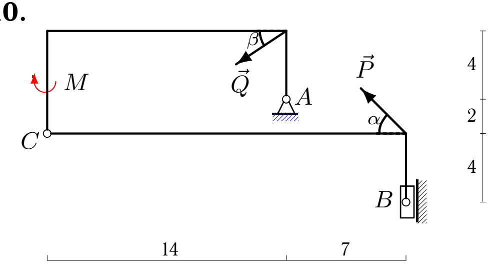
10.



$Q = 60$ кН,
$M = 120$ кНм,
$\alpha = 45°$, $\beta = 30°$,
$f = 0.1$.

Ответы

№	$P_{\min}$	$N_{(\min)}$	$P_{\max}$	$N_{(\max)}$
1	35.019	28.238	115.080	105.197
2	47.392	22.726	54.669	27.028
3	48.951	36.266	163.360	154.415
4	14.705	66.891	27.849	54.217
5	38.807	18.191	41.937	22.466
6	37.163	19.446	40.139	19.216
7	67.892	61.674	120.648	99.826
8	103.805	49.694	112.148	58.682
9	45.587	41.872	139.065	113.924
10	2.319	18.121	6.877	16.740

3.2. Трение качения

Постановка задачи. *Система состоит из двух цилиндров, соединенных стержнем. Цилиндры могут кататься без проскальзывания, один цилиндр без — сопротивления, другой — с трением качения. В каких пределах меняется внешний момент, приложенный к одному из цилиндров, в условии равновесия системы?*

Трение качения происходит за счет деформации цилиндра и опорной поверхности в месте контакта. В результате реакция опоры смещается в сторону возможного движения на половину длины площадки контакта и создает момент сопротивления. Плечо этого момента принимают за коэффициент трения качения. Таким образом, $M_{\text{тр}} = N\delta$, где N — реакция опоры, δ — коэффициент трения качения, имеющий размерность длины. Так в рамках теоретической механики, где изучается *твердое* тело, для объяснения явления трения качения вводят гипотезу деформируемости. Считают, что область деформаций в теле мала, а глубиной продавливания цилиндра в поверхность (или величиной смятия цилиндра) пренебрегают. Коэффициент трения качения зависит не только от свойств материала цилиндра и поверхности, но и от радиуса цилиндра.

План решения

1. Задаем направление возможного движения при достижении условия предельного равновесия. К катящемуся телу (цилиндру, колесу) прикладываем момент трения качения, направляя его в сторону, противоположную возможному движению. Не забываем про силу сцепления в точке контакта, направленную вдоль плоскости.

2. Решаем задачу о равновесии системы тел. Используем метод разбиения системы на отдельные тела. Внешние и внутренние связи заменяем их реакциями. Составляем и решаем уравнения равновесия. Оси координат для уравнения проекций для цилиндрических тел выбираем вдоль нормальной реакции, а уравнение моментов составляем относительно точки касания. Из решения системы уравнений равновесия определяем условие предельного равновесия.

3. Меняем направление возможного движения системы и направление момента трения качения. Решаем задачу заново, определяем второе условие предельного равновесия.

Пример. Система состоит из двух цилиндров весом $G_1 = 20$ Н и $G_2 = 30$ Н с одинаковыми радиусами $R = 50$ см, соединенных однородным стержнем веса $G_3 = 40$ Н. Цилиндры могут кататься без проскальзывания, цилиндр 1 — без сопротивления, а цилиндр 2 — с трением качения.

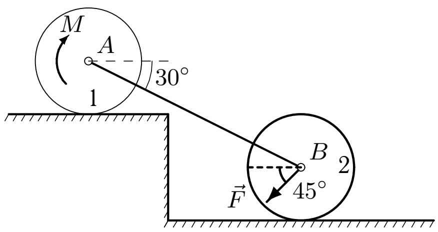


Рис. 55

Коэффициент трения качения $\delta = 2$ мм. К цилиндру 1 приложена пара с моментом M. К оси цилиндра 2 приложена сила $F = 10$ Н (рис. 55). В каких пределах меняется момент M в условии равновесия системы?

Решение

1. Задаем направление возможного движения при достижении условия предельного равновесия. Пусть за счет достаточно большой, по сравнению с моментом M, силы F произойдет движение системы влево. Тогда момент трения качения, приложенный к цилиндру 2, стермится повернуть его по часовой стрелке (рис. 57). Момент трения находим по формуле $M_{\text{тр}} = N_2 \cdot \delta$.

2. Решаем задачу о равновесии системы двух цилиндров и стержня. Разбиваем систему на три тела (рис. 56, 57, 58). Внешние связи заменяем реакциями $F_{\text{сц}1}$, N_1, $F_{\text{сц}2}$, N_2.

