

## Глава 2

# ПРОИЗВОЛЬНАЯ ПЛОСКАЯ СИСТЕМА СИЛ

Изучив в предыдущем разделе систему сходящихся сил и уравнения проекций, в разделе ПРОИЗВОЛЬНАЯ ПЛОСКАЯ СИСТЕМА СИЛ вы научитесь составлять уравнения моментов, более эффективно находить усилия в стержнях фермы и определять реакции опор составных конструкций.

Почти все задачи этого раздела заканчиваются решением системы линейных уравнений. Простейший способ выполнения этой трудоемкой процедуры с помощью Maple V приведен на с. 13.

### 2.1. Равновесие тяжелой рамы

*Постановка задачи. Тяжелая однородная рама расположена в вертикальной плоскости и опирается на неподвижный шарнир и наклонный невесомый стержень. К раме приложены внешние сосредоточенные силы и моменты. Учитывая погонный вес рамы, найти реакции опор.*

#### План решения

1. Согласно аксиоме о связях, освобождаем раму от связей. Действие опор заменяем их реакциями. Выбираем систему координат. В неподвижном шарнире имеются две неизвестные составляющие реакции (горизонтальная и вертикальная), а в невесомом опорном стержне — одна неизвестная реакция, направленная вдоль стержня. Все наклонные силы раскладываем на составляющие вдоль осей координат.

2. К центру каждого участка рамы прикладываем его вес, вычисленный по формуле  $G_k = l_k \rho$ , где  $l_k$  — длина участка,  $\rho$  — погонный вес рамы (вес единицы длины стержня, из которого составлена рама).

3. Составляем уравнение моментов всех сил, действующих на раму, относительно неподвижного шарнира. Определяем из этого уравнения реакцию опорного стержня.

4. Составляем уравнения проекций всех сил на оси  $x$  и  $y$ . Из этих уравнений определяем составляющие реакции неподвижного шарнира (горизонтальную и вертикальную).

5. Выполняем проверку решения, составляя уравнение моментов относительно какой-либо точки, не лежащей на линиях действия искомых реакций.

**ПРИМЕР.** Тяжелая однородная рама расположена в вертикальной плоскости и опирается на неподвижный шарнир  $A$  и наклонный невесомый стержень  $H$ . К раме приложены внешние сосредоточенные силы  $P = 20$  кН,  $Q = 10$  кН и момент  $M = 100$  кНм. Дано:  $\gamma = 60^\circ$ ,  $\alpha = 60^\circ$ ,  $\beta = 60^\circ$ ,  $AB = 2$  м,  $BC = 4$  м,  $CD = 6$  м,  $DH = 4$  м,  $KC = 2$  м (рис. 20). Учитывая погонный вес рамы  $\rho = 4$  кН/м, найти реакции опор.

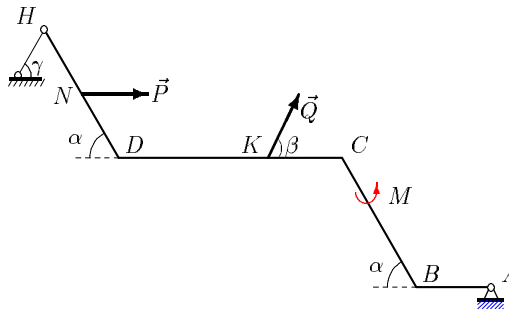


Рис. 20

### РЕШЕНИЕ

1. Освобождаем раму от связей. Действие опор заменяем их реакциями (рис. 21). Выбираем систему координат с началом в точке  $A$ . В неподвижном шарнире  $A$  реакция  $R_A$  имеет две неизвестные компоненты  $X_A$  и  $Y_A$ . Невесомый опорный стержень в шарнире  $H$  заменяем на его реакцию, направленную по стержню (т.е. под углом  $\gamma$  к горизонту).

2. К центру каждого участка рамы (всего четыре прямолинейных участка) прикладываем его вес, вычисленный по формуле  $G_k = l_k \rho$ , где  $l_k$ ,  $k = 1, \dots, 4$  — длины отрезков рамы  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  и  $DH$ ,  $\rho$  — погонный вес рамы.

