

Постановка задачи. На оси, вращающейся в двух неподвижных подшипниках под действием постоянного внешнего момента, закреплён цилиндр и жёсткий невесомый стержень с точечной массой на конце. Ось цилиндра составляет малый угол с осью вращения. Найти динамические составляющие реакций подшипников.

План решения

Динамические составляющие реакций подшипников X_A, X_B, Y_A, Y_B на подвижные оси, связанные с вращающимся ротором, удовлетворяют уравнениям [24]

$$\begin{aligned} X_A + X_B &= -m y_c \varepsilon_z - m x_c \omega_z^2, \\ Y_A + Y_B &= m x_c \varepsilon_z - m y_c \omega_z^2, \\ z_A X_A + z_B X_B &= -J_{yz} \varepsilon_z - J_{xz} \omega_z^2, \\ -z_A Y_A - z_B Y_B &= -J_{xz} \varepsilon_z + J_{yz} \omega_z^2, \end{aligned} \quad (1)$$

где $m = \sum_i m_i$ — масса ротора, x_c, y_c, z_c — координаты его центра масс, J_{yz}, J_{xz} — центробежные моменты инерции ротора. Ось z направлена по оси вращения ротора; ω_z, ε_z — угловые скорость и ускорение ротора в проекции на z ; z_A, z_B — координаты подшипников A и B .

1. Вводим систему координат. Начало координат помещаем в одном из подшипников, например, A . Ось z направляем по оси вращения, ось x направляем так, чтобы ось цилиндра лежала в плоскости xz . Определяем массу m системы двух тел и координаты центра масс системы:

$$x_c = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^2 m_i x_{c_i}, \quad y_c = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^2 m_i y_{c_i}, \quad z_c = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^2 m_i z_{c_i}, \quad (2)$$

где $x_{c_i}, y_{c_i}, z_{c_i}$ — координаты центров масс тел.

2. Вычисляем моменты инерции цилиндра, ось ζ которого составляет малый угол с осью вращения z , относительно осей координат:

$$\begin{aligned} J_{zz}^{(\text{цил})} &= \frac{m_1 R^2}{2} + m_1 (y_{c_1}^2 + x_{c_1}^2), \\ J_{xz}^{(\text{цил})} &= \alpha \frac{m_1 R^2}{4} + m_1 x_{c_1} z_{c_1}, \\ J_{yz}^{(\text{цил})} &= m_1 y_{c_1} z_{c_1}. \end{aligned} \quad (3)$$

Малый угол α отсчитывается от оси цилиндра ζ к положительному направлению оси z . Угол берётся положительный, если со стороны оси y поворот оси цилиндра к оси z виден против часовой стрелки, и отрицательный — если поворот виден по направлению часовой стрелки. Мо-

менты инерции $J_{yz}^{(\text{цил})}$, $J_{zz}^{(\text{цил})}$ и $J_{xz}^{(\text{цил})}$ вычислены по теореме Гюйгенса¹. Вторые слагаемые в (3) представляют собой соответствующие моменты инерции центра масс цилиндра относительно начала координат.

3. Вычисляем моменты инерции точечной массы (груза) относительно осей x, y, z :

$$J_{zz}^{(\text{груз})} = m_2(y_{c_2}^2 + x_{c_2}^2), \quad J_{xz}^{(\text{груз})} = m_2x_{c_2}z_{c_2}, \quad J_{yz}^{(\text{груз})} = m_2y_{c_2}z_{c_2}.$$

4. Находим суммарные моменты инерции системы:

$$\begin{aligned} J_{zz} &= J_{zz}^{(\text{цил})} + J_{zz}^{(\text{груз})}, \\ J_{xz} &= J_{xz}^{(\text{цил})} + J_{xz}^{(\text{груз})}, \\ J_{yz} &= J_{yz}^{(\text{цил})} + J_{yz}^{(\text{груз})}. \end{aligned}$$

5. Вычисляем угловое ускорение ротора, $\varepsilon_z = M_z/J_{zz}$, и угловую скорость ротора в указанный момент t . Если $\varepsilon_z = \text{const}$ и $\omega_z(0) = 0$, то $\omega_z = \varepsilon_z t$.

6. Искомые реакции находим из решения системы (1) при $z_A = 0$.

