2.4. Расчет составной конструкции

Постановка задачи. *Плоская рама состоит из двух частей, соединенных одним шарниром. На раму действует момент и силы. Учитывая погонный вес, найти реакции опор.*

План решения

Составная конструкция, состоящая из двух тел, соединенных шарниром, содержит четыре неизвестные реакции опор. Так как для одного тела под действием плоской системы сил можно составить только три независимых уравнения равновесия, то для определения реакций необходимо рассматривать равновесие каждой части составной конструкции в отдельности.

1-й способ

1. Разбиваем систему на два тела по сочленяющему шарниру. В месте разбиения прикладываем реакции отброшенной части. Внешние связи заменяем их реакциями.
2. Для каждого тела, образованного при разбиении, составляем по три уравнения равновесия.
3. Решаем систему шести уравнений. Определяем реакции опор.
4. Делаем проверку решения, составляя уравнения равновесия целой (нерасчлененной) системы.

2-й способ

1. Разбиваем систему на два тела по сочленяющему шарниру. В месте разбиения прикладываем реакции отброшенной части. Внешние связи заменяем их реакциями.
2. Для каждого тела, образованного при разбиении, составляем уравнения моментов относительно точки сочленения. Полученные уравнения дополняем двумя уравнениями равновесия для всей конструкции в целом.
3. Решаем систему четырех уравнений. Определяем реакции опор.
4. Делаем проверку решения, составляя уравнения равновесия целой (нерасчлененной) системы.

Пример. Плоская рама состоит из двух частей, соединенных в точке C шарниром. На раму действует момент $M = 100$ кНм, горизонтальная сила $P = 20$ кН и наклонная сила $Q = 10$ кН. Учитывая погонный вес $\rho = 4$ кН/м, найти реакции опор (рис. 40). Дано: $\alpha = 60°$, $\beta = 50°$, $AB = 4$ м, $BC = 6$ м, $CD = 4$ м, $DE = 2$ м, $KC = 2$ м, $AN = NB$.

Решение

1-й способ

1. Разбиваем конструкцию на два тела по сочленяющему шарниру C. Получаем две части (рис. 41–42). Внешние связи конструкции заменяем реакциями.

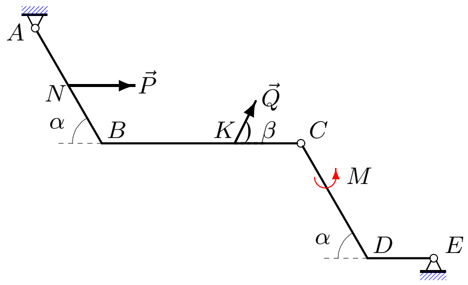


Рис. 40

В точке A прикладываем реакции X_A и Y_A, в точке E — реакции X_E и Y_E. К каждому телу в точке C прикладываем реакции отброшенной части. Согласно 3-му закону Ньютона, реакции X_C и Y_C для разных частей равны по величине и направлены в противоположные стороны.

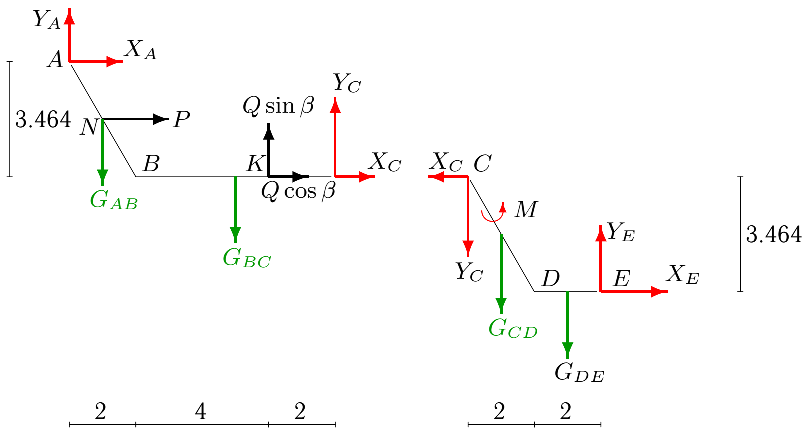


Рис. 41 Рис. 42

Система уравнений равновесия двух тел, образованных при разбиении, замыкается — имеем шесть уравнений равновесия (по три уравнения на каждую часть) и шесть неизвестных X_A, Y_A, X_E, Y_E, X_C, Y_C.

