Глава 14

МАЛЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМЫ

В разделе МАЛЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМЫ вы научитесь определять частоты малых собственных колебаний механической системы с двумя степенями свободы. Другие темы этого раздела, количество которых так велико, что они могут составить содержание отдельной книги, остались за пределами РЕШЕБНИКА. Задачи о вынужденных колебаниях, колебаниях при наличии сопротивления и многие другие содержатся, например, в книгах [26], [28].

14.1. Система с двумя степенями свободы

Постановка задачи. *Механическая система с двумя степенями свободы состоит из твердых тел, соединенных линейно упругими пружинами. Определить частоты собственных колебаний системы.*

План решения

Задачу решаем с помощью уравнения Лагранжа 2-го рода.

1. Выбираем две обобщенные координаты $x_1,\ x_2$.

2. Вычисляем кинетическую энергию и обобщенные силы. Составляем два уравнения Лагранжа 2-го рода.

3. Записываем полученную систему в стандартной форме уравнений колебаний системы с двумя степенями свободы:

$$\begin{aligned} a_{11}\ddot{x}_1 + a_{12}\ddot{x}_2 + c_{11}x_1 + c_{12}x_2 = 0, \\ a_{21}\ddot{x}_1 + a_{22}\ddot{x}_2 + c_{12}x_1 + c_{22}x_2 = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

где $a_{ij}, i,j = 1,2$ — *инерционные коэффициенты*, $\mathrm{c}_{ij}, i,j = 1,2$ — *обобщенные коэффициенты жесткости* или *квазиупругие коэффициенты*. Решение системы (1) будем искать в форме $x_1 = A_1 \sin(\omega t + \beta_0)$, $x_2 = A_2 \sin(\omega t + \beta_0)$, где A_1, A_2, β_0 — неизвестные постоянные; ω — круговая частота колебаний. Система (1) после сокращения на $\sin(\omega t + \beta_0)$ примет вид

$$\begin{aligned} (c_{11} - a_{11}\omega^2)A_1 + (c_{12} - a_{12}\omega^2)A_2 = 0, \\ (c_{12} - a_{12}\omega^2)A_1 + (c_{22} - a_{22}\omega^2)A_2 = 0. \end{aligned} \tag{2}$$

4. Условием существования нетривиального решения системы (2) для A_1 и A_2 является равенство определителя системы нулю. Отсюда получаем уравнение частот:

$$(c_{11} - a_{11}\omega^2)(c_{22} - a_{22}\omega^2) - (c_{12} - a_{12}\omega^2)^2 = 0. \tag{3}$$

5. Решая (3), находим частоты колебаний системы.

Пример. Механическая система с двумя степенями свободы состоит из двух однородных цилиндров и двух линейно упругих пружин. Цилиндр A массой $m_A = 50$ кг может кататься без проскальзывания и трения качения по горизонтальной поверхности. Его ось соединена с неподвижной стенкой горизонтальной пружиной 1. Ободы цилиндров связаны нитью и пружиной 2. Цилиндр B массой $m_B = 20$ кг вращается вокруг неподвижной оси. Жесткость пружин, работающих и на сжатие и на растяжение, одинакова: $c = 90$ Н/м. Массой пружин пренебречь. Найти частоты собственных колебаний системы.

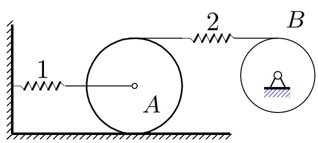

Рис. 173

Решение [1]

Задачу решим двумя способами. Различие между ними — в выборе обобщенных координат и форме вычисления обобщенных сил в уравнении Лагранжа.

1-й способ

1. В качестве обобщенных координат выбираем удлинения пружин (рис. 174). Связи предполагаем идеальными и их реакции на рисунке не показываем.

2. Кинетическую энергию системы, состоящую из суммы кинетических энергий двух тел: $T = T_A + T_B$, выражаем через обобщенные скорости $\dot{x}_1$ и $\dot{x}_2$. Кинетическая энергия однородного цилиндра A, катящегося без проскальзывания по неподвижной плоскости, вычисляется по формуле (4) на с. 242:

$$T_A = (3/4)m_A\dot{x}_1^2. \tag{4}$$

Кинетическая энергия вращения цилиндра B вокруг неподвижной оси имеет вид $T_B = J_B\omega_B^2/2$, где $J_B = m_BR_B^2/2$.