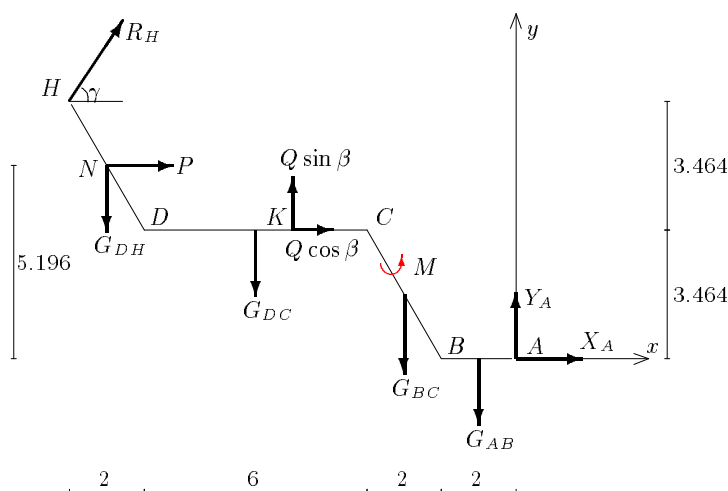


Рис. 21

3. Составляем уравнение моментов относительно шарнира  $A$ , выделяя в нем для удобства счета отдельные слагаемые:

$$\sum M_A = M_A(R_H) + M_A(P) + M_A(Q) + M_A(G_k) + M = 0. \quad (1)$$

Момент  $M_A(R_H)$  реакции опоры

$$M_A(R_H) = R_H h = -R_H((HD + CB) \sin \alpha \cos \gamma + (HD \cos \alpha + DC + CB \cos \alpha + AB) \sin \gamma),$$

где  $h$  — плечо реакции  $R_H$  взятое со знаком момента.

Моменты сил  $P$  и  $Q$  и момент  $M_A(G_k)$  сил тяжести участков:

$$M_A(P) = -P(ND + CB) \sin \alpha = -103.923 \text{ кНм},$$

$$M_A(Q) = -Q \cos \beta CB \sin \alpha - Q \sin \beta (KC + CB \cos \alpha + AB) = -69.282 \text{ кНм},$$

$$M_A(G_k) = G_{DH}((ND + CB) \cos \alpha + DC + AB) + G_{DC}(DC/2 + CB \cos \alpha + AB) + G_{CB}(CB/2 \cos \alpha + AB) + G_{AB}AB/2.$$

Вычисляя величины сил тяжести участков

$$G_{AB} = 2 \cdot 4 = 8 \text{ кН}, \quad G_{BC} = 4 \cdot 4 = 16 \text{ кН},$$

$$G_{DC} = 6 \cdot 4 = 24 \text{ кН}, \quad G_{DH} = 4 \cdot 4 = 16 \text{ кН},$$

получаем  $M_A(G_k) = 400$  кНм.

В итоге уравнение моментов (1) принимает вид

$$-13.856R_H - 103.923 - 69.282 + 400 + 100 = 0.$$

Отсюда находим реакцию стержня

$$R_H = \frac{326.795}{13.856} = 23.584 \text{ кН.}$$

4. Реакции  $X_A$  и  $Y_A$  определяем из уравнений проекций:

$$\sum X_i = X_A + Q \cos \beta + R_H \cos \gamma + P = 0,$$

$$X_A = -36.792 \text{ кН,}$$

$$\sum Y_i = Y_A - G_{AB} - G_{BC} - G_{DC} - G_{DH} + Q \sin \beta + R_H \sin \gamma = 0,$$

$$Y_A = 34.915 \text{ кН.}$$

Ответы заносим в таблицу. Моменты — в кНм, силы — в кН.