2. Для каждой отдельной части составляем по три уравнения равновесия:

$$\sum X_i^{(\text{лев})} = X_A + P + Q\cos\beta + X_C = 0, \tag{1}$$

$$\sum Y_i^{(\text{лев})} = Y_A + Q\sin\beta + Y_C - G_{AB} - G_{BC} = 0, \tag{2}$$

$$\sum M_{C_i}^{(\text{лев})} = -X_A AB\sin\alpha - Y_A(AB\cos\alpha + BC) - \\ - P\,NB\sin\alpha - Q\,KC\sin\beta + \\ + G_{AB}(NB\cos\alpha + BC) + G_{BC}(BC/2) = 0; \qquad (3)$$

$$\sum X_i^{(\text{прав})} = -X_C + X_E = 0, \qquad (4)$$

$$\sum Y_i^{(\text{прав})} = -Y_C + Y_E - G_{CD} - G_{DE} = 0, \qquad (5)$$

$$\sum M_{C_i}^{(\text{прав})} = X_E CD\sin\alpha + Y_E(DE + CD\cos\alpha) + M - \\ - G_{DE}(DE/2 + CD\cos\alpha) - G_{CD}(CD/2)\cos\alpha = 0. \qquad (6)$$

3. Решаем систему (1–6) относительно неизвестных X_A, Y_A, X_E, Y_E, X_C, Y_C. Можно использовать любой способ решения системы линейных уравнений (*Решебник ВМ,* §2.1). Рекомендуем наиболее эффективный для таких систем метод исключения Гаусса.

Если для решения использовать компьютер, систему лучше записать в матричном виде, предварительно вычислив правые части системы (1–6) и коэффициенты при неизвестных. Величины сил тяжести участков вычисляем через погонный вес ρ по формуле $G = \rho L$, где L — длина соответствующего участка. В нашем случае

$$G_{AB} = 4\cdot 4 = 16 \text{ кН},\; G_{BC} = 4\cdot 6 = 24 \text{ кН},$$
$$G_{CD} = 4\cdot 4 = 16 \text{ кН},\; G_{DE} = 4\cdot 2 = 8 \text{ кН}.$$

Система (1–6) имеет следующий матричный вид:

$$\left\|\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -3.464 & -8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3.464 & 4 & 0 & 0 \end{array}\right\| \left|\begin{array}{c} X_A \\ Y_A \\ X_E \\ Y_E \\ X_C \\ Y_C \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c} -26.428 \\ 32.339 \\ -134.038 \\ 0 \\ 24 \\ -60 \end{array}\right|.$$

Результаты расчетов заносим в таблицу:

X_A	Y_A	X_E	Y_E	X_C	Y_C
кН					
73.202	−14.943	−99.630	71.282	−99.632	−47.281

4. Делаем проверку решения, составляя уравнения равновесия для целой (нерасчлененной) системы (рис. 43):

$$\begin{aligned}\sum M_{E_i}^{(\text{цел})} = &-Y_A((AB+CD)\cos\alpha + BC + DE) + M-\\ &- P(NB+CD)\sin\alpha - X_A(AB+CD)\sin\alpha-\\ &- Q\,CD\sin\alpha\cos\beta - Q(KC+CD\cos\alpha+DE)\sin\beta+\\ &+ G_{AB}((NB+CD)\cos\alpha+BC+DE)+\\ &+ G_{BC}(BC/2+CD\cos\alpha+DE)+\\ &+ G_{CD}((CD/2)\cos\alpha+DE)+G_{DE}(DE/2)=0,\end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}\sum M_{A_i}^{(\text{цел})} = &\,Y_E((AB+CD)\cos\alpha+BC+DE)+M+\\ &+ PAN\sin\alpha + X_E(AB+CD)\sin\alpha+\\ &+ Q\,AB\sin\alpha\cos\beta + Q\,(BK+AB\cos\alpha)\sin\beta-\\ &- G_{DE}(DE/2+(AB+CD)\cos\alpha+BC)-\\ &- G_{CD}((AB+CD/2)\cos\alpha+BC)-\\ &- G_{BC}(BC/2+AB\cos\alpha)-G_{AB}(AB/2)\cos\alpha=0.\end{aligned} \tag{8}$$