[1] Решение задачи в системе Maple см. § 17.3., с. 368

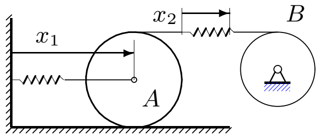

Рис. 174

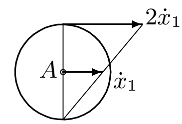

Рис. 175

Левый конец пружины 2 движется со скоростью $2\dot{x}_1$ (рис. 175), скорость удлинения пружины $\dot{x}_2$. Скорость правого конца пружины равна скорости точки обода цилиндра B и равна сумме $2\dot{x}_1+\dot{x}_2$, отсюда $\omega_B = (2\dot{x}_1+\dot{x}_2)/R_B$ — угловая скорость вращения цилиндра B. Таким образом, получаем: $T_B = m_B(2\dot{x}_1+\dot{x}_2)^2/4$. Кинетическая энергия всей системы

$$T = (3/4)m_A\dot{x}_1^2 + (1/4)m_B(2\dot{x}_1+\dot{x}_2)^2.$$

Для того, чтобы вычислить обобщенную силу Q_1, даем возможное перемещение (удлинение) δx_1 пружине 1, фиксируя удлинение пружины 2, или заменяя пружину 2 нерастяжимой нитью (рис. 176).

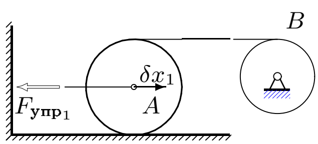

Рис. 176

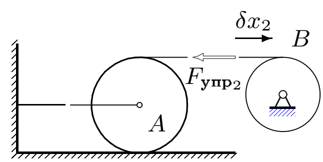

Рис. 177

Воспользуемся формулой $Q_1 = \delta A_1/\delta x_1$, где $\delta A_1 = -F_{\text{упр}_1}\delta x_1$. Так как $F_{\text{упр}_1} = cx_1$, то $Q_1 = -cx_1$. Аналогично, фиксируя удлинение пружины 1, растягиваем пружину 2 на δx_2 (рис. 177) и вычисляем $\delta A_2 = -F_{\text{упр}_2}\delta x_2$. Отсюда $Q_2 = -cx_2$.

Записываем систему уравнений Лагранжа 2-го рода:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial x_1} = Q_1,$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2}\right) - \frac{\partial T}{\partial x_2} = Q_2.$$

Вычисляем производные, входящие в уравнения Лагранжа:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} = 1.5m_A\dot{x}_1 + m_B(2\dot{x}_1+\dot{x}_2), \qquad \frac{\partial T}{\partial x_1} = 0,$$
$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} = 0.5m_B(2\dot{x}_1+\dot{x}_2), \qquad \frac{\partial T}{\partial x_2} = 0.$$

Уравнения Лагранжа принимают вид

$$
\begin{aligned}
&(2m_B + 1.5m_A)\ddot{x}_1 + m_B\ddot{x}_2 = -cx_1,\\
&m_B\ddot{x}_1 + 0.5m_B\ddot{x}_2 = -cx_2.
\end{aligned} \tag{5}
$$

3. Записываем (5) в стандартной форме уравнений колебаний системы с двумя степенями свободы (1). Инерционные коэффициенты для данного примера имеют вид

$$a_{11} = 2m_B + 1.5m_A,\ a_{12} = a_{21} = m_B,\ a_{22} = 0.5m_B.$$

Коэффициенты жесткости системы $c_{11} = c_{22} = c, c_{12} = c_{21} = 0$. Коэффициенты жесткости и инерционные коэффициенты образуют симметричные матрицы. Предполагая, что каждая обобщенная координата меняется по закону гармонических колебаний, решение системы (1) ищем в форме

$$x_1 = A_1\sin(\omega t + \beta_0),\ x_2 = A_2\sin(\omega t + \beta_0),$$

где $A_1, A_2, \omega, \beta_0$ — неизвестные постоянные. Система (5) после сокращения на $\sin(\omega t + \beta_0)$ принимает вид

$$
\begin{aligned}
&(c - (2m_B + 1.5m_A)\,\omega^2)A_1 - m_B\omega^2 A_2 = 0,\\
&-m_B\omega^2 A_1 + (c - 0.5m_B\omega^2)A_2 = 0.
\end{aligned} \tag{6}
$$

Из условия существования нетривиального решения этой системы для A_1 и A_2 получаем уравнение частот:

$$\frac{3}{4}m_A m_B\omega^4 - \frac{3m_A + 5m_B}{2}c\omega^2 + c^2 = 0. \tag{7}$$

Подставляем числовые данные задачи, решаем биквадратное уравнение (7) и находим две частоты собственных колебаний системы:

$$\omega_1 = 0.871 \text{ рад/с},\quad \omega_2 = 3.774 \text{ рад/с}.$$

2-й способ

1. В качестве первой обобщенной координаты выбираем смещение x цилиндра A, а в качестве другой — угол поворота φ цилиндра B (рис. 178). Таким образом, $q_1 = x$, $q_2 = \varphi$.

