень OC, составляющий одно целое с вертикальной осью DE, вращается вокруг нее и в данный момент его угловая скорость равна ω.

Просверленные шарики A и B, соединенные стержнем AB, надеты на стержень OC и скользят вдоль него без трения. Массы шариков равны соответственно m_1 и m_2, их размерами пренебречь. Закон вращения, расстояние в данный момент и начальные условия произвольны.

Определить усилие в стержне AB, считая его невесомым, и показать, что оно не зависит от начальных условий (начального положения и начальных скоростей).

Ответ: $S = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \omega^2 l$ **(растянут).**



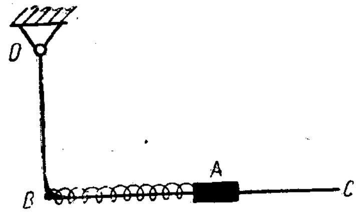
151. Скрепленные под прямым углом стержни OC и CD равномерно вращаются в плоскости OCD вокруг перпендикулярной к ней вертикальной оси, проходящей через точку O. На идеально-гладкий стержень CD надеты ползуны A и B, размерами которых можно пренебречь. Первоначально ползуны были прикреплены к стержню в точках A_0 и B_0, описывая вокруг O горизонтальные окружности, затем освобождены и скользят вдоль стержня. Массы ползунов произвольны, но сравнительно с массой вращающихся частей механизма, настолько малы, что их перемещение на угловой скорости вращения практически не отзывается. Расстояние OC произвольно.

1. Доказать, что при этих условиях в любой момент движения $\frac{CB}{CA} = \frac{CB_0}{CA_0}$.

2. Выяснить, при каком направлении вращения горизонтальное давление ползуна на стержень при скольжении возра-

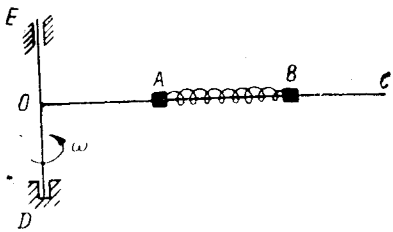
стает, при каком сначала убывает до нуля, затем меняет направление.

Ответ: Горизонтальное давление возрастает при вращении по часовой стрелке.



152. Стержни OB и BC, скрепленные под прямым углом, равномерно вращаются в плоскости OBC вокруг перпендикулярной к ней вертикальной оси, проходящей через точку O. Ползун A, надетый на идеально-гладкий стержень BC и прикрепленный к точке B пружиной, находится в состоянии относительного покоя, описывая горизонтальную окружность радиуса OA.

Доказать, что если 1) растяжение пружины в пределах применимости закона Гука и 2) если массой пружины и размером ползуна можно пренебречь, то растяжение пружины при данной угловой скорости от расстояния OB и от направления вращения не зависит.



153. Идеально-гладкий стержень OC, составляющий одно целое с осью DE и приводным шкивом, вращается вокруг оси DE в горизонтальной плоскости с постоянной угловой скоростью ω. На стержень надеты ползун A массы m и ползун B массы M, соединенные пружиной, свободная длина которой равна l, а жесткость равна c, причем $c > M\omega^2$. Размерами ползунов и массой пружины пренебречь. Первоначально ползун A был прикреплен к оси, а ползун B описывал окружность. Затем ползун A освобожден и ползуны удаляются от оси, скользя по стержню OC.

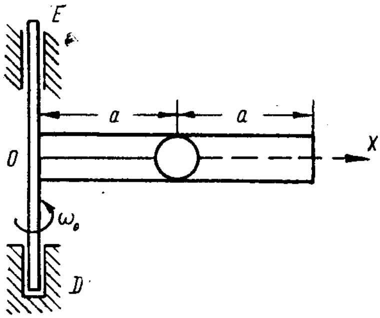
Выразить в функции времени деформацию движущейся пружины: $z = AB - l$.

Ответ: $z = \dfrac{M\omega^2 l}{\lambda c - M\omega^2}\left[1 + \dfrac{(\lambda - 1)c}{c - M\omega^2}\cos\left(\sqrt{\dfrac{\lambda c}{M} - \omega^2}\; t\right)\right]$,

где $\lambda = \dfrac{M + m}{m}$; $m \neq 0$.