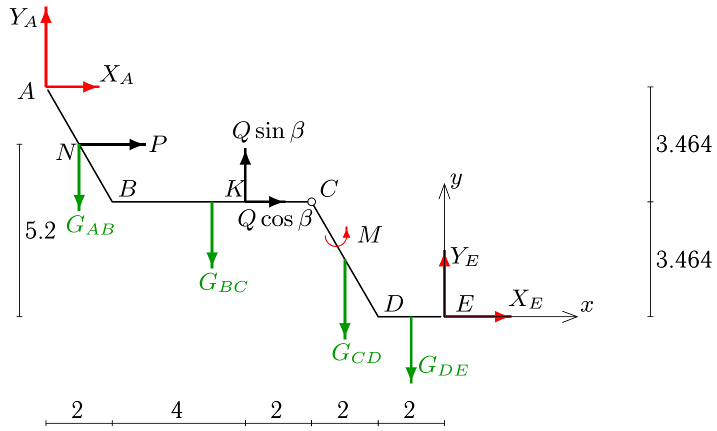


Рис. 43

2-й способ

1. Разбиваем конструкцию на два тела по сочленяющему шарниру С. Получаем две части (рис. 41–42). Внешние связи конструкции заменяем реакциями.

2. Относительно шарнира C для каждой части конструкции составляем уравнения моментов (3) и (6). Для всей системы в целом составляем уравнения моментов (7,8) относительно опор A и E.

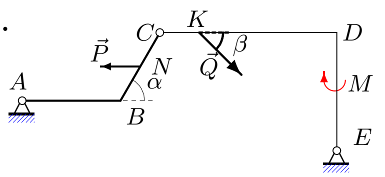
3. Решаем систему четырех уравнений (3,6,7,8) относительно четырех неизвестных, замечая, что система распадается на две: уравнения (3) и (7) для X_A и Y_A и уравнения (6) и (8) для X_E и Y_E.

4. Делаем проверку решения, составляя уравнения равновесия целой (нерасчлененной) системы (рис. 43):

$$\sum X_i^{(\text{цел})} = X_A + P + Q\cos\beta + X_E = 0,$$
$$\sum Y_i^{(\text{цел})} = Y_A + Q\sin\beta - G_{AB} - G_{BC} + Y_E - G_{CD} - G_{DE} = 0.$$

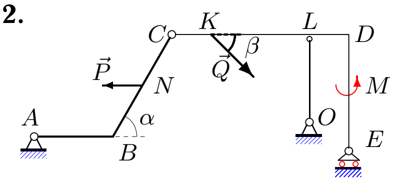
Условия задач. *Плоская рама состоит из двух частей, соединенных в точке C шарниром. На раму действует момент M, горизонтальная сила P и наклонная сила Q. Учитывая погонный вес ρ, найти реакции опор.*

1.



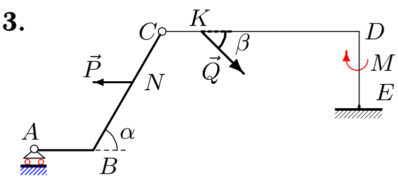
$P = 4$ кН, $Q = 1$ кН, $M = 3$ кНм, $\rho = 1$ кН/м, $\alpha = 60°$, $\beta = 30°$, $AB = 5$ м, $BC = 4$ м, $CD = 9$ м, $DE = 6$ м, $CN = 2$ м, $CK = 2$ м.

2.



$P = 5$ кН, $Q = 1$ кН, $M = 3$ кНм, $\rho = 2$ кН/м, $\alpha = 60°$, $\beta = 30°$, $AB = 4$ м, $BC = 6$ м, $CD = 9$ м, $DE = 6$ м, $CN = 3$ м, $CK = 2$ м, $LD = 2$ м.

3.



$P = 7$ кН, $Q = 2$ кН, $M = 9$ кНм, $\rho = 3$ кН/м, $\alpha = 60°$, $\beta = 45°$, $AB = 3$ м, $BC = 7$ м, $CD = 10$ м, $DE = 4$ м, $CN = 3$ м, $CK = 2$ м.