где определение усилий производится *независимо* одно от другого во избежание накопления ошибок.

6. Положение точки Риттера для каждого стержня не зависит от рассматриваемой части. Однако степень сложности уравнения моментов для разных частей фермы может существенно отличаться. Для большей надежности решения уравнение Риттера (в форме уравнения моментов или уравнения проекций) для одной части может служить проверочным для другой.

7. Проверить расчет можно на компьютере. Программа расчета фермы в системе Maple V приведена на с. 345.

2.3. Ферма. Графический расчет

Постановка задачи. *С помощью диаграммы Максвелла–Кремоны*[1] *найти усилия в стержнях фермы.*

План решения

Графический метод расчета ферм является дополнением к аналитическим методам расчета, которые вы изучили в предыдущем параграфе. Диаграмма Максвелла–Кремоны состоит из отдельных силовых многоугольников. Каждый многоугольник соответствует равновесию какого-либо узла фермы.

1. Обозначаем усилия в стержнях фермы.

2. Освобождаем ферму от связей. Действие опор заменяем их реакциями. Составляем три уравнения равновесия. Находим реакции.

3. Проверяем найденные реакции, составляя еще одно уравнение равновесия.

4. Изображаем все силы, действующие на ферму (включая найденные аналитически реакции опор), в виде векторов вне фермы. Если реакция опоры отрицательная, то заменяем ее направление на противоположное. Для графического способа требуются только реальные направления реакций.

5. Обозначаем буквами или цифрами *внешние поля* — области чертежа, разделенные силами и стержнями фермы.

6. Обозначаем буквами или цифрами *внутренние поля* — области, ограниченные стержнями фермы.

7. Внешним нагрузкам и усилиям в стержнях даем новые имена — по соседним с силой (или стержнем) полям.

8. Построение диаграммы Максвелла–Кремоны начинаем с многоугольника внешних сил. Выберем направление обхода фермы (по

[1] *Джеймс Максвелл* (1831–1879) — шотландский физик, математик, астроном. *Антонио Кремона* (1830–1903) — итальянский математик.

часовой стрелке или против). Начинаем с произвольной силы. Откладывая ее в масштабе и соблюдая направление, обозначаем на диаграмме начальную и конечную точку строчными буквами, соответствующими ее новому обозначению по направлению обхода. Следующая сила пристраивается к концу первой и т.д. до замыкания многоугольника внешних сил и реакций опор.

9. Строим точки внутренних полей на диаграмме. Точку, соответствующую внутреннему полю, можно найти, если у этого поля построены точки двух соседних с ней полей.

Таким образом, начинать графический расчет можно с поля, у которого имеется два соседних с ним внешних поля, уже отмеченные на диаграмме. Искомая точка лежит на пересечении прямых, параллельных стержням, имена которых состоят из имени искомой точки и точек найденных внешних полей. Этот пункт выполняем многократно, до полного построения диаграммы. Модули усилий в стержнях равны длинам соответствующих отрезков на диаграмме.

10. Определяем знаки усилий. Рассматриваем шарнир фермы, к которому подходит какая-либо внешняя нагрузка или стержень с усилием известного знака. Равновесие шарнира изображено на диаграмме замкнутым силовым многоугольником с заданным направлением обхода. Сопоставляя направление усилия на диаграмме и его направление в вырезанном узле, определяем знак усилия. Если направление вектора на многоугольнике совпадает с направлением вектора, приложенного к узлу, то усилие больше нуля. В противном случае — усилие меньше нуля, т.е. стержень сжат.

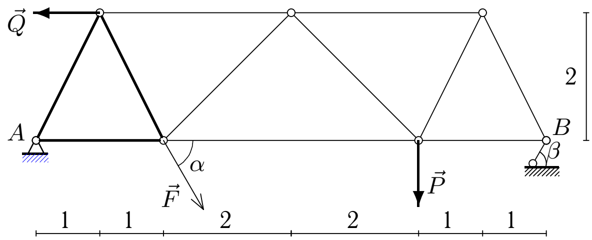

Рис. 28

Пример. С помощью диаграммы Максвелла–Кремоны найти усилия в стержнях фермы (рис. 28). $Q = 15$ кН, $P = 30$ кН, $F = 20$ кН, $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 60^\circ$. Размеры даны в м.