ПРИМЕР. На оси, вращающейся в неподвижных подшипниках A и B под действием постоянного момента $M_z = 0.4$ Нм, закреплен ротор, состоящий из цилиндра массой $m_1 = 50$ кг и жесткого невесомого стержня длиной $L = 21$ см с точечной массой $m_2 = 6$ кг на конце (рис. 142). Ось цилиндра составляет угол $\alpha = 0.06$ рад с осью вращения Az . Центр массы цилиндра лежит на оси Az . Стержень перпендикулярен Az . Найти динамические составляющие реакций подшипников в момент времени $t = 3$ с. Ротор вращается из состояния покоя.

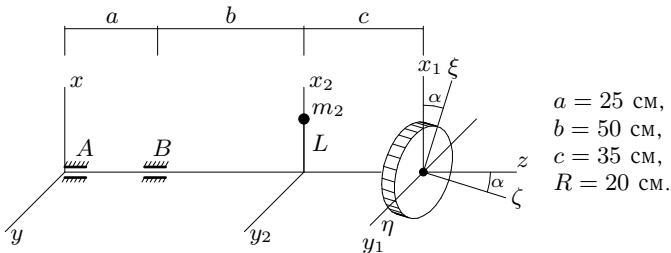


Рис. 142

Введены системы координат x_i, y_i, z_i , $i = 1, 2$, с осями, параллельными x, y, z , проходящими через центры масс тел 1 и 2. Ось ζ является

¹Христиан Гюйгенс (1629–1695) — нидерландский математик, механик, физик и астроном.

осью цилиндра и вместе с осями x_1 и x_2 лежит в плоскости xz . Оси ξ и η перпендикулярны ζ .

РЕШЕНИЕ

1. Вводим систему координат. Начало координат помещаем в подшипнике A , ось z направляем по оси вращения. Ось цилиндра лежит в плоскости xz . Определяем массу системы $m = m_1 + m_2 = 56$ кг и координаты центра масс системы по формуле (2):

$$x_c = \frac{1}{56} \cdot 6 \cdot 0.2 = 0.0225 \text{ м}, \quad y_c = 0, \quad z_c = \frac{1}{56} (50 \cdot 1.1 + 6 \cdot 0.85) = 0.982 \text{ м}.$$

2. Вычисляем моменты инерции цилиндра относительно осей координат по формулам (3), где $\alpha > 0$:

$$J_{zz}^{(\text{цил})} = 1 \text{ кг м}^2, \quad J_{xz}^{(\text{цил})} = 0.03 \text{ кг м}^2, \quad J_{yz}^{(\text{цил})} = 0.$$

Угол берется положительный, так как со стороны оси y поворот оси цилиндра к оси z виден против часовой стрелки.

3. Вычисляем моменты инерции точечной массы (груза) относительно осей x, y, z :

$$J_{zz}^{(\text{груз})} = 0.265 \text{ кг м}^2, \quad J_{xz}^{(\text{груз})} = 0.945 \text{ кг м}^2, \quad J_{yz}^{(\text{груз})} = 0.$$

4. Находим суммарные моменты инерции системы $J_{zz} = 1.265 \text{ кг м}^2$, $J_{xz} = 0.975 \text{ кг м}^2$, $J_{yz} = 0$.

5. Вычисляем угловое ускорение ротора, $\varepsilon = M_z/J_{zz} = 0.316 \text{ рад/с}^2$, и угловую скорость ротора в момент $t = 3$ с. Так как $\varepsilon = \text{const}$ и $\omega(0) = 0$, то $\omega = 0.316 \cdot 3 = 0.949 \text{ рад/с}$.

6. Динамические реакции опор вычисляем, решая систему (1) при $z_A = 0$, $z_B = a = 0.25$ м:

$$X_B = -(J_{yz}\varepsilon + J_{xz}\omega^2)/z_B = -3.512 \text{ Н},$$

$$Y_B = (J_{xz}\varepsilon - J_{yz}\omega^2)/z_B = 1.233 \text{ Н},$$

$$X_A = -m y_c \varepsilon - m x_c \omega^2 - X_B = 2.377 \text{ Н},$$

$$Y_A = m x_c \varepsilon - m y_c \omega^2 - Y_B = -2.494 \text{ Н}.$$

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ. На оси, вращающейся в подшипниках A и B под действием постоянного момента M_z , закреплен ротор, состоящий из цилиндра 1 и жесткого невесомого стержня длиной L с точечной массой 2 на конце. Ось цилиндра составляет малый угол α с осью вращения Az . Центр массы цилиндра лежит на оси Az . Стержень перпендикулярен Az . Найти динамические составляющие реакций подшипников в момент времени t . Ротор вращается из состояния покоя. В центрах масс тел 1 и 2 введены системы координат x_i, y_i, z_i , $i = 1, 2$ с осями, параллельными x, y, z . Ось ζ является осью