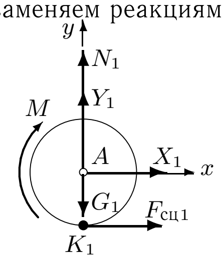


Рис. 56

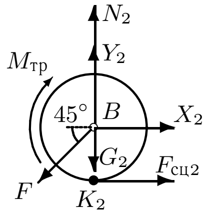


Рис. 57

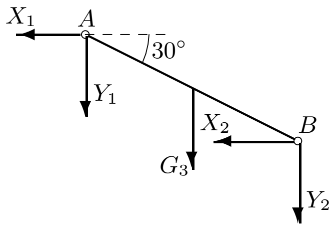


Рис. 58

Реакции $F_{\text{сц}1}$ и $F_{\text{сц}2}$ приложены к цилиндрам в точках их касания поверхностей, вызваны силами сцепления (трения) и обеспечивают вращение цилиндров. Реакции внутренних связей — X_1, Y_1, X_2, Y_2.

При составлении системы семи уравнений с неизвестными X_1, Y_1, N_1, X_2, Y_2, N_2, M избегаем уравнения, в которые входят неизвестные реакции $F_{\text{сц}1}$ и $F_{\text{сц}2}$.

Составляем уравнения равновесия для цилиндра 1 (рис. 56):

$$\begin{aligned} &\sum Y_i^{(\text{цил}1)} = Y_1 + N_1 - G_1 = 0,\\ &\sum M_{K_1}^{(\text{цил}1)} = -X_1 \cdot R - M = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Уравнения равновесия цилиндра 2 (рис. 57) имеют вид

$$\begin{aligned} &\sum Y_i^{(\text{цил}2)} = Y_2 + N_2 - G_2 - F\sin 45^\circ = 0,\\ &\sum M_{K_2}^{(\text{цил}2)} = -X_2 \cdot R - M_{\text{тр}} + F\cos 45^\circ R = 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Уравнения равновесия стержня AB (рис. 58) имеют вид

$$\begin{aligned} &\sum X_i^{(\text{стер})} = -X_1 - X_2 = 0,\\ &\sum Y_i^{(\text{стер})} = -Y_1 - Y_2 - G_3 = 0,\\ &\sum M_A^{(\text{стер})} = -X_2 \cdot AB\sin 30^\circ - Y_2 \cdot AB\cos 30^\circ -\\ &\qquad\qquad - G_3(AB/2)\cos 30^\circ = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Из решения системы уравнений (1–3) определяем

$$M = \frac{\sqrt{3}R}{2} \frac{FR\sqrt{2} - \delta(G_3 + 2G_2 + F\sqrt{2})}{R\sqrt{3} + \delta}. \tag{4}$$

Радиус и коэффициент трения качения переводим в метры $R = 0.5$ м, $\delta = 0.002$ м. Получаем $M = 3.414$ Нм. Вычисляем нормальные реакции опор:

$$N_1 = 36.058 \text{ Н}, \ N_2 = 61.013 \text{ Н}.$$

Убеждаемся, что $N_1 > 0$ и $N_2 > 0$, что соответствует наличию опоры. Если реакция опоры равна нулю, то это означает отрыв тела от поверхности, отрицательной реакции опоры $N < 0$ в задаче с односторонней связью не существует (физически не реализуется).

3. Меняем направление возможного движения системы. Пусть за счет действия момента M произойдет движение системы вправо. Момент трения качения направим против часовой стрелки (рис. 59). Составляя уравнения равновесия для новой системы сил, заметим, что отличие от прежней системы проявляется только в знаке $M_{\text{тр}}$ во втором уравнении равновесия (2). Так как $M_{\text{тр}} = N_2 \cdot \delta$, то новое решение для M будет формально отличаться от (4) только знаком у коэффициента трения δ. Поэтому, не решая (и даже не составляя) системы уравнений равновесия типа (1–3) для нового направления возможного движения, записываем ответ, изменяя знаки у δ в (4):

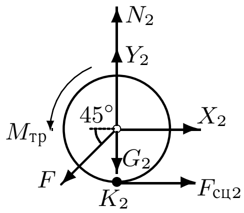


Рис. 59

$$M = \frac{\sqrt{3}R}{2} \frac{FR\sqrt{2} + \delta(G_3 + 2G_2 + F\sqrt{2})}{R\sqrt{3} - \delta} = 3.658 \text{ Нм}. \tag{5}$$

Точно так же находим нормальные реакции опор: $N_1 = 35.776$ Н, $N_2 = 61.295$ Н. При равновесии системы момент, приложенный к цилиндру 1, изменяется в пределах (в Нм) [1]

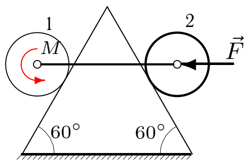
$$3.414 \leqslant M \leqslant 3.658.$$

Условия задач. *Система состоит из двух цилиндров весом G_1 и G_2 с одинаковыми радиусами R, соединенных однородным стержнем весом G_3. Цилиндры могут кататься без проскальзывания, цилиндр*

[1] В задачах, где допускается проскальзывание, необходимо находить также силы $F_{\text{сц}1}$ и $F_{\text{сц}2}$ и проверять условие проскальзывания $F_{\text{сц}1} = F_{\text{тр}1} < fN_1$, $F_{\text{сц}2} = F_{\text{тр}2} < fN_2$, где f — коэффициент трения скольжения.

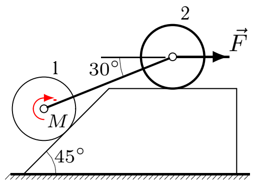
1 *без сопротивления, а цилиндр* 2 *с трением качения* (δ). *В каких пределах меняется внешний момент* M *при условии равновесия системы?*

1.



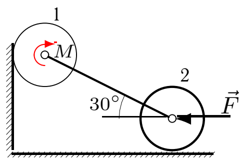
$G_1 = 10$ Н, $G_2 = 23$ Н, G_3=30 Н, $F = 5$ Н, $R = 35$ см, $\delta = 3$ мм.

2.



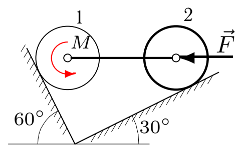
$G_1 = 22$ Н, $G_2 = 23$ Н, G_3=50 Н, $F = 10$ Н, $R = 50$ см, $\delta = 4$ мм.

3.



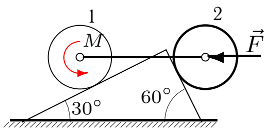
$G_1 = 5$ Н, $G_2 = 25$ Н, G_3=10 Н, $F = 30$ Н, $R = 65$ см, $\delta = 5$ мм.

4.



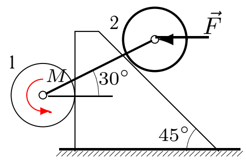
$G_1 = 24$ Н, $G_2 = 27$ Н, G_3=20 Н, $F = 20$ Н, $R = 50$ см, $\delta = 3$ мм.

5.



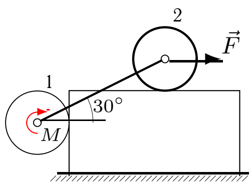
$G_1 = 25$ Н, $G_2 = 29$ Н, G_3=30 Н, $F = 25$ Н, $R = 35$ см, $\delta = 1$ мм.

6.



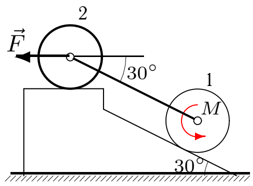
$G_1 = 21$ Н, $G_2 = 26$ Н, G_3=40 Н, $F = 5$ Н, $R = 25$ см, $\delta = 2$ мм.

7.



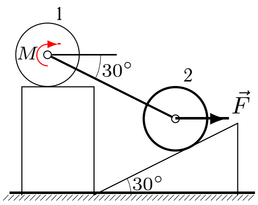
$G_1 = 22$ Н, $G_2 = 24$ Н, G_3=50 Н,
$F = 10$ Н, $R = 40$ см, $\delta = 3$ мм.

8.



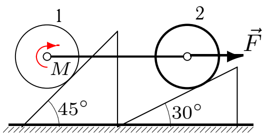
$G_1 = 23$ Н, $G_2 = 24$ Н, G_3=30 Н,
$F = 15$ Н, $R = 55$ см, $\delta = 4$ мм.

9.



$G_1 = 24$ Н, $G_2 = 26$ Н, G_3=50 Н,
$F = 20$ Н, $R = 70$ см, $\delta = 5$ мм.

10.



$G_1 = 25$ Н, $G_2 = 28$ Н, G_3=10 Н,
$F = 25$ Н, $R = 35$ см, $\delta = 1$ мм.

Ответы

	Движение цилиндра 2 по часовой стрелке			Движение цилиндра 2 против часовой стрелки		
№	N_1	N_2	M	N_1	N_2	M
	Н		Нм	Н		Нм
1	64.058	74.888	2.841	66.315	77.145	3.297
2	36.095	53.526	11.279	36.352	54.023	10.799
3	30.366	47.532	4.896	29.638	47.111	4.622
4	53.078	42.872	4.308	52.565	42.576	4.456
5	59.996	87.567	8.371	60.499	88.438	8.675
6	93.257	140.078	3.211	100.988	148.699	4.326
7	9.591	54.537	16.585	10.413	55.012	16.395
8	32.909	47.861	0.703	32.909	47.461	1.143
9	40.326	69.191	10.516	41.303	67.500	9.333
10	25.330	38.168	5.984	25.507	38.042	5.922