154. В условиях предыдущей задачи найти движение центра масс ползунов A и B.

Ответ $x_c = \dfrac{mcl}{(M+m)(c-M\omega^2)} \operatorname{ch} \omega t.$



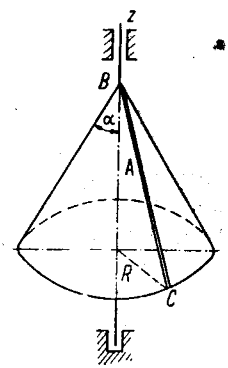
155. Внутри однородной трубки длиною $2a$ *см* привязан нитью OA шарик A, трубку вращают вокруг вертикальной оси до тех пор, пока ее угловая скорость не достигла значения $\omega_0 \dfrac{1}{сек}$. После этого ее предоставляют самой себе. Вслед за этим нить обрывается и шарик начинает скользить вдоль трубки.

Найти относительную скорость шарика как функцию расстояния x шарика до оси вращения, если масса шарика m_1 *г*, масса трубки — m_2 *г*.

Трением пренебречь.

Ответ: $v_{отн} = \omega_0 a \sqrt{\dfrac{(3m_1 + 4m_2)(x^2 - a^2)}{3m_1 x^2 + 4m_2 a^2}}.$

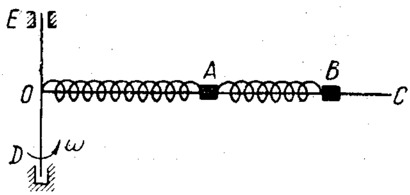
156. Однородный сплошной круговой конус массы M с углом при вершине 2α и радиусом основания R вращается без трения вокруг своей оси z, имея начальную угловую скорость ω_0. Из вершины B конуса по желобу BC, имеющему направление образующей, скатывается без начальной скорости шарик A массы $m = 0{,}1\ M$.



Определить относительное ускорение шарика в момент, когда он достигнет основания конуса.

Ответ: $w_{отн} = g\cos\alpha + \dfrac{9}{16} R\omega_0^2 \sin\alpha.$

157. Идеально-гладкий стержень OC, составляя одно целое с осью DE и приводным шкивом, вращается вокруг оси DE в горизонтальной плоскости с постоянной угловой скоростью ω На стержень надеты ползуны A и B, массы m каждый, соединенные двумя одинаковыми пружинами OA и AB. Жесткость каждой пружины равна c, ее свободная длина a. Размерами ползунов и массой пружин пренебречь. Ползуны находятся в состоянии относительного покоя, описывая окружности.



1. Найти растяжение каждой пружины.

2. Исследовав решение, найти верхнюю границу значений отношения $\frac{m\omega^2}{c}$, при которых относительное равновесие возможно, считая закон Гука применимым при любых растяжениях пружины.

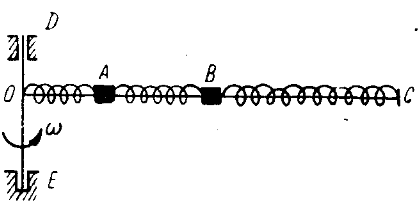
Ответ: Обозначив $OA-l=x_1$; $AB-l=x_2$,

$\frac{m\omega^2}{c}=k$, имеем:

1) $x_1=\frac{(3-k)ka}{k^2-3k+1}$;

$x_2=\frac{(2-k)ka}{k^2-3k+1}$;

2) $k<0{,}38$.



158. Идеально-гладкий стержень OC, составляющий одно целое с осью DE и приводным шкивом, вращается в горизонтальной плоскости вокруг оси DE с постоянной угловой скоростью ω. На стержень надеты ползуны A и B, соединенные друг с другом между собой и с концами стержня тремя пружинами. Масса каждого ползуна равна m; их размерами, а также массой пружины пренебречь. Жесткость каждой пружины равна c, причем $c>m\omega^2$. Свободная длина каждой из пружин OA и AB равна a, свободная

длина пружины BC равна $OB=2a$, где длина стержня OC произвольна.

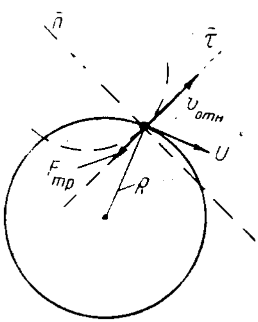
Какая пружина наиболее деформирована, какая наименее и сжата или растянута пружина AB, если ползуны находятся в состоянии относительного покоя, описывая окружности (вычислить деформации пружин и сравнить их)?

Ответ: $x_1 = OA - a = \frac{4c - m\omega^2}{c - m\omega^2} \cdot \frac{m\omega^2}{3c - m\omega^2} \cdot a$ **(растяжение),**

$x_2 = AB - a = \frac{m\omega^2}{3c - m\omega^2}\, a > 0$ **(растяжение),**

$x_3 = OB - 2a = x_1 + x_2$ **(сжатие),**

$x_3 > x_1 > x_2$ **пружина** AB **растянута.**



159. Шероховатая горизонтальная платформа совершает круговое поступательное движение с постоянной скоростью U так, что каждая точка платформы описывает окружность радиуса R.

На платформе находится материальная точка, движущаяся относительно платформы с постоянной относительной скоростью $v_{отн}$. Коэффициент трения точки о платформу равен f.

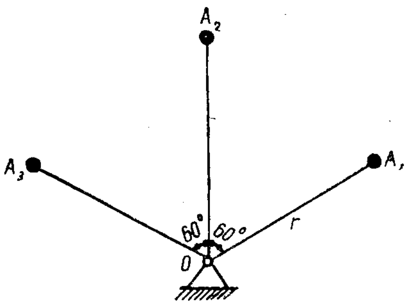
Найти относительную траекторию точки относительно платформы.

Ответ: Окружность с радиусом

$$\rho = \frac{R\, v_{отн}^2}{\sqrt{U^4 - f^2 g^2 R^2}}.$$

X. СМЕШАННЫЕ ЗАДАЧИ

160. Три жестко скрепленных под углами в 60° невесомых стержня, несущие на концах грузы A_1, A_2, A_3 равной массы, вращаются вокруг оси, перпендикулярной к их общей плоскости.



Найти центр масс C и проверить на данном примере тождества:

1) $\Sigma m_k \overline{v}_k = M \overline{v}_c$;

2) $I_{oz} = I_{cz} + M(CO)^2$:

3) $\Sigma \overline{r}_k \times m_k \overline{v}_k = \overline{r}_c \times M \overline{v}_c + I_{cz} \overline{\omega}$;

4) $T = \frac{m v_c^2}{2} + I_c \frac{\omega^2}{2}$ (где T—кинетическая энергия).

161. Камень брошен под углом α к горизонту с начальной скоростью v_0. Не прибегая к уравнениям движения точки, а только пользуясь основными теоремами динамики, ответить на такие вопросы:

1. Какова наибольшая высота подъема камня и какова его скорость в этом положении?

2. Когда камень достигнет этого положения?

3. Когда камень упадет на землю и какова будет в этот момент его скорость?

Ответ: $h = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$;

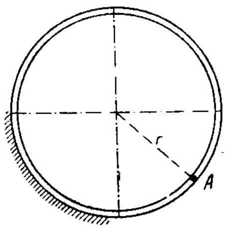
$t_1 = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}$;

$v = v_0$;

$t = 2t_1$.

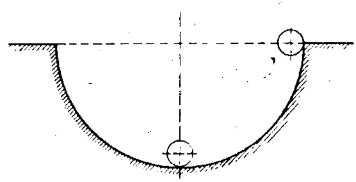
162. Определить момент инерции однородной материальной дуги окружности с центральным углом α относительно диаметра, делящего дугу пополам; в частности определить момент инерции окружности относительно ее диаметра.