Решение

1. Обозначаем усилия в стержнях фермы так, как это принято в строительной механике. Усилия в стержнях верхнего пояса (слева направо) — $O_1, \ldots, O_4$, диагонали (раскосы) — $D_1, \ldots, D_4$, усилия в нижнем поясе — U_1, U_2, U_3 (рис. 29).

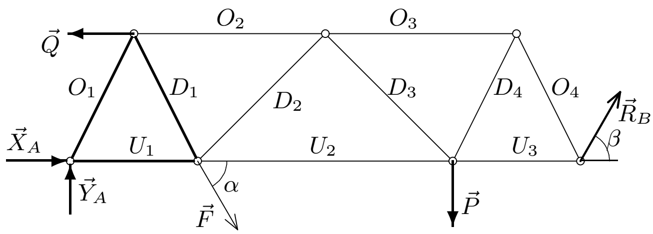

Рис. 29

2. Определяем реакции опор фермы. Реакцию $\vec{R}_B$ направляем вдоль опорного стержня, т.е. под углом β к горизонту (рис. 29). Составляем уравнения равновесия:

$$\sum X_i = X_A - Q + F\cos\alpha + R_B\cos\beta = 0,$$
$$\sum M_A = Q\cdot 2 - F\cdot 2\sin\alpha + R_B\cdot 8\sin\beta - P\cdot 6 = 0,$$
$$\sum M_B = Q\cdot 2 + F\cdot 6\sin\alpha - Y_A\cdot 8 + P\cdot 2 = 0.$$

Решаем уравнения и получаем следующие значения:

$$X_A = -8.32 \text{ кН},\ Y_A = 24.24 \text{ кН},\ R_B = 26.65 \text{ кН}.$$

3. Проверяем вертикальные реакции, составляя уравнение проекций на вертикальную ось:

$$\sum Y_i = Y_A - F\sin\alpha - P + R_B\sin\beta = 0.$$

4. Изображаем все силы, действующие на ферму. Реакцию X_A, которая оказалась в результате решения меньше нуля, направляем в противоположную сторону (рис. 30). Величина этой силы $|X_A| = 8.32$ кН.

5. Обозначаем внешние поля — области чертежа, разделенные силами и стержнями фермы, — C, D, E, G, H, I (рис. 31). Чтобы не внести путаницу, не следует использовать буквы A, B, Q, P, F, имеющиеся в задаче для обозначения опор и сил.

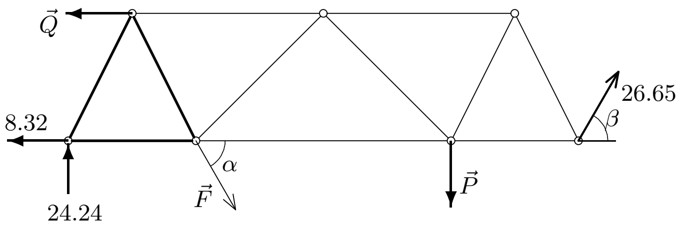

Рис. 30

6. Обозначаем внутренние поля K, L, M, N, R (рис. 31).

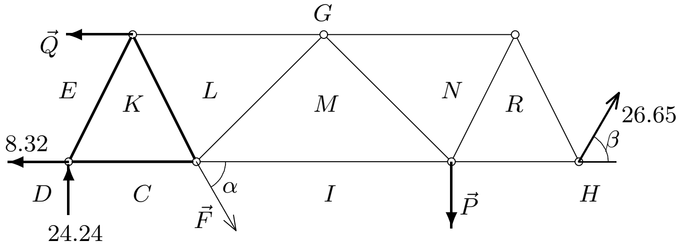

Рис. 31

7. Внешним нагрузкам и усилиям в стержнях даем новые имена — по соседним с силой (или стержнем) полям. Приведем таблицу соответствия имен.

F	P	Q	X_A	Y_A	R_B	O_1	O_2	O_3	O_4	D_1	D_2	D_3	D_4	U_1	U_2	U_3
IC	HI	EG	DE	CD	GH	EK	GK	GN	GR	KL	LM	MN	NR	KC	MI	RH

8. Строим многоугольник внешних сил. Выберем направление обхода фермы по часовой стрелке. Начинаем с произвольной силы, например, $F = 20$ кН. Откладывая в масштабе эту силу и соблюдая ее направление, обозначаем начальную и конечную точку строчными буквами i и c, соответствующими направлению обхода — из поля I в поле C. Следующая по часовой стрелке нагрузка — вертикальная реакция опоры $Y_A = 24.24$ кН. Строим ее в точке с вслед за силой F. Конечную точку помечаем буквой d. Обход фермы продолжаем, пока многоугольник не замкнется. Последней будет сила $P = 30$ кН, обозначенная как HI. Конец ее попадает на исходную точку i (рис. 32).

9. Строим точки внутренних полей на диаграмме. Точку, соответствующую внутреннему полю, можно найти, если у этого поля построены два соседних с ним поля. Таким образом, начинать графический расчет можно с поля R, у которого соседние поля H и G определены на диаграмме, или K с известными соседними полями E и C (рис. 31). Рассматриваем поле K. По направлению стержней EK и KC проводим линии через точки e и c диаграммы. Точка их пересечения — k (рис. 33). Длины ek и kc равны абсолютным значениям усилий в соответствующих стержнях.

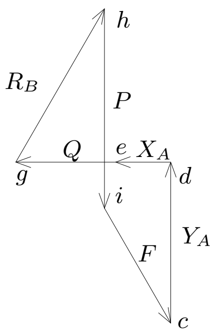

Рис. 32

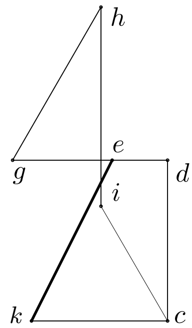

Рис. 33

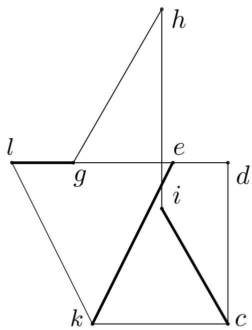

Рис. 34

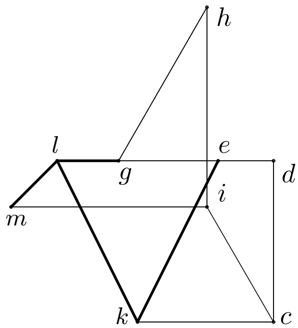

Рис. 35

На рис. 34–37 показано последовательное получение точек l, m, n и r. При получении последней точки автоматически выполняется проверка. Так, если точка r строилась на пересечении линий nr и gr, то проверкой является прямая rh. Если она параллельна соответствующему стержню RH, т.е. горизонтальна, то диаграмма построена верно. Заметим, что для ферм с большим числом узлов построение диаграммы — трудоемкий процесс. Это связано с недостатком метода вырезания узлов, графической интерпретацией которого является диаграмма Максвелла–Кремоны. Недостаток вызван неизбежным накоплением ошибок округления в процессе последовательного расчета узлов.

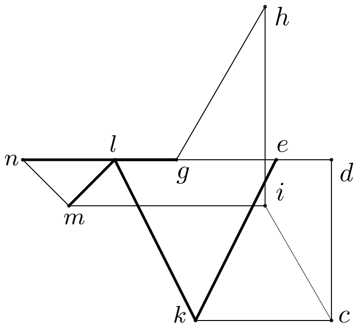

Рис. 36

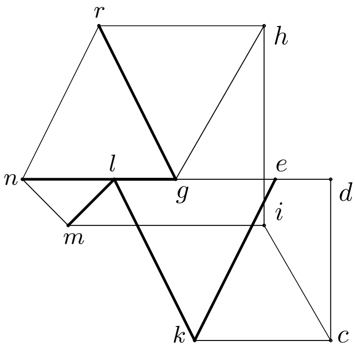

Рис. 37

10. Определяем знаки усилий. Рассмотрим, например, усилие O_1. Вырезаем узел A, к которому приложено усилие O_1. К этому же узлу приложены два известных вектора реакций опор и еще одно усилие U_1 с неизвестным знаком. Как обычно, усилия стержней рисуют выходящими из узла (рис. 38). Затем на диаграмме Максвелла–Кремоны выделяется замкнутый многоугольник сил, изображающий равновесие узла (рис. 39). Направление обхода многоугольника (начало одного вектора совпадает с концом предыдущего) задается по известной силе или по усилию в стержне с ранее определенным знаком.

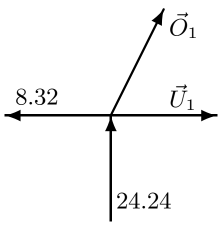

Рис. 38

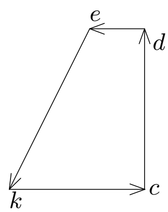

Рис. 39

Здесь обход $cdek$ против часовой стрелки задает реакция опоры $Y_A = 24.24$ кН (cd), или $X_A = 8.32$ кН (de). Если направление вектора на многоугольнике совпадает с направлением вектора, приложенного к узлу, то усилие больше нуля — стержень растянут. В противном случае — усилие O_1 (ek) меньше нуля, что соответствует сжатию стержня. Такие усилия на диаграмме изображаются утолщенными линиями. Кроме того, получаем $U_1 > 0$. Аналогично определяются знаки и других усилий. Заметим, что особенно эффективно рассматривать узлы, к которым подходит много стержней и приложена хотя бы одна внешняя нагрузка.

Окончательные результаты заносим в таблицу:

O_1	O_2	O_3	O_4	D_1	D_2	D_3	D_4	U_1	U_2	U_3
кН										
-27.10	-9.24	-23.08	-25.80	27.10	-9.79	9.79	25.80	20.45	29.49	24.87

Замечание 1. Точность, с которой можно получить усилия графическим способом, обычно невысока. Результаты с тремя знаками после запятой, данные в таблицах, получены, конечно, не графически, а из решения задачи аналитическим методом вырезания узлов [1].

Замечание 2. Графический способ расчета ферм в реальной инженерной практике безнадежно устарел, для расчета пространственных ферм он вообще не годится. Однако в учебных целях, для проверки аналитического решения и как пример изящного и быстрого определения усилий с помощью карандаша и линейки, диаграмма Максвелла–Кремоны сохраняет свое значение.

Замечание 3. В качестве необычной задачи программирования, предлагаем попробовать найти алгоритм автоматического построения диаграммы Максвелла–Кремоны в системе Maple V, Maple 7, Mathematica 4 или в любом другом пакете, позволяющем работать с графикой. Основное требование к программе — не составлять уравнения равновесия узлов фермы в проекциях. Допустимо найти аналитическим методом реакции опор.

Замечание 4. Усилия в стержнях фермы можно найти с помощью принципа возможных перемещений (с. 279). В строительной механике этот метод называют кинематическим.

Условия задач. *С помощью диаграммы Максвелла–Кремоны найти усилия в стержнях плоской фермы, находящейся под действием вертикальной силы P, наклонной F и горизонтальной Q. Одна опора фермы — неподвижный шарнир, другая — наклонный опорный стержень. Размеры даны в метрах, нагрузки — в килоньютонах.*

[1] Программа расчета в системе Maple V приведена на с. 345.