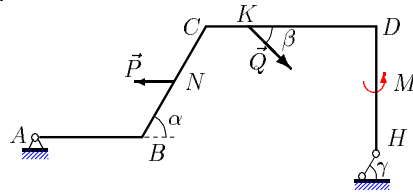
$M_A(Q)$	$M_A(P)$	$\sum_k M_A(G_k)$	$h$	$X_A$	$Y_A$	$R_H$
-69.282	-103.923	400	-13.856	-36.792	34.915	23.584

5. Проверка. Составляем сумму моментов всех сил, действующих на раму, включая найденные реакции опор, относительно произвольной точки, например,  $K$ . Этот выбор оправдывается тем, что в уравнение моментов войдут все найденные реакции, а известная сила  $Q$  не войдет (ее проверять не требуется), и уравнение будет на два слагаемых короче

$$\begin{aligned} \sum M_K = & -R_H \cdot 3.464 \cos \gamma - R_H \cdot 6 \sin \gamma - P \cdot 1.732 + M + G_{DH} \cdot 5 + \\ & + G_{DC} \cdot 1 - G_{BC} \cdot 3 - G_{AB} \cdot 5 + Y_A \cdot 6 + X_A \cdot 3.464 = 0. \end{aligned}$$

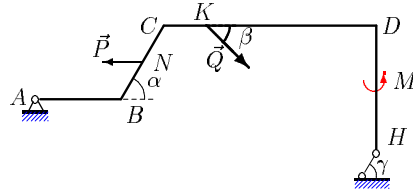
*УСЛОВИЯ ЗАДАЧ. Тяжелая однородная рама расположена в вертикальной плоскости и опирается на неподвижный шарнир  $A$  и наклонный невесомый стержень  $H$ . К раме приложены горизонтальная сила  $P$ , наклонная сила  $Q$  и момент  $M$ . Учитывая погонный вес рамы  $\rho$ , найти реакции опор.*

1.



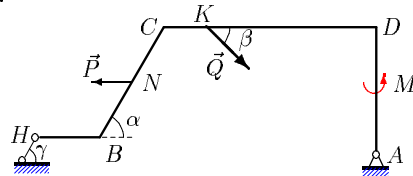
$\rho = 1 \text{ кН/м}$ ,  $P = 5 \text{ кН}$ ,  
 $Q = 11 \text{ кН}$ ,  $M = 30 \text{ кНм}$ ,  
 $\alpha = 60^\circ$ ,  $\beta = 30^\circ$ ,  $\gamma = 30^\circ$ ,  
 $AB = 5 \text{ м}$ ,  $BC = 6 \text{ м}$ ,  
 $CD = 8 \text{ м}$ ,  $DH = 6 \text{ м}$ ,  
 $CK = 2 \text{ м}$ ,  $CN = 3 \text{ м}$ .

2.



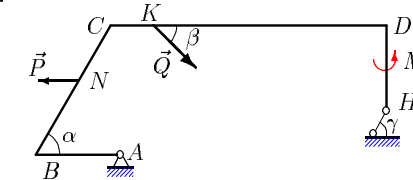
$\rho = 2 \text{ кН/м}$ ,  $P = 6 \text{ кН}$ ,  
 $Q = 12 \text{ кН}$ ,  $M = 50 \text{ кНм}$ ,  
 $\alpha = 60^\circ$ ,  $\beta = 30^\circ$ ,  $\gamma = 45^\circ$ ,  
 $AB = 4 \text{ м}$ ,  $BC = 4 \text{ м}$ ,  
 $CD = 10 \text{ м}$ ,  $DH = 6 \text{ м}$ ,  
 $CK = 2 \text{ м}$ ,  $CN = 2 \text{ м}$ .

3.



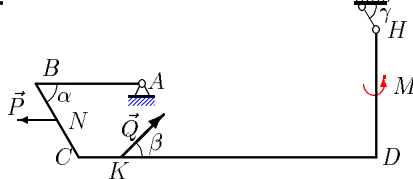
$\rho = 3 \text{ кН/м}$ ,  $P = 8 \text{ кН}$ ,  
 $Q = 13 \text{ кН}$ ,  $M = 70 \text{ кНм}$ ,  
 $\alpha = 60^\circ$ ,  $\beta = 45^\circ$ ,  $\gamma = 60^\circ$ ,  
 $HB = 3 \text{ м}$ ,  $BC = 6 \text{ м}$ ,  
 $CD = 10 \text{ м}$ ,  $DA = 6 \text{ м}$ ,  
 $CK = 2 \text{ м}$ ,  $CN = 3 \text{ м}$ .

4.