Ответ: $I=\frac{1}{2}mr^2\left(1-\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)$, **где** m**—масса дуги,** r**—ее радиус; для окружности** $I=\frac{1}{2}Mr^2$, **где** M**—масса всей окружности.**



163. В трубке, согнутой в форме кольца радиуса $r=10$ *см* и расположенной в вертикальной плоскости, находится тяжелый шарик A, отталкиваемый от вертикального диаметра горизонтальной силой, пропорциональной массе шарика и расстоянию от этого диаметра (коэффициент пропорциональности $k=4$ сек ^{2}). Определить скорость шарика, когда он пройдет $^1/_4$ окружности, если в начальный момент он находился в наинизшей точке и имел скорость 1,4 *м/сек*. Определить также реакцию трубки в этот же момент, если масса шарика $m=100$ *г*.

Ответ: $v=20\ \frac{см}{сек}$; $N=4{,}08$ *г*.

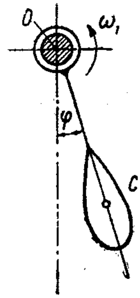


164. Шарик веса P, прижатый изнутри к сфере значительно большего радиуса на уровне ее центра, затем отпущен и двинулся вниз. Найти давление шарика на сферу в наинизшем положении, если он минует его, катясь без скольжения.

Ответ: $N=\frac{7}{3}P$.

165. Маятник веса P совершает малые колебания с трением на вращающемся шипе O, причем во всяком положении маятника модуль угловой скорости шипа больше модуля угловой скорости маятника. Дано: момент трения маятника о шип $M_{тр}=\mathrm{const}$, расстояние от оси привеса до центра тяжести

равно a, момент инерции маятника относительно оси привеса O равен I.



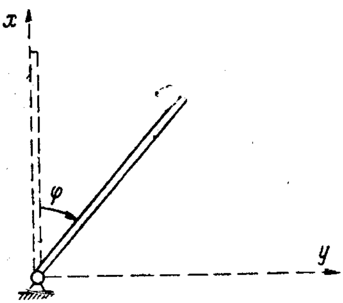
Найти при начальных условиях $\varphi|_{t=0} = \varphi_0$, $\dot{\varphi}|_{t=0} = 0$:

1. Уравнение движения маятника.

2. Условие, при котором маятник, двигаясь из начального положения, остановится, не дойдя до вертикального положения.

Ответ: 1. $\varphi = \left(\varphi_0 - \frac{M_{mp}}{Pa}\right) \cos \sqrt{\frac{Pa}{I}}\, t + \frac{M_{mp}}{Pa}$.

$$2.\ \frac{M_{mp}}{Pa} < \varphi_0 < \frac{2\, M_{mp}}{Pa}.$$



166. Однородный стержень весом P и длины l подвешен за конец A к неподвижному шарниру, отведен от положения устойчивого равновесия на 180° и отпущен с ничтожно малой скоростью.

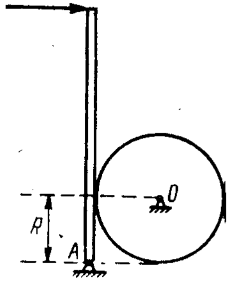
Найти давление стержня на ось A шарнира в моменты, когда он проходит через горизонтальное и через наинизшее положения.

Ответ: 1. В наинизшем положении

$$x_A = -4P; \quad Y_A = 0.$$

2. В горизонтальном положении

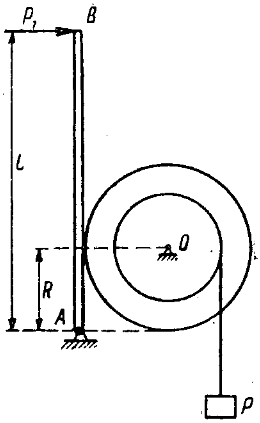
$$x_A = -\frac{P}{4}; \quad Y_A = \frac{3}{2} P.$$



167. Маховик веса Q радиуса R делает n *об/мин*. На ручку тормозной колодки нажимают с силой P, перпендикулярной к оси ручки, после чего маховик, сделав m оборотов, останавливается.

Определить силу P, если массу маховика считать равномерно распределенной по его ободу, коэффициент трения колодки об обод маховика равен f и длина ручки AB равна l.

Ответ: $P = \frac{\pi n^2 R^2 Q}{3600\, g\, m\, l\, f}$.

