Глава 12

ДИНАМИКА СИСТЕМЫ

12.1. Теорема о движении центра масс

Постановка задачи. *Механизм, состоящий из n связанных между собой тел, установлен на призме, находящейся на горизонтальной плоскости. Трение между призмой и плоскостью отсутствует. Одно из тел получает перемещение относительно призмы. Куда и на какое расстояние переместится призма?*

План решения

Для решения задачи используем теорему о движении центра масс. Выбираем систему координат. Одну из осей, например, ось x направляем перпендикулярно линии действия внешних сил. В проекции на ось x уравнение движения центра масс принимает вид

$$m\ddot{x}_{\text{ц}} = 0, \tag{1}$$

где $x_{\text{ц}}$ — координата центра масс системы, $m = \sum_{i=1}^{n} m_i$ — масса всей системы. Дважды интегрируя (1) при условии, что в начальный момент скорость центра масс была равна нулю, получаем

$$mx_{\text{ц}} = \text{const}. \tag{2}$$

Координата центра масс системы вычисляется по формуле

$$x_{\text{ц}} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i x_i. \tag{3}$$

Записывая (2) с учетом (3), один раз для начального положения системы (в покое), а другой раз после смещения одного из тел, получаем формулу, связывающую абсолютные смещения тел системы:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i = 0. \tag{4}$$

1. Абсолютное смещение каждого тела представляем как сумму относительного смещения, зависящего от величины заданного относительного смещения одного из тел, и неизвестного переносного смещения Δ, равного абсолютному смещению того тела, относительно которого задавалось смещение.

2. Подставляя абсолютные смещения в (4), получаем уравнение для смещения Δ. Решение уравнения дает ответ.

Пример. Механизм, состоящий из груза A массой 50 кг, блока B массой 80 кг (больший радиус $R = 30$ см, меньший — $r = 10$ см) и цилиндра C массой 120 кг радиусом $R_C = r/2$, установлен на призме D массой 210 кг, находящейся на горизонтальной плоскости. Трение между призмой и плоскостью отсутствует. Груз A получает перемещение $S = 1.2$ м относительно призмы вдоль ее поверхности влево; $\alpha = 75°$ (рис. 124). Куда и на какое расстояние переместится призма?

Решение

Задаем систему координат. Проекции на горизонтальную ось всех внешних сил (сил тяжести $\vec{G}_A$, $\vec{G}_B$, $\vec{G}_C$, $\vec{G}_D$, реакции опоры $\vec{N}$), действующих на систему, равны нулю (рис. 125), а трения между призмой D и опорой по условию нет. Применим к системе следствие из теоремы о движении центра масс в форме (4).

1. Абсолютное смещение тел A, B и C представляем как сумму относительного смещения, зависящего от величины S относительного смещения груза A, и неизвестного переносного смещения Δ_D, равного

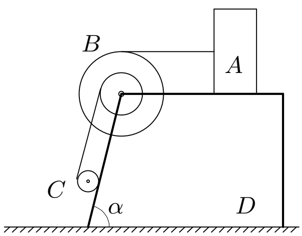

Рис. 124

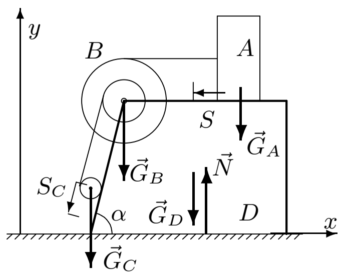

Рис. 125

абсолютному смещению призмы, относительно которой задавалось смещение S. Обозначаем абсолютные смещения координат центров масс тел системы Δ_A, Δ_B, Δ_C, Δ_D. Направление оси x определяет знаки смещений: налево с минусом, направо с плюсом. Предполагаем, что призма сместится направо. Перемещение центра цилиндра C относительно призмы и перемещение груза A связаны так же, как связаны их скорости.

Цилиндр C совершает плоское движение. Абсолютное смещение его центра в проекции на ось x равно $\Delta_D - S_C \cos\alpha$, где S_C — смещение центра цилиндра вдоль наклонной поверхности призмы. Выразим S_C через S. Для этого свяжем скорости груза A и центра масс цилиндра C. Мгновенный центр скоростей цилиндра находится в точке касания призмы, поэтому скорость его центра масс относительно призмы вдвое меньше скорости нити, накручиваемой на обод. Скорость груза A выражаем через угловую скорость блока (рис. 132, с. 249):

$$v_C = 0.5\omega_B r, \quad v_A = \omega_B R. \tag{5}$$

Исключая отсюда ω_B, имеем связь скоростей: $v_C = 0.5 v_A r/R$. Интегрируя это соотношение при нулевых начальных значениях, получаем искомую зависимость: $S_C = 0.5Sr/R$. Находим выражение абсолютных смещений всех тел через Δ_D и S:

$$\Delta_A = \Delta_D - S, \quad \Delta_B = \Delta_D, \quad \Delta_C = \Delta_D - 0.5Sr/R\cos\alpha. \tag{6}$$

2. Подставляя абсолютные смещения в (4), получаем уравнение

$$m_A\Delta_A + m_B\Delta_B + m_C\Delta_C + m_D\Delta_D = 0,$$

или

$$m_A(\Delta_D - S) + m_B\Delta_D + m_C(\Delta_D - 0.5Sr/R\cos\alpha) + m_D\Delta_D = 0.$$

Решаем это уравнение относительно Δ_D:

$$\Delta_D = \frac{m_A S + m_C 0.5S(r/R)\cos\alpha}{m_A + m_B + m_C + m_D} = 14.39.$$

Призма D переместится вправо на 14.39 см.

Условия задач. *Механизм, состоящий из груза A, блока B (больший радиус R, меньший — r) и цилиндра С радиусом R_C, установлен на призме D, находящейся на горизонтальной плоскости. Трение между призмой и плоскостью отсутствует. Груз A получает перемещение $S = 1$ м относительно призмы вдоль ее поверхности влево или (в тех вариантах, где он висит) по вертикали вниз. Куда и на какое расстояние переместится призма?*