только модули скоростей. В простейших случаях, где знак мощности очевиден, можно сделать исключение (Пример 3, с. 284).

Предупреждение типичных ошибок

1. При выборе кинематической схемы следует помнить, что отбрасывается только одна связь, и только реакция этой связи на возможной скорости будет иметь ненулевую мощность. Реакции остальных связей, независимо от того, найдены они или еще нет, не должны иметь мощность. Механизм, полученный из уравновешенной конструкции отбрасыванием связи, должен иметь одну степень свободы.

2. Если система, полученная из исходной отбрасыванием одной из связей, превращается в механизм, содержащий четырехзвенник, то в качестве виртуальной скорости удобно брать одну из угловых скоростей четырехзвенника, а остальные угловые скорости определять с помощью уравнения трех угловых скоростей (§ 8.3.).

13.2. Общее уравнение динамики для системы с одной степенью свободы

Постановка задачи. *Плоский шарнирно-стержневой механизм с одной степенью свободы движется в вертикальной плоскости под действием сил тяжести и момента M. В неподвижных шарнирах и ползуне имеется трение, остальные связи идеальные. Известна угловая скорость одного из звеньев механизма. Для заданного положения механизма определить M.*

План решения

1. Вычисляем угловые скорости звеньев механизма и скорости точек приложения активных сил (§ 8.3., с. 179). В число активных сил включаем силы трения.

2. Вычисляем ускорения точек, наделенных массами (§8.4., с. 183).

3. Вычисляем силы тяжести и силы инерции материальных точек. Силы трения (сопротивления) направлены в сторону, противоположную движению, поэтому записываем их в виде $\vec{F}_{\text{тр}} = -F_{\text{тр}}\vec{v}_k/v_k$, где $\vec{v}_k$ — скорость точки приложения силы, $F_{\text{тр}}$ — модуль силы. Аналогично выражаем моменты сопротивления $\vec{M}_{\text{тр}} = -M_{\text{тр}}\vec{\omega}_k/\omega_k$.

4. Записываем общее уравнение динамики:

$$\sum_k \vec{F}_k \cdot \vec{v}_k + \sum_k \vec{\Phi}_k \cdot \vec{v}_k = 0, \qquad (1)$$

где $\vec{F}_k$ — активные силы, приложенные к механизму, $\vec{\Phi}_k$ — силы инерции. Моменты определяются парами сил, которые входят в число активных сил $\vec{F}_k$, однако мощности моментов удобнее вычислять в форме $\sum_k \vec{M}_k \cdot \vec{\omega}_k$, где $\vec{\omega}_k$ — угловая скорость тела, к которому приложен момент $\vec{M}_k$.

Из полученного уравнения находим искомый момент M.

Пример. Плоский шарнирно-стержневой механизм расположен в вертикальной плоскости и приводится в движение моментом M_{OA}, приложенным к звену OA (рис. 153). В узлах A, B, C и в середине звена AB сосредоточены массы $m_A = 2$ кг, $m_B = 3$ кг, $m_C = 4$ кг, $m_E = 5$ кг. Задана постоянная сила сопротивления движению ползуна, $F_{\text{тр}} = 10$ Н. В шарнирах O и D имеется момент сил трения $M_{\text{тр}} = 15$ Нм. Угловая скорость звена OA постоянна и равна 2 рад/с.

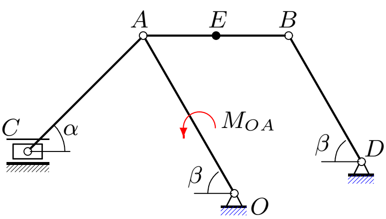

Рис. 153

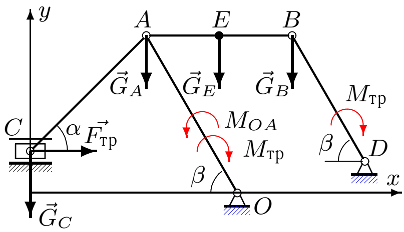

Рис. 154

Пренебрегая массами стержней, определить момент M_{OA} в указанном положении механизма. Даны размеры: $0A = 0.5$ м, $AB = 0.4$ м, $AC = 0.45$ м, $BD = 0.4$ м; $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 60^\circ$.

Решение

1. Вычисляем угловые скорости звеньев механизма и скорости точек A, B, C, E. Вводим систему координат xyz (рис. 154). Ось z перпендикулярна плоскости чертежа. Составляем кинематические уравнения:

$$
\begin{aligned}
&\vec{\omega}_{OA} \times \vec{OA} + \vec{\omega}_{AB} \times \vec{AB} + \vec{\omega}_{BD} \times \vec{BD} = 0,\\
&\vec{v}_A = \vec{\omega}_{OA} \times \vec{OA},\\
&\vec{v}_B = \vec{\omega}_{BD} \times \vec{DB},\\
&\vec{v}_C = \vec{v}_A + \vec{\omega}_{AC} \times \vec{AC},\\
&\vec{v}_E = \vec{v}_A + \vec{\omega}_{AB} \times \vec{AE}.
\end{aligned} \tag{2}
$$

Так как скорость ползуна горизонтальна и $v_{Cy} = 0$, система пяти векторных уравнений (или десяти скалярных уравнений в проекциях на оси x, y) содержит десять неизвестных: ω_{ABz}, ω_{BDz}, ω_{ACz}, v_{Ax}, v_{Ay}, v_{Bx}, v_{By}, v_{Ex}, v_{Ey}, v_{Cx}. Решая ее, получаем проекции скоростей,

$$v_{Ax} = v_{Bx} = v_{Ex} = -0.866 \text{ м/с},$$
$$v_{Ay} = v_{By} = v_{Ey} = -0.5 \text{ м/с}, \quad v_{Cx} = -1.366 \text{ м/с},$$

и угловые скорости,

$$\omega_{BDz} = 2.5 \text{ рад/с}, \quad \omega_{ABz} = 0, \quad \omega_{ACz} = -1.571 \text{ рад/с}.$$

2. Вычисляем ускорения точек A, B, C, E. Составляем кинематические уравнения с учетом того, что, по условию, стержень OA вращается равномерно: $\varepsilon_{OAz} = 0$,

$$\begin{aligned}
&\vec{\varepsilon}_{OA} \times \vec{OA} + \vec{\varepsilon}_{AB} \times \vec{AB} + \vec{\varepsilon}_{BD} \times \vec{BD} + \vec{\omega}_{OA} \times (\vec{\omega}_{OA} \times \vec{OA}) + \\
&\qquad + \vec{\omega}_{AB} \times (\vec{\omega}_{AB} \times \vec{AB}) + \vec{\omega}_{BD} \times (\vec{\omega}_{BD} \times \vec{BD}) = 0, \\
&\vec{a}_A = \vec{\omega}_{OA} \times (\vec{\omega}_{OA} \times \vec{OA}), \\
&\vec{a}_B = \vec{\varepsilon}_{BD} \times \vec{DB} + \vec{\omega}_{BD} \times (\vec{\omega}_{BD} \times \vec{DB}), \\
&\vec{a}_C = \vec{a}_A + \vec{\varepsilon}_{AC} \times \vec{AC} + \vec{\omega}_{AC} \times (\vec{\omega}_{AC} \times \vec{AC}), \\
&\vec{a}_E = \vec{a}_A + \vec{\varepsilon}_{AB} \times \vec{AE} + \vec{\omega}_{AB} \times (\vec{\omega}_{AB} \times \vec{AE}).
\end{aligned} \tag{3}$$

Первое уравнение в этой системе представляет собой векторную форму записи уравнения трех угловых ускорений четырехзвенника $OABD$ (§ 8.4., с. 183). Так как вектор ускорения ползуна горизонтальный и $a_{Cy} = 0$, система пяти векторных уравнений (или десяти скалярных в проекциях на ось x и ось y) содержит десять неизвестных: ε_{ABz}, ε_{BDz}, ε_{ACz}, a_{Ax}, a_{Ay}, a_{Bx}, a_{By}, a_{Ex}, a_{Ey}, a_{Cx}. Решая систему (3) , получаем проекции ускорений,

$$a_{Ax} = a_{Bx} = a_{Ex} = 1 \text{ м/с}^2, \quad a_{Ay} = -1.732 \text{ м/с}^2,$$
$$a_{By} = -2.309 \text{ м/с}^2, \quad a_{Ey} = -2.021 \text{ м/с}^2, \quad a_{Cx} = 0.839 \text{ м/с}^2,$$

и угловые ускорения,

$$\varepsilon_{BDz} = 0.722 \text{ рад/с}^2, \ \varepsilon_{ABz} = -1.443 \text{ рад/с}^2, \ \varepsilon_{ACz} = -2.974 \text{ рад/с}^2.$$

Концы векторов ускорений точек неизменяемого отрезка лежат на одной прямой. Точка E лежит в центре отрезка AB. Отсюда следует простая проверка решения: $a_{Ex} = (a_{Ax}+a_{Bx})/2$, $a_{Ey} = (a_{Ay}+a_{By})/2$.

3. Вычисляем силы тяжести и силы инерции материальных точек.

Вычисляем силы тяжести:

$$G_{Ay} = -m_A g = -19.62 \text{ Н}, \quad G_{By} = -m_B g = -29.43 \text{ Н},$$
$$G_{Cy} = -m_C g = -39.24 \text{ Н}, \quad G_{Ey} = -m_E g = -49.05 \text{ Н}.$$

Вычисляем силы инерции $\vec{\Phi} = -m\vec{a}$ по Даламберу: [1]

$$
\begin{aligned}
&\Phi_{Ax} = -m_A a_{Ax} = -2 \text{ Н}, && \Phi_{Ay} = -m_A a_{Ay} = 3.464 \text{ Н},\\
&\Phi_{Bx} = -m_B a_{Bx} = -3 \text{ Н}, && \Phi_{By} = -m_B a_{By} = 6.927 \text{ Н},\\
&\Phi_{Ex} = -m_E a_{Ex} = -5 \text{ Н}, && \Phi_{Ey} = -m_E a_{Ey} = 10.105 \text{ Н},\\
&\Phi_{Cx} = -m_C a_{Cx} = -3.356 \text{ Н}.
\end{aligned}
$$

Силу трения направляем в сторону, противоположную движению ползуна. Моменты трения вращают в сторону, противоположную вращению соответствующего кривошипа:

$$
\begin{aligned}
&F_{\text{тр}.x} = -F_{\text{тр}} v_{Cx}/|v_{Cx}|,\\
&M_{\text{тр}.BDz} = -M_{\text{тр}}\omega_{BDz}/|\omega_{BD}|,\ \ M_{\text{тр}.OAz} = -M_{\text{тр}}\omega_{OAz}/|\omega_{OA}|.
\end{aligned}
$$

4. Записываем общее уравнение динамики:

$$
\begin{gathered}
G_{Ay}v_{Ay} + G_{By}v_{By} + G_{Cy}v_{Cy} + G_{Ey}v_{Ey} + F_{\text{тр}.x}v_{Cx} + \Phi_{Ax}v_{Ax} +\\
+ \Phi_{Ay}v_{Ay} + \Phi_{Bx}v_{Bx} + \Phi_{By}v_{By} + \Phi_{Ex}v_{Ex} + \Phi_{Ey}v_{Ey} +\\
+ \Phi_{Cx}v_{Cx} + M_{OAz}\omega_{OAz} + M_{\text{тр}.OAz}\omega_{OAz} + M_{\text{тр}.BDz}\omega_{BDz} = 0.
\end{gathered} \tag{4}
$$

Заметим, что слагаемые $\Phi_{Ax}v_{Ax}$ и $\Phi_{Ay}v_{Ay}$ дают в сумме мощность силы $\vec{\Phi}_A$, равную нулю, так как при равномерном вращении звена OA сила $\vec{\Phi}_A = -m_A\vec{a}$ является центробежной силой инерции и ее момент относительно O равен нулю. Отсюда равна нулю и ее мощность.

Находим из уравнения (4) искомый момент: $M_{OA} = 140.69$ Нм.

Условия задач. *Плоский шарнирно-стержневой механизм с одной степенью свободы движется в вертикальной плоскости под действием сил тяжести и момента M, который вращает звено OA с постоянной угловой скоростью ω_{OA}. В узлах A, B, C и в центре E звена AB расположены материальные точки. На осях неподвижных шарниров O и D имеется трение с постоянным моментом $M_{тр}$. Сила сопротивления движению ползуна — $F_{тр}$, остальные связи идеальные. Пренебрегая массами стержней, определить значение момента M.*

[1] *Жан Лерон Даламбер* (1717–1783) — французский математик, механик, философ.