

## Глава 12

# ДИНАМИКА СИСТЕМЫ

### 12.1. Теорема о движении центра масс

**Постановка задачи.** *Механизм, состоящий из  $n$  связанных между собой тел, установлен на призме, находящейся на горизонтальной плоскости. Трение между призмой и плоскостью отсутствует. Одно из тел получает перемещение относительно призмы. Куда и на какое расстояние переместится призма?*

#### План решения

Для решения задачи используем теорему о движении центра масс. Выбираем систему координат. Одну из осей, например, ось  $x$  направляем перпендикулярно линии действия внешних сил. В проекции на ось  $x$  уравнение движения центра масс принимает вид

$$m\ddot{x}_c = 0, \quad (1)$$

где  $x_c$  — координата центра масс системы,  $m = \sum_{i=1}^n m_i$  — масса всей системы. Дважды интегрируя (1) при условии, что в начальный момент скорость центра масс была равна нулю, получаем

$$mx_c = \text{const}. \quad (2)$$

Координата центра масс системы вычисляется по формуле

$$x_c = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i x_i. \quad (3)$$

Записывая (2) с учетом (3), один раз для начального положения системы (в покое), а другой раз после смещения одного из тел, получаем формулу, связывающую абсолютные смещения тел системы:

$$\sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i = 0. \quad (4)$$

1. Абсолютное смещение каждого тела представляем как сумму относительного смещения, зависящего от величины заданного относительного смещения одного из тел, и неизвестного переносного смещения  $\Delta$ , равного абсолютному смещению того тела, относительно которого задавалось смещение.

2. Подставляя абсолютные смещения в (4), получаем уравнение для смещения  $\Delta$ . Решение уравнения дает ответ.

**ПРИМЕР.** Механизм, состоящий из груза  $A$  массой 50 кг, блока  $B$  массой 80 кг (большой радиус  $R = 30$  см, меньший —  $r = 10$  см) и цилиндра  $C$  массой 120 кг радиусом  $R_C = r/2$ , установлен на призме  $D$  массой 210 кг, находящейся на горизонтальной плоскости. Трение между призмой и плоскостью отсутствует. Груз  $A$  получает перемещение  $S = 1.2$  м относительно призмы вдоль ее поверхности влево;  $\alpha = 75^\circ$  (рис. 124). Куда и на какое расстояние переместится призма?

#### РЕШЕНИЕ

Задаем систему координат. Проекции на горизонтальную ось всех внешних сил (сил тяжести  $\vec{G}_A, \vec{G}_B, \vec{G}_C, \vec{G}_D$ , реакции опоры  $\vec{N}$ ), действующих на систему, равны нулю (рис. 125), а трения между призмой  $D$  и опорой по условию нет. Применим к системе следствие из теоремы о движении центра масс в форме (4).

1. Абсолютное смещение тел  $A, B$  и  $C$  представляем как сумму относительного смещения, зависящего от величины  $S$  относительного смещения груза  $A$ , и неизвестного переносного смещения  $\Delta_D$ , равного

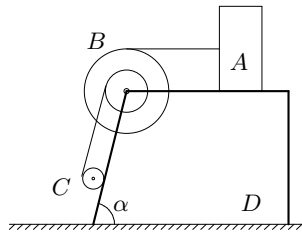


Рис. 124

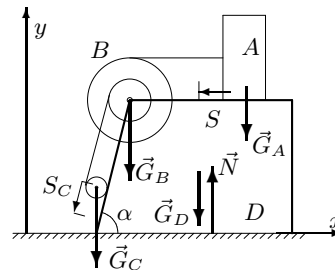


Рис. 125

абсолютному смещению призмы, относительно которой задавалось смещение  $S$ . Обозначаем абсолютные смещения координат центров масс тел системы  $\Delta_A, \Delta_B, \Delta_C, \Delta_D$ . Направление оси  $x$  определяет знаки смещений: налево с минусом, направо с плюсом. Предполагаем, что призма сместится направо. Перемещение центра цилиндра  $C$  относительно призмы и перемещение груза  $A$  связаны так же, как связаны их скорости.

Цилиндр  $C$  совершает плоское движение. Абсолютное смещение его центра в проекции на ось  $x$  равно  $\Delta_D - S_C \cos \alpha$ , где  $S_C$  — смещение центра цилиндра вдоль наклонной поверхности призмы. Выразим  $S_C$  через  $S$ . Для этого свяжем скорости груза  $A$  и центра масс цилиндра  $C$ . Мгновенный центр скоростей цилиндра находится в точке касания призмы, поэтому скорость его центра масс относительно призмы вдвое меньше скорости нити, накручиваемой на обод. Скорость груза  $A$  выражаем через угловую скорость блока (рис. 132, с. 249):

$$v_C = 0.5\omega_B r, \quad v_A = \omega_B R. \quad (5)$$

Исключая отсюда  $\omega_B$ , имеем связь скоростей:  $v_C = 0.5v_A r/R$ . Интегрируя это соотношение при нулевых начальных значениях, получаем искомую зависимость:  $S_C = 0.5Sr/R$ . Находим выражение абсолютных смещений всех тел через  $\Delta_D$  и  $S$ :

$$\Delta_A = \Delta_D - S, \quad \Delta_B = \Delta_D, \quad \Delta_C = \Delta_D - 0.5Sr/R \cos \alpha. \quad (6)$$

2. Подставляя абсолютные смещения в (4), получаем уравнение

$$m_A \Delta_A + m_B \Delta_B + m_C \Delta_C + m_D \Delta_D = 0,$$

или

$$m_A(\Delta_D - S) + m_B \Delta_D + m_C(\Delta_D - 0.5Sr/R \cos \alpha) + m_D \Delta_D = 0.$$

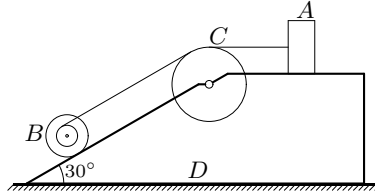
Решаем это уравнение относительно  $\Delta_D$ :

$$\Delta_D = \frac{m_A S + m_C 0.5S(r/R) \cos \alpha}{m_A + m_B + m_C + m_D} = 14.39.$$

Призма  $D$  переместится вправо на 14.39 см.

**УСЛОВИЯ ЗАДАЧ.** Механизм, состоящий из груза  $A$ , блока  $B$  (большой радиус  $R$ , меньший —  $r$ ) и цилиндра  $C$  радиусом  $R_C$ , установлен на призме  $D$ , находящейся на горизонтальной плоскости. Трение между призмой и плоскостью отсутствует. Груз  $A$  получает перемещение  $S = 1$  м относительно призмы вдоль ее поверхности влево или (в тех вариантах, где он висит) по вертикали вниз. Куда и на какое расстояние переместится призма?

1.



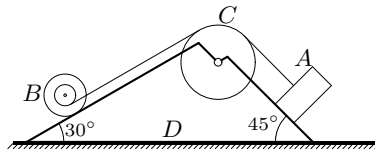
$$m_A = 6 \text{ кг}, m_B = 3 \text{ кг},$$

$$m_C = 11 \text{ кг}, m_D = 40 \text{ кг}, R =$$

$$= 16 \text{ см}, r = 8 \text{ см},$$

$$R_C = 28 \text{ см}.$$

2.



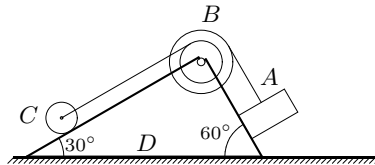
$$m_A = 9 \text{ кг}, m_B = 6 \text{ кг},$$

$$m_C = 14 \text{ кг}, m_D = 51 \text{ кг}, R =$$

$$= 24 \text{ см}, r = 12 \text{ см},$$

$$R_C = 42 \text{ см}.$$

3.



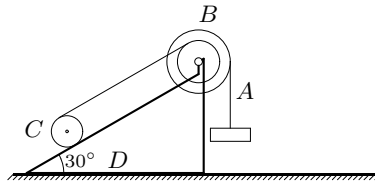
$$m_A = 6 \text{ кг}, m_B = 3 \text{ кг},$$

$$m_C = 16 \text{ кг}, m_D = 65 \text{ кг}, R =$$

$$= 48 \text{ см}, r = 32 \text{ см},$$

$$R_C = 24 \text{ см}.$$

4.