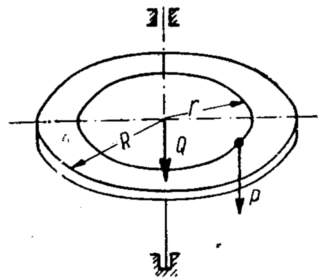


168. Однородный диск радиуса R и жестко соединенный с ним однородный цилиндр радиуса r приводятся во вращение вокруг неподвижной горизонтальной оси O грузом веса P, привешенным на нити, намотанной на цилиндр. В некоторый момент, когда скорость груза равна U, к концу B рычага AB длины l прикладывают силу P_1, благодаря чему происходит торможение и вся система останавливается.

Определить, на какую высоту опустится груз P от начала торможения и до остановки, если коэффициент трения диска о тормозную колодку равен f, вес цилиндра Q, диска — g. Трением в подшипниках и весом нити пренебречь.

Ответ: $h = \frac{[(2P+Q)r^2 + qR^2]}{4(P_1 l f - P r) r g} \cdot U^2$.

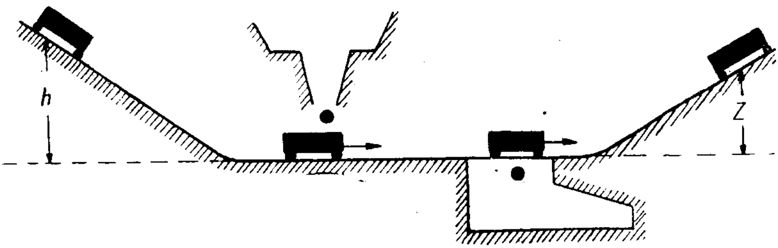
169. По платформе радиуса R и веса Q идет человек по концентрической окружности радиуса r. Вес человека P. Закон движения человека относительно платформы $S = at^3$, где S — длина дуги, отсчитываемая от некоторого начального положения.



Найти, какую работу совершит человек от момента $t=0$ до момента t_1, если в начальный момент человек и платформа были неподвижны.

Ответ: $A = \frac{9 Q P R^2 a^2 t^4}{2g(QR^2 + 2Pr^2)}$.

170. Вагонетка массы M скатывается по уклону с высоты h и катится далее по горизонтальному пути. В некоторый момент в нее падает вертикально груз массы m, а несколько позже раскрывается дно вагонетки и груз падает в люк, над

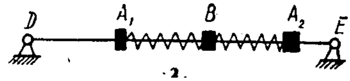


которым она проезжает. Продолжая катиться, вагонетка въезжает на горку.

До какой высоты z она поднимается?

Ответ: $z = \frac{M^2}{(M+m)^2} h$.

171. На идеально-гладкий горизонтальный стержень DE надеты ползуны A_1, B и A_2, причем массы двух крайних ползунов различны, а масса среднего произвольна, соединены между собой пружинами. Первоначально все три ползуна удерживались в таких положениях, что центр масс ползунов A_1 и A_2 совпадал с точкой B, затем все три одновременно отпущены (без начальной скорости).

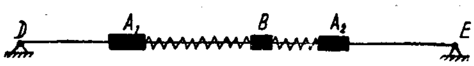


1. Будет ли все время центр масс ползунов A_1 и A_2 совпадать с ползуном B?

2. Останется ли неподвижен ползун B?

3. Останется ли неподвижен центр масс ползунов A_1 и A_2?

4. Останется ли неподвижен центр масс всех трех ползунов?



172. Ползуны A_1 массы m_1 и A_2 массы m_2 и ползун B произвольной массы надеты на идеально-гладкий горизонтальный стержень DE и соединены двумя невесомыми пружинами, жесткости которых равны соответст-

венно C_1 и C_2. Размеры ползунов и свободные длины пружин произвольны.

Первоначально крайние ползуны удерживались в таких положениях, что деформации пружин равнялись соответственно a_1 и a_2 и вся система была в покое. Затем ползуны отпущены без начальной скорости и возникли колебания.

Найти, при каком соотношении величин m_1 и m_2, C_1 и C_2, a_1 и a_2 ползун B остается в покое все время. Выяснить также, останется ли центр масс двух крайних ползунов неподвижным:

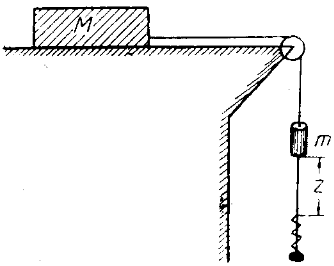
1) в общем случае;

2) в случае, когда ползун B в покое.

Ответ:

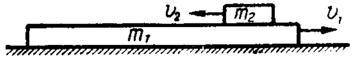
1) $\frac{C_1}{C_2}=\frac{m_1}{m_2}=\frac{a_1}{a_2}$ **(два решения: либо пружины растянуты, либо обе сжаты)**;

2) центр масс крайних ползунов неподвижен только в данном случае, причем с центром тяжести ползуна B при произвольных длинах пружин он не совпадает.



173. На столе лежит груз, масса которого равна M, а коэффициент трения о стол f. К грузу прикреплена нить, перекинутая через гладкий блок. К другому концу нити подвешен стержень с надетой на него пружиной, закрепленной на нижнем конце и полым цилиндром массы m, могущим свободно скользить по нему. Считая нить, стержень и пружину невесомыми, определить, на какую высоту z над пружиной следует поднять цилиндр, чтоб, упав затем на пружину и сжав ее, он сдвинул бы груз M. Жесткость пружины c; $m<fM$.

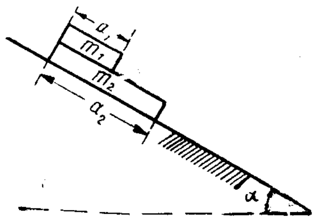
Ответ: $z=\frac{f\cdot Mg}{2cm}(fM-2m)$.



174. Брусок массы m_1 скользит по идеально-гладкой плоскости вправо и в данный момент имеет скорость v_1. Брусок массы m_2 скользит по нему влево и в данный момент имеет абсолютную скорость v_2. Между брусками действует сила трения.

Найти работу силы трения от данного момента до прекращения ее действия.

Ответ: $A = -\dfrac{m_1 m_2 (v_1 + v_2)^2}{2(m_1 + m_2)}$.

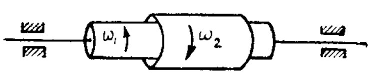


175. На плоскость, составляющую с горизонтом угол α, положен один брусок, а на него — другой так, что их верхние концы совпали. Масса верхнего бруска равна m_1, его длина a_1; масса нижнего бруска равна m_2, его длина a_2; коэффициент трения верхнего бруса о нижний равен f_1, причем $f_1 < \operatorname{tg}\alpha$.

Найти, в каких пределах должен заключаться коэффициент трения f_2 нижнего бруса о наклонную плоскость, чтобы скользили оба бруска, притом раздельно, и через сколько времени совпадут в этом случае их нижние концы.

Ответ: $f_1 < f_2 < \dfrac{f_1 m_1 + m_2 \operatorname{tg}\alpha}{m_1 + m_2}$;

$$t_1 = \sqrt{\frac{2(a_2 - a_1) m_2}{(f_2 - f_1)(m_1 + m_2) g \cos\alpha}}.$$



176. На вал, имеющий горизонтальную ось, надет полый цилиндр. В начальный момент вал и цилиндр вращаются в противоположные стороны и модули их угловых скоростей равны соответственно ω_1 и ω_2 Их моменты инерции относительно общей оси равны соответственно I_1 и I_2. Между валом и цилиндром действует момент трения L (трением в подшипниках пренебречь).

Найти:

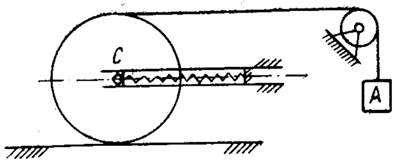
1. Чем характеризуется момент времени, начиная с которого действие момента трения прекратится?

2. Работу момента трения с начального момента времени до прекращения его действия.

Ответ: 1. $\bar{\omega}_{вала} = \bar{\omega}_{цилиндра}$.

2. $A = -\dfrac{I_1 I_2 (\omega_1 + \omega_2)^2}{2(I_1 + I_2)}$.

177. Однородный диск веса p катится по неподвижной горизонтальной прямой без скольжения. Ось C диска упирается в конец горизонтально расположенной пружины, другой конец которой закреплен. Груз A весом P посредством нити, огибающей диск и невесомый блок, приводит в движение диск.



Рассматривая движение груза A вниз, определить ускорение груза A и натяжение нити в начале и в конце пути его, если в начальный момент времени система была в покое, и пружина в недеформированном состоянии.

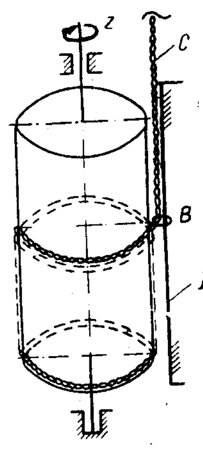
Ответ: $w_{A_0} = \dfrac{P}{\frac{3}{8}p + P} \cdot g$;

$$w_{A_1} = -\frac{P}{\frac{3}{8}p + P} \cdot g;$$

$$S_0 = \frac{3Pp}{3p + 8P};$$

$$S_1 = \frac{3Pp + 16P^2}{3p + 8P}.$$

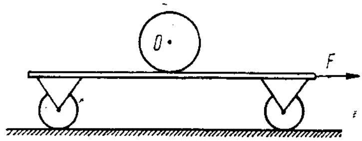
178. Полый, легкий круговой цилиндр A радиуса R вращается вокруг своей вертикальной оси z. При этом на цилиндр наматывается тяжелая однородная цепь C так, что витки ее плотно прилегают друг к другу. Точка набегания цепи на цилиндр все время находится на вертикали, что достигается при помощи колечка B, сквозь которое проходит цепь, имеющая вертикальное направление, а колечко надето на вертикальную направляющую D, вдоль которой оно свободно передвигается.



Пренебрегая массой цилиндра и трением во всех соединениях, а также считая каждый виток за горизонтальную окружность, определить угловую скорость цилиндра в произвольный момент времени, если линейная плотность цепи равна μ и на цилиндр действует постоянный движущий момент L.

Ответ: $\omega = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{\mu R}} = \mathrm{const}.$

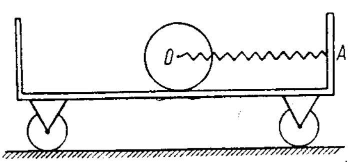
179. Тележка весом P стоит на горизонтальной плоскости. На шероховатой поверхности тележки лежит однородный цилиндр весом Q.



К тележке прилагают постоянную по величине горизонтальную силу F.

Найти, при каком коэффициенте трения цилиндра о поверхность тележки цилиндр будет катиться по этой поверхности без скольжения.

Ответ: $f \geqslant \frac{F}{Q+3P}$.



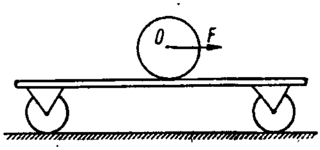
180. Однородный цилиндр весом Q лежит на шероховатой горизонтальной поверхности тележки весом P, стоящей неподвижно на гладком горизонтальном полу.

Центр O цилиндра соединен горизонтальной пружиной OA с правым бортом тележки.

Цилиндр отводят влево так, что натяжение пружины достигает значения F, и затем отпускают его без начальной скорости.

Считая приближенно, что натяжение пружины в течение некоторого времени будет оставаться постоянным, найти минимальное значение коэффициента трения цилиндра о поверхность тележки, при котором цилиндр будет катиться без скольжения.

Ответ: $f \geqslant \frac{P+Q}{(3P+Q)Q}\cdot F.$

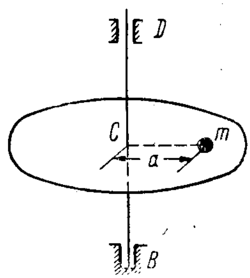


181. Тележка весом P стоит на горизонтальной плоскости. На шероховатой поверхности тележки лежит однородный цилиндр весом Q. К оси цилиндра прилагают постоянную по величине горизонтальную силу F.

При каком коэффициенте трения цилиндра о поверхность тележки цилиндр будет катиться по этой поверхности без скольжения? Массой колес тележки пренебречь.

Ответ: $f \geqslant \dfrac{F \cdot P}{(3P+Q) \cdot Q}$.

182. Груз массы m, который можно принять за материальную точку, лежит на горизонтальном диске на расстоянии a от вертикальной оси BD. Коэффициент трения груза о диск равен k. Шкив составляет с осью и диском одно твердое тело, момент инерции которого относительно оси BD равен I.

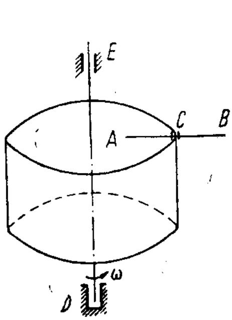


Первоначально система была в покое, затем к шкиву приложен постоянный вращающий момент L.

После какого момента времени, считая с начала вращения, груз начнет скользить по диску и как отзовется это на вращении диска?

Ответ: $t = \dfrac{I + ma^2}{L} \sqrt[4]{\dfrac{k^2 g^2}{a^2} - \dfrac{L^2}{(I + ma^2)^2}}$.

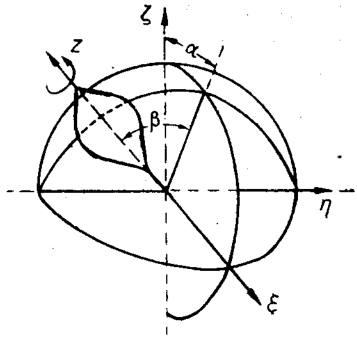
Вращение перестает быть равноускоренным.



183. Середина однородного горизонтального стержня AB длины $2a$ и веса P закреплена на краю открытого сверху цилиндра радиуса r цилиндрическим шарниром C. Весь прибор вращается вокруг оси DE большого цилиндра с постоянной угловой скоростью.

Доказать, что период малых колебаний стержня AB в вертикальной плоскости, проходящей через ось DE и точку C, около положения относительного равновесия, совпадает с периодом вращения прибора (цилиндра).

184. Тяжёлому однородному гироскопу сообщена угловая скорость вокруг оси симметрии.



Найти наименьшую угловую скорость гироскопа, при которой вертикальное положение его оси устойчиво, если отклонения оси от вертикали малы и значением вторых степеней α, β и их производных можно пренебречь.

Дано: вес гироскопа $P=5$ *кг*, полярный радиус инерции $\rho=10$ *см*, расстояние от центра тяжести до точки опоры $l=10$ *см*, экваториальный момент инерции $A={}^1/_4\ C$ (C—полярный момент инерции).

Ответ: $\omega_{мин}=10$ **сек.**$^{-1}$.

185. Ракета начинает двигаться поступательно и ее центр масс, перемещаясь по вертикали, достигает наибольшей скорости $v=10000$ *м/сек*.

Пренебрегая весом ракеты и сопротивлением воздуха, найти, во сколько раз масса горючего больше массы ракеты, если скорость истечения постоянна и равна $v_r=2000$ *м/сек*.

Ответ: В 147,4 раза.

186. Точка переменной массы начинает движение по восходящей вертикали в однородном поле тяжести так, что ее масса на активном участке изменяется по закону $m=m_0\ e^{-\alpha t}$, где m_0 — первоначальная масса точки, α—постоянная.

Пренебрегая сопротивлением воздуха и считая скорость истечения частиц постоянной v_r =пост., найти:

1. При каком значении α активный участок будет наибольшим?

2. Во сколько раз высота подъема h_1 при мгновенном истечении всей массы больше высоты подъема h_2 при медленном истечении, когда обеспечивается наибольший активный участок?

3. Величину реактивного ускорения на этом участке.

Ответ: 1. $\alpha = \frac{2g}{v_r}$.

2. $\frac{h_1}{h_2} = 2$.

3. $w = 2g$.

СОДЕРЖАНИЕ

Редактор профессор М. Г. Слободянский.

Л 667209 22/XI—1956 г. Объем $5\frac{1}{4}$ п. л. Зак. 1725. Тир. 2000.

Типография МЭИ