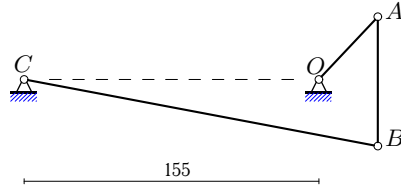
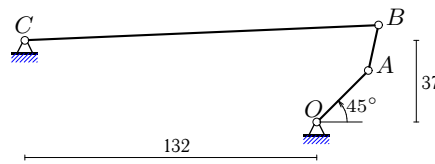


9.



$$\begin{aligned}\omega_{OA} &= 18 \text{ рад/с,} \\ \omega_{AB} &= 10 \text{ рад/с,} \\ \omega_{BC} &= 3 \text{ рад/с,} \\ AB &\perp OC, \\ AB &= 68 \text{ см.}\end{aligned}$$

10.



$$\begin{aligned}\omega_{OA} &= 4 \text{ рад/с,} \\ \omega_{AB} &= -4 \text{ рад/с,} \\ \omega_{BC} &= 0.5 \text{ рад/с,} \\ OA &= 33 \text{ см.}\end{aligned}$$

Ответы

№	OA	AB	BC	№	OA	AB	BC
1	27.000	57.369	49.889	6	98.772	62.000	86.052
2	29.000	41.824	47.475	7	94.283	31.000	55.886
3	31.000	20.397	110.910	8	45.762	59.000	197.958
4	33.000	32.812	72.911	9	44.362	68.000	189.503
5	27.000	141.549	114.560	10	33.000	22.531	159.049

## 8.4. Уравнение трех угловых ускорений

**Постановка задачи.** Многозвенный механизм приводится в движение кривошипом, вращающимся с известной угловой скоростью и известным угловым ускорением. Найти угловые скорости и угловые ускорения звеньев механизма.

### План решения

Под угловыми скоростями и ускорениями будем понимать проекции соответствующих векторов на ось  $z$ , перпендикулярную плоскости движения. Индекс  $z$  дополнительно указывать не будем, принимая  $\omega_i = \omega_{iz}$ ,  $\varepsilon_i = \varepsilon_{iz}$ .

1. Нумеруем шарниры и звенья механизма. Выбираем систему координат, помещая ее начало в один из шарниров механизма. Определяем координаты шарниров.

2. Выделяем из механизма шарнирные четырехзвенники. Рассмотрим четырехзвенник, шарниры которого последовательно обозначены номерами  $n_1, n_2, n_3, n_4$ , где  $n_1$  и  $n_4$  — номера неподвижных шарниров. Стержни четырехзвенника имеют номера  $m_1, m_2, m_3$ . Записываем

уравнения трех угловых скоростей:

$$\sum_{i=1}^3 \omega_{m_i} (x_{n_i} - x_{n_{i+1}}) = 0, \quad \sum_{i=1}^3 \omega_{m_i} (y_{n_i} - y_{n_{i+1}}) = 0, \quad (1)$$

где  $\omega_{m_i}$  — угловая скорость  $m_i$ -го звена,  $x_{n_i}, y_{n_i}, x_{n_{i+1}}, y_{n_{i+1}}$  — координаты его концов. Номера шарниров  $n_i, i = 1 \dots 4$ , как и номера звеньев  $m_i, i = 1 \dots 3$ , не обязательно должны быть последовательными числами.

3. Из решения (1) получаем все угловые скорости механизма.

4. Записываем уравнения трех угловых ускорений для каждого четырехзвенника <sup>1</sup>:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 \varepsilon_{m_i} (x_{n_i} - x_{n_{i+1}}) - \sum_{i=1}^3 \omega_{m_i}^2 (y_{n_i} - y_{n_{i+1}}) &= 0, \\ \sum_{i=1}^3 \varepsilon_{m_i} (y_{n_i} - y_{n_{i+1}}) + \sum_{i=1}^3 \omega_{m_i}^2 (x_{n_i} - x_{n_{i+1}}) &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\varepsilon_{m_i}$  — угловое ускорение  $m_i$ -го звена.

5. Решаем (2) относительно неизвестных угловых ускорений.

**ПРИМЕР.** Многозвенный механизм приводится в движение кривошипом  $OA$ , вращающимся с угловой скоростью  $\omega_{OA} = 1$  рад/с и угловым ускорением  $\varepsilon_{OA} = 2$  рад/с<sup>2</sup> (рис. 103).

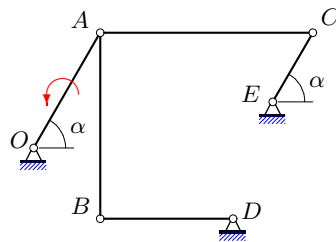


Рис. 103

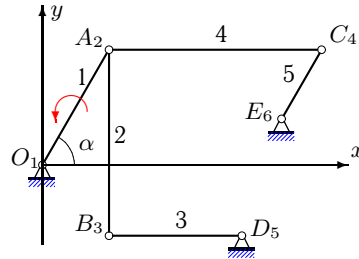


Рис. 104

Дано:  $OA = 50$  см,  $AB = 70$  см,  $BD = 50$  см,  $AC = 80$  см,  $EC = 30$  см;  $AC \perp AB$ ,  $AB \perp BD$ . Найти угловые скорости и угловые ускорения звеньев механизма.

<sup>1</sup>Уравнения следуют из координатной формы записи векторной формулы (4), на с. 130, для ускорений точек при плоском движении.

## РЕШЕНИЕ

1. Нумеруем шарниры и звенья механизма (рис. 104). Выбираем систему координат, помещая ее начало в шарнир  $O$ . Определяем координаты шарниров:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0, & y_1 &= 0, \\ x_2 &= x_3 = OA \cos \alpha, & y_2 &= y_4 = OA \sin \alpha, \\ x_4 &= OA \cos \alpha + AC, & y_3 &= OA \sin \alpha - AB, \\ x_5 &= OA \cos \alpha + BD, & y_5 &= OA \sin \alpha - AB, \\ x_6 &= (OA - CE) \cos \alpha + AC, & y_6 &= (OA - EC) \sin \alpha. \end{aligned}$$

2. Выделяем из механизма шарнирные четырехзвенники (рис. 105, 106). Записываем уравнения трех угловых скоростей для четырехзвенника  $OABD$  (рис. 105),

$$\begin{aligned} \omega_1(x_1 - x_2) + \omega_2(x_2 - x_3) + \omega_3(x_3 - x_5) &= 0, \\ \omega_1(y_1 - y_2) + \omega_2(y_2 - y_3) + \omega_3(y_3 - y_5) &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

и для четырехзвенника  $OACE$  (рис. 106),

$$\begin{aligned} \omega_1(x_1 - x_2) + \omega_4(x_2 - x_4) + \omega_5(x_4 - x_6) &= 0, \\ \omega_1(y_1 - y_2) + \omega_4(y_2 - y_4) + \omega_5(y_4 - y_6) &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

3. Решаем систему четырех линейных уравнений (3), (4). Получаем угловые скорости звеньев:  $\omega_2 = 0.619$  рад/с,  $\omega_3 = -0.5$  рад/с,  $\omega_4 = 0$ ,  $\omega_5 = 1.667$  рад/с. Из решения следует, что звено  $AC$  движется мгновенно-поступательно. Этот результат очевиден. Его можно было получить сразу из условия задачи, не решая ее. Действительно,  $OA \parallel EC$ , следовательно, векторы скоростей шарниров  $A$  и  $C$  также

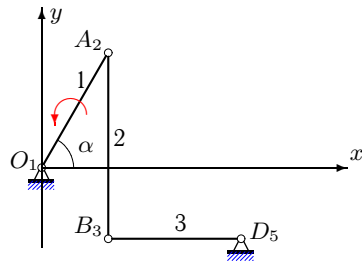


Рис. 105

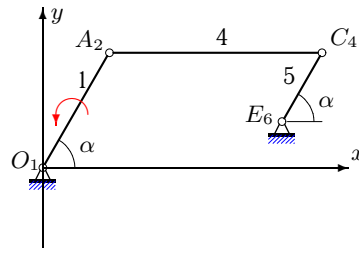


Рис. 106

параллельны и не перпендикулярны  $AC$ . Мгновенного центра скоростей звена  $AC$  не существует (расположен в "бесконечности"), что соответствует  $\omega_4 = 0$ .

4. Записываем уравнения трех угловых ускорений для четырехзвенника  $OABD$  (рис. 105),

$$\begin{aligned} \varepsilon_1(x_1 - x_2) + \varepsilon_2(x_2 - x_3) + \varepsilon_3(x_3 - x_5) - \\ - \omega_1^2(y_1 - y_2) - \omega_2^2(y_2 - y_3) - \omega_3^2(y_3 - y_5) = 0, \\ \varepsilon_1(y_1 - y_2) + \varepsilon_2(y_2 - y_3) + \varepsilon_3(y_3 - y_5) + \\ + \omega_1^2(x_1 - x_2) + \omega_2^2(x_2 - x_3) + \omega_3^2(x_3 - x_5) = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

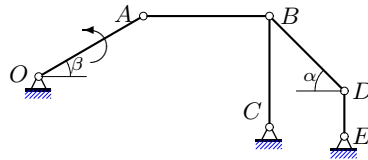
и для четырехзвенника  $OACE$  (рис. 106),

$$\begin{aligned} \varepsilon_1(x_1 - x_2) + \varepsilon_4(x_2 - x_4) + \varepsilon_5(x_4 - x_6) - \\ - \omega_1^2(y_1 - y_2) - \omega_4^2(y_2 - y_4) - \omega_5^2(y_4 - y_6) = 0, \\ \varepsilon_1(y_1 - y_2) + \varepsilon_4(y_2 - y_4) + \varepsilon_5(y_4 - y_6) + \\ + \omega_1^2(x_1 - x_2) + \omega_4^2(x_2 - x_4) + \omega_5^2(x_4 - x_6) = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

5. Из решения (5,6) получаем угловые ускорения:  $\varepsilon_2 = 1.773 \text{ рад/с}^2$ ,  $\varepsilon_3 = -0.670 \text{ рад/с}^2$ ,  $\varepsilon_4 = -0.481 \text{ рад/с}^2$ ,  $\varepsilon_5 = 2.692 \text{ рад/с}^2$ .

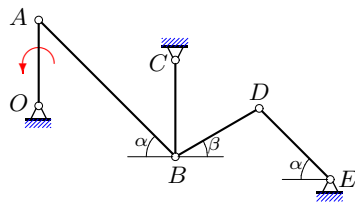
**УСЛОВИЯ ЗАДАЧ.** Многозвенный механизм приводится в движение кривошипом  $OA$  или  $BC$ , вращающимся с известной угловой скоростью и известным угловым ускорением. Найти угловые скорости (в рад/с) и угловые ускорения (в рад/с<sup>2</sup>) звеньев механизма. Длины звеньев даны в сантиметрах. Стержни, положение которых не определено углом, вертикальны или горизонтальны.

1.



$$\begin{aligned} \omega_{OA} = 2 \text{ а } \text{рад/с}, \quad OA = 24, \\ \varepsilon_{OA} = 2 \text{ а } \text{рад/с}^2, \quad AB = 25, \\ \alpha = 45^\circ, \quad BC = 22, \\ \beta = 30^\circ, \quad BD = 21, \\ DE = 9. \end{aligned}$$

2.



$$\begin{aligned} \omega_{OA} = 3 \text{ а } \text{рад/с}, \quad OA = 24, \\ \varepsilon_{OA} = 2 \text{ а } \text{рад/с}^2, \quad AB = 54, \\ \alpha = 45^\circ, \quad BC = 27, \\ \beta = 30^\circ, \quad BD = 27, \\ DE = 28. \end{aligned}$$