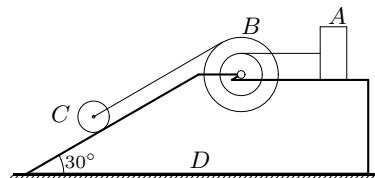
$$m_A = 9 \text{ кг}, m_B = 6 \text{ кг},$$

$$m_C = 19 \text{ кг}, m_D = 76 \text{ кг}, R =$$

$$= 60 \text{ см}, r = 40 \text{ см},$$

$$R_C = 30 \text{ см}.$$

5.



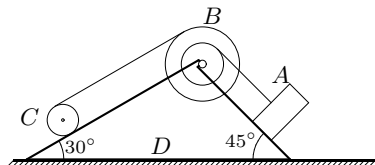
$$m_A = 6 \text{ кг}, m_B = 3 \text{ кг},$$

$$m_C = 21 \text{ кг}, m_D = 90 \text{ кг}, R =$$

$$= 28 \text{ см}, r = 16 \text{ см},$$

$$R_C = 12 \text{ см}.$$

6.



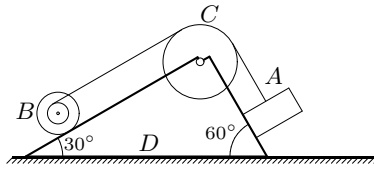
$$m_A = 9 \text{ кг}, m_B = 6 \text{ кг},$$

$$m_C = 24 \text{ кг}, m_D = 51 \text{ кг}, R =$$

$$= 42 \text{ см}, r = 24 \text{ см},$$

$$R_C = 18 \text{ см}.$$

7.



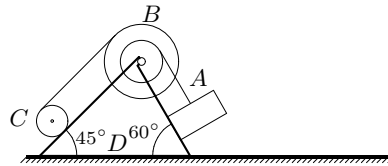
$$m_A = 6 \text{ кг}, m_B = 3 \text{ кг},$$

$$m_C = 11 \text{ кг}, m_D = 50 \text{ кг}, R =$$

$$= 32 \text{ см}, r = 16 \text{ см},$$

$$R_C = 56 \text{ см}.$$

8.



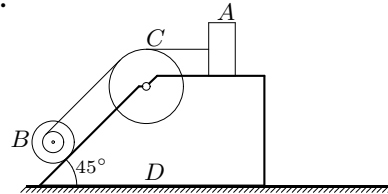
$$m_A = 12 \text{ кг}, m_B = 6 \text{ кг},$$

$$m_C = 27 \text{ кг}, m_D = 65 \text{ кг}, R =$$

$$= 70 \text{ см}, r = 40 \text{ см},$$

$$R_C = 30 \text{ см}.$$

9.



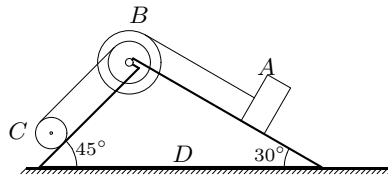
$$m_A = 9 \text{ кг}, m_B = 3 \text{ кг},$$

$$m_C = 14 \text{ кг}, m_D = 64 \text{ кг}, R =$$

$$= 16 \text{ см}, r = 8 \text{ см},$$

$$R_C = 28 \text{ см}.$$

10.



$$m_A = 12 \text{ кг}, m_B = 6 \text{ кг},$$

$$m_C = 22 \text{ кг}, m_D = 80 \text{ кг}, R =$$

$$= 36 \text{ см}, r = 24 \text{ см},$$

$$R_C = 18 \text{ см}.$$

Ответы. 1. 12.887 см. 2. 20.945 см. 3. 13.597 см. 4. 4.986 см.

5. 31.522 см. 6. 27.278 см. 7. 6.760 см. 8. 20.641 см.

9. 11.571 см. 10. 12.981 см.

#### Предупреждение типичных ошибок

1. В знаменателе ответа должна стоять сумма масс всех тел системы. Если вместо суммы масс возникла разность, это значит, что при вычислении абсолютного смещения получилась ошибка в знаке. Следите за соответствием направления координатной оси и направлением перемещения.

2. Внутренние силы не влияют на решение задачи. Так, если дополнить условия задач трением качения цилиндров о призму, то коэффициент трения в решение не войдет. А вот малейшее трение между призмой и неподвижным основанием испортит задачу настолько, что уравнение (4) применять будет уже нельзя, так как не выполняется