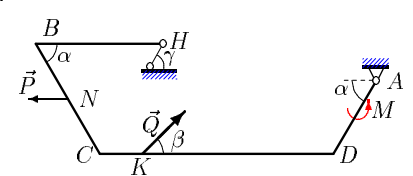
$\rho = 1 \text{ кН/м}$ ,  $P = 6 \text{ кН}$ ,  
 $Q = 14 \text{ кН}$ ,  $M = 30 \text{ кНм}$ ,  
 $\alpha = 60^\circ$ ,  $\beta = 45^\circ$ ,  $\gamma = 30^\circ$ ,  
 $AB = 4 \text{ м}$ ,  $BC = 7 \text{ м}$ ,  
 $CD = 13 \text{ м}$ ,  $DH = 4 \text{ м}$ ,  
 $CK = 2 \text{ м}$ ,  $CN = 3 \text{ м}$ .

5.



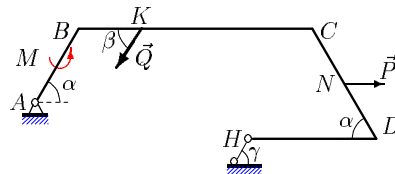
$\rho = 2 \text{ кН/м}$ ,  $P = 7 \text{ кН}$ ,  
 $Q = 15 \text{ кН}$ ,  $M = 50 \text{ кНм}$ ,  
 $\alpha = 60^\circ$ ,  $\beta = 45^\circ$ ,  $\gamma = 45^\circ$ ,  
 $AB = 5 \text{ м}$ ,  $BC = 4 \text{ м}$ ,  
 $CD = 14 \text{ м}$ ,  $DH = 6 \text{ м}$ ,  
 $CK = 2 \text{ м}$ ,  $CN = 2 \text{ м}$ .

6.



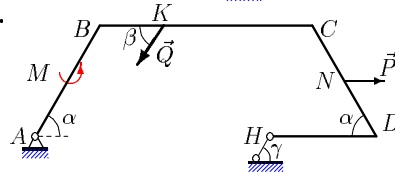
$\rho = 3 \text{ кН/м}$ ,  $P = 8 \text{ кН}$ ,  
 $Q = 16 \text{ кН}$ ,  $M = 70 \text{ кНм}$ ,  
 $\alpha = 60^\circ$ ,  $\beta = 45^\circ$ ,  $\gamma = 60^\circ$ ,  
 $HB = 6 \text{ м}$ ,  $BC = 6 \text{ м}$ ,  
 $CD = 11 \text{ м}$ ,  $DA = 4 \text{ м}$ ,  
 $CK = 2 \text{ м}$ ,  $CN = 3 \text{ м}$ .

7.



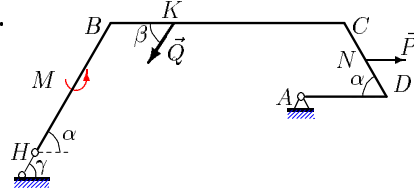
$\rho = 1 \text{ кН/м}$ ,  $P = 7 \text{ кН}$ ,  
 $Q = 17 \text{ кН}$ ,  $M = 30 \text{ кНм}$ ,  
 $\alpha = 60^\circ$ ,  $\beta = 60^\circ$ ,  $\gamma = 30^\circ$ ,  
 $AB = 4 \text{ м}$ ,  $BC = 11 \text{ м}$ ,  
 $CD = 6 \text{ м}$ ,  $DH = 6 \text{ м}$ ,  
 $BK = 3 \text{ м}$ ,  $CN = 3 \text{ м}$ .

8.



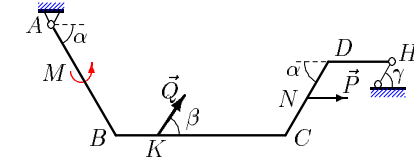
$\rho = 2 \text{ кН/м}$ ,  $P = 8 \text{ кН}$ ,  
 $Q = 18 \text{ кН}$ ,  $M = 50 \text{ кНм}$ ,  
 $\alpha = 60^\circ$ ,  $\beta = 60^\circ$ ,  $\gamma = 45^\circ$ ,  
 $AB = 6 \text{ м}$ ,  $BC = 10 \text{ м}$ ,  
 $CD = 6 \text{ м}$ ,  $DH = 5 \text{ м}$ ,  
 $BK = 3 \text{ м}$ ,  $CN = 3 \text{ м}$ .

9.



