4.6. Приведение системы сил к простейшему виду

Постановка задачи. *Систему сил, заданную в прямоугольной системе координат, привести к началу координат. Найти точку пересечения центральной винтовой оси с заданной плоскостью.*

Привести систему сил к центру O — означает найти главный вектор $\vec{R}$ и главный момент $\vec{M}_O$ системы относительно этого центра. При перемене центра изменяется главный момент. Можно найти точки, относительно которых получается главный момент, параллельный главному вектору. Эти точки образуют центральную винтовую ось (или ось динамы), а совокупность главного вектора и параллельного ему главного момента называют динамой или динамическим винтом. Не меняя воздействия на тело, вектор момента можно переносить параллельно самому себе, поэтому динаму часто изображают в виде главного вектора и главного момента, лежащими на одной прямой (на винтовой оси). Если система не уравновешена, то ее можно привести к трем простейшим вариантам — к динаме, силе (равнодействующей), к паре сил.

План решения

1. Вычисляем компоненты главного вектора системы, составляя суммы проекций всех сил на оси координат:

$$R_x = \sum X_i, \ R_y = \sum Y_i, \ R_z = \sum Z_i.$$

2. Находим модуль главного вектора $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$.

3. Вычисляем компоненты главного момента системы относительно начала координат:

$$M_{Ox} = \sum M_{xi}, \quad M_{Oy} = \sum M_{yi}, \quad M_{Oz} = \sum M_{zi}.$$

4. Находим модуль главного момента $M_0 = \sqrt{M_{Ox}^2 + M_{Oy}^2 + M_{Oz}^2}$.

5. Определяем скалярный инвариант системы. Система сил имеет две величины, не меняющиеся при перемене центра приведения (инварианты) — главный вектор и скалярное произведение главного вектора на главный момент:

$$I = \vec{R} \cdot \vec{M}_0 = R_x M_{Ox} + R_y M_{Oy} + R_z M_{Oz}.$$

Если $I = 0$, то система сил приводится к равнодействующей.

6. Находим минимальный главный момент $M_* = I/R$. Проверяем неравенство $M_* \le M_0$. Если $R = 0$, то задача решена — система приводится к паре (или уравновешена, если и $M_O = 0$.)

7. Вычисляем шаг винта $p = M_*/R$. Если $p < 0$, то главный вектор и главный момент направлены по винтовой оси в разные стороны, если $p > 0$ — в одну сторону, а если $p = 0$, то система приводится к равнодействующей.

8. Записываем уравнения центральной винтовой оси [*]:

$$\frac{M_{Ox} - yR_z + zR_y}{R_x} = \frac{M_{Oy} - zR_x + xR_z}{R_y} = \frac{M_{Oz} - xR_y + yR_x}{R_z} = p. \tag{1}$$

Индексы в уравнениях образуют круговую перестановку $\overleftarrow{x \to y \to z}$.

Если систему привести к любой точке на центральной винтовой оси, то главный вектор и главный момент будут лежать на этой оси и образовывать динаму.

Из трех уравнений (1) два являются независимыми.

Если один из компонентов главного вектора равен нулю, например, $R_x = 0$, то соответствующее уравнение записывается в другой форме: $M_{Ox} - yR_z + zR_y = 0$.

9. Находим координаты точки A пересечения центральной оси с плоскостью xy (*Решебник ВМ,* §1.11). Если прямая параллельна плоскости xy, то такой точки не существует. Решая систему (1) при $z = 0$, получаем $y = y_A, z = z_A$. Аналогично можно найти точки пересечения центральной винтовой оси с плоскостями xz и yz (если они существуют).

10. Проверяем решение, приводя систему к любой точке центральной винтовой оси (например, x_A, y_A). Для этого новые оси координат, параллельные старым, проводим через выбранную точку и повторяем пп. 3–4 плана. Главный момент должен быть равен минимальному M_*.

Пример. Систему сил $F_1 = 4$ Н, $F_2 = 10$ Н, $F_3 = 21$ Н, $F_4 = 4$ Н, приложенных к вершинам параллелепипеда, привести к началу координат (рис. 72). Найти координаты точки пересечения центральной винтовой оси с плоскостью xy. Размеры параллелепипеда: $a = 3$ м, $b = 5$ м, $c = 4$ м.

---

[*] Общие уравнения прямой и каноническая форма уравнения прямой см. *Решебник ВМ,* §1.10

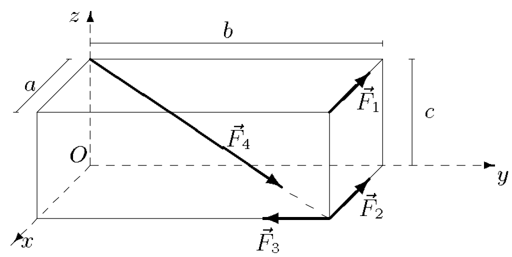


Рис. 72

Решение

1. Вычисляем компоненты главного вектора системы. Проекции вектора $\vec{F}_4$, лежащего на большой диагонали параллелограмма длиной $L = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$, вычисляем по формулам:

$$F_{4x} = F_4 \cos(\vec{F}_4 \wedge x) = F_4 a/L,$$
$$F_{4y} = F_4 \cos(\vec{F}_4 \wedge y) = F_4 b/L,$$
$$F_{4z} = F_4 \cos(\vec{F}_4 \wedge z) = -F_4 c/L.$$