2. Кинетическую энергию системы, состоящую из суммы кинетических энергий двух тел, $T = T_A + T_B$, выражаем через обобщенные скорости $\dot{x}$ и $\dot{\varphi}$. Кинетическая энергия цилиндра A вычисляется так же, как и в 1-м способе по формуле (4): $T_A = 3m_A\dot{x}^2/4$. Кинетическая энергия вращения цилиндра B равна

$$T_B = J_B\dot{\varphi}^2/2 = m_B\dot{\varphi}^2R_B^2/4.$$

Кинетическая энергия всей системы $T = (3/4)m_A\dot{x}^2 + m_B\dot{\varphi}^2 R_B^2/4$. Для того, чтобы вычислить обобщенные силы находим потенциальную энергию системы. Силы тяжести работу не совершают, поэтому вся потенциальная энергия содержится в пружинах. Удлинение первой пружины равно x. Левый конец пружины 2 смещается на $2x$, правый — на $R_B\varphi$ в ту же сторону (рис. 179).

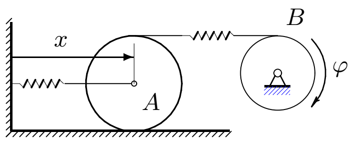

Рис. 178

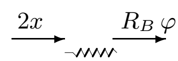

Рис. 179

Удлинение второй пружины равно по модулю $|2x - R_B\varphi|$. Потенциальная энергия пружин, не имеющих предварительного напряжения, имеет вид

$$\Pi = \frac{c}{2}x^2 + \frac{c}{2}(2x - R_B\varphi)^2.$$

Обобщенные силы вычисляем по формулам

$$Q_1 = -\frac{\partial \Pi}{\partial x} = -c(5x - 2R_B\varphi), \;\; Q_2 = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = -c\,R_B\,(R_B\varphi - 2x).$$

Вычисляем производные, входящие в уравнения Лагранжа:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} &= 1.5\,m_A\dot{x}, & \frac{\partial T}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} &= 0.5\,m_B R_B^2\dot{\varphi}, & \frac{\partial T}{\partial \varphi} &= 0. \end{aligned}$$

Уравнения Лагранжа принимают вид

$$\begin{aligned} 1.5\,m_A\ddot{x} &= -c(5x - 2R_B\varphi), \\ 0.5\,m_B R_B^2\ddot{\varphi} &= -cR_B(R_B\varphi - 2x). \end{aligned} \tag{8}$$

3. Записываем (8) в стандартной форме уравнений колебаний системы с двумя степенями свободы (1). Инерционные коэффициенты для данного примера имеют вид

$$a_{11} = 1.5\,m_A, \;\; a_{12} = a_{21} = 0, \;\; a_{22} = 0.5\,m_B R_B^2.$$

Коэффициенты жесткости имеют вид $c_{11} = 5c$, $c_{12} = c_{21} = -2cR_B$, $c_{22} = cR_B^2$. Решение системы (1) ищем в форме гармонических колебаний: $x = A_1\sin(\omega t + \beta_0)$, $\varphi = A_2\sin(\omega t + \beta_0)$, где $A_1, A_2, \omega, \beta_0$ — неизвестные постоянные. Система (8) после сокращения на общий множитель $\sin(\omega t + \beta_0)$ принимает вид

$$\begin{aligned} &(5c - 1.5m_A\,\omega^2)A_1 - 2cR_B A_2 = 0, \\ &-2cA_1 + R_B(c - 0.5m_B\omega^2)A_2 = 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Для неизвестных амплитуд колебаний A_1 и A_2 система (9) является однородной. Из условия существования нетривиального решения приравниваем нулю определитель системы и получаем уравнение частот, в точности совпадающее с (7). Таким образом, с другим набором обобщенных координат мы находим те же частоты: $\omega_{1,2}^2 = (75 \pm \pm 3\sqrt{505})/10$, или $\omega_1 = 0.871$ рад/с, $\omega_2 = 3.774$ рад/с.

Замечание. Решение задачи равносильно отысканию собственных значений матрицы $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{C}$, где $\mathbf{A}$ и $\mathbf{C}$ — матрицы инерционных и квазиупругих коэффициентов. Действительно, представим (1) в виде $\mathbf{A}\,\ddot{\vec{x}}+\mathbf{C}\vec{x} = 0$, где $\vec{x} = \{x_1, x_2\}$. Умножим это уравнение на обратную матрицу $\mathbf{A}^{-1}$. Получаем, что $\ddot{\vec{x}}+\mathbf{A}^{-1}\mathbf{C}\vec{x} = 0$. Решение ищем в форме гармонических колебаний; записываем систему однородных линейных уравнений для амплитуд колебаний, определитель которой имеет вид $\det(-\omega^2\mathbf{E} + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{C})$, где $\mathbf{E}$ — единичная матрица. Таким образом, квадраты частот равны собственным значениям матрицы $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{C}$ (*Решебник ВМ,* §2.10.).

Условия задач. *Механическая система с двумя степенями свободы состоит из двух однородных цилиндров и нескольких линейно упругих пружин с одинаковой жесткостью c. Цилиндры катятся без проскальзывания и сопротивления по горизонтальной поверхности, пружины в положении равновесия не имеют предварительного напряжения. Массой пружин пренебречь. Определить частоты собственных колебаний системы.*