$\rho = 3 \text{ кН/м}$ ,  $P = 9 \text{ кН}$ ,  
 $Q = 19 \text{ кН}$ ,  $M = 70 \text{ кНм}$ ,  
 $\alpha = 60^\circ$ ,  $\beta = 60^\circ$ ,  $\gamma = 60^\circ$ ,  
 $HB = 7 \text{ м}$ ,  $BC = 11 \text{ м}$ ,  
 $CD = 4 \text{ м}$ ,  $DA = 4 \text{ м}$ ,  
 $BK = 3 \text{ м}$ ,  $CN = 2 \text{ м}$ .

10.



$\rho = 2 \text{ кН/м}$ ,  $P = 8 \text{ кН}$ ,  
 $Q = 20 \text{ кН}$ ,  $M = 50 \text{ кНм}$ ,  
 $\alpha = 60^\circ$ ,  $\beta = 60^\circ$ ,  $\gamma = 45^\circ$ ,  
 $AB = 6 \text{ м}$ ,  $BC = 8 \text{ м}$ ,  
 $CD = 4 \text{ м}$ ,  $DH = 3 \text{ м}$ ,  
 $BK = 2 \text{ м}$ ,  $CN = 2 \text{ м}$ .

Ответы

№	$M_A(Q)$	$M_A(P)$	$\Sigma_k M_A(G_k)$	$h$	$X_A$	$Y_A$	$R_H$
	кНм						
1	-104.500	12.990	-243.5	8.696	-34.901	12.963	35.074
2	-84.000	10.392	-468.0	13.107	-30.914	27.478	37.508
3	18.385	27.215	487.5	-14.258	-22.341	47.561	42.298
4	-74.862	20.785	-104.3	4.464	-28.795	23.526	28.746
5	26.136	-12.124	-187.0	9.571	5.480	38.307	12.850
6	-85.259	-6.928	754.5	-9.526	-41.750	3.112	76.873
7	-44.167	-6.062	-251.5	6.500	-34.704	20.820	41.805
8	-46.765	-20.785	-487.0	7.778	-44.868	23.720	64.867
9	131.636	-15.588	281.3	-9.526	-24.027	51.973	49.054
10	138.564	27.713	-313.0	12.538	-23.455	19.225	7.714

**Предупреждение типичных ошибок**

1. При вычислении весов участков рамы не надо мельчить участки. Берите прямолинейные участки от одного изгиба до другого или до опоры.

2. Вычисляя момент наклонной силы, учитывайте обе ее составляющие. Не забывайте, что плечо силы относительно точки равно расстоянию от точки до *линии действия силы*, а не до точки приложения силы.

3. Знак сосредоточенного момента (пары) в уравнении моментов не зависит от взаимного расположения точки приложения момента и точки, относительно которой уравнение составляется. Он определяется самим моментом (против часовой стрелки “плюс”, по часовой стрелке “минус”). Точка приложения пары не требует точного задания, так как по свойству пары ее можно переносить в любую точку тела, не меняя воздействия на тело.

4. Точку приложения силы можно переносить вдоль линии действия силы, не меняя воздействия силы на тело (вектор силы в теоретической механике является *скользящим*). Перенеся силу вдоль ее линии действия поближе к точке, относительно которой вычисляется ее момент, можно упростить определение момента.

5. Наклонный стержень одним концом закреплен на неподвижном шарнире. Часто вместо того, чтобы просто отбросить стержень и приложить к телу одну силу  $R_H$ , направленную вдоль стержня, студент изображает две реакции этого шарнира, после чего в задаче количество неизвестных становится больше, чем уравнений. Одновременно с такой ошибкой возникает вопрос, чему равна длина наклонного опорного стержня? Длина стержня в задаче не дана.

6. Вес участков рамы учитывайте только в тех задачах, где это оговорено. В данной задаче рама имеет вес.

## 2.2. Ферма. Аналитические методы расчета

**Постановка задачи.** *Плоская ферма опирается на неподвижный и подвижный шарниры. К узлам фермы приложены нагрузки. Найти усилия в стержнях фермы методом Риттера<sup>\*)</sup> или методом вырезания узлов.*

---

<sup>\*)</sup> Август Риттер (1826-1906) — немецкий механик.