Определяем компоненты главного вектора:

$$R_x = \sum X_i = -F_1 - F_2 + F_{4x} = -12.303 \text{ Н},$$
$$R_y = \sum Y_i = -F_3 + F_{4y} = -18.172 \text{ Н},$$
$$R_z = \sum Z_i = F_{4z} = 2.262 \text{ Н}.$$

2. Находим модуль главного вектора:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = 22.061 \text{ Н}.$$

3. Вычисляем компоненты главного момента системы сил относительно начала координат:

$$M_{Ox} = \sum M_{xi} = -F_{4y} c = -11.314 \text{ Нм},$$
$$M_{Oy} = \sum M_{yi} = -F_1 c + F_{4x} c = -9.212 \text{ Нм},$$
$$M_{Oz} = \sum M_{zi} = F_1 b + F_2 b - F_3 a = -7.00 \text{ Нм}.$$

4. Находим модуль главного момента:

$$M_0 = \sqrt{M_{Ox}^2 + M_{Oy}^2 + M_{Oz}^2} = 16.182 \text{ Нм}.$$

5. Определяем скалярный инвариант системы:

$$I = \vec{R} \cdot \vec{M}_0 = R_x M_{Ox} + R_y M_{Oy} + R_z M_{Oz} = 290.745 \text{ Н}^2\text{м}.$$

Скалярный инвариант не равен нулю, следовательно, система сил приводится к динаме.

6. Вычисляем минимальный главный момент системы сил:

$$M_* = \frac{I}{R} = \frac{290.745}{22.061} = 13.178 \text{ Нм}.$$

Неравенство $M_* \leq M_0 = 16.182$ Нм выполняется. Точки, относительно которой момент системы сил меньше M_*, не существует.

7. Находим шаг винта системы сил:

$$p = \frac{M_*}{R} = 0.597 \text{ м}.$$

Шаг положительный, следовательно, главный момент и главный вектор направлены по центральной винтовой оси в одну сторону.

8. Записываем уравнения центральной винтовой оси:

$$\frac{M_{Ox} - yR_z + zR_y}{R_x} = \frac{M_{Oy} - zR_x + xR_z}{R_y} = \frac{M_{Oz} - xR_y + yR_x}{R_z} = p.$$

Из этих трех уравнений только два являются независимыми:

$$\begin{aligned} 2.262\, y - 18.172\, z - 3.964 &= 0, \\ -2.262\, x + 12.303\, z + 1.644 &= 0. \end{aligned} \tag{2}$$

9. Находим координаты точки пересечения центральной оси с плоскостью xy. Решая систему (2) при $z = 0$, получаем, что

$$y = y_A = 1.752 \text{ м}, \quad x = x_A = 0.726 \text{ м}.$$

Основные результаты расчета заносим в таблицу:

R_x	R_y	R_z	R	M_{Ox}	M_{Oy}	M_{Oz}	M_O	x_A	y_A
Н				Нм				м	
-12.303	-18.172	-2.263	22.061	-11.314	-9.212	7.000	16.182	0.726	1.752

10. Проверяем решение, приводя систему к точке A центральной винтовой оси. Через точку A проводим оси новой системы координат x', y', z', параллельные исходным осям (рис. 73).

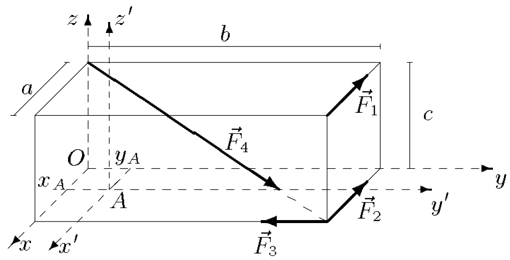


Рис. 73

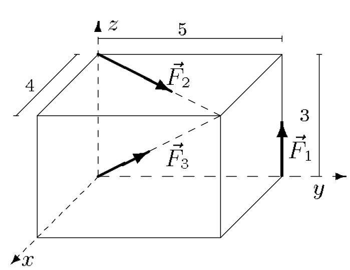
Получаем моменты заданной системы относительно новых осей координат и величину главного момента относительно центра A:

$$\begin{aligned}
M_{Ax'} &= \sum M_{x'i} = -F_{4z}y_A - F_{4y}c = -7.350\ \text{Нм},\\
M_{Ay'} &= \sum M_{y'i} = -F_1c + F_{4x}c + F_{4z}x_A = -10.856\ \text{Нм},\\
M_{Az'} &= \sum M_{z'i} = (F_1 + F_2)(b - y_A) - F_{4y}x_A +\\
&\qquad\qquad + F_{4x}y_A - F_3(a - x_A) = -1.352\ \text{Нм},\\
M_A &= \sqrt{M_{Ax'}^2 + M_{Ay'}^2 + M_{Az'}^2} = 13.179\ \text{Нм}.
\end{aligned}$$

Главный момент системы M_A относительно новой точки приведения совпадает с полученным ранее минимальным M_*, что подтверждает правильность расчетов.

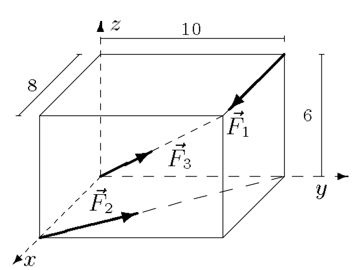
Условия задач. *Систему трех сил, приложенных к вершинам параллелепипеда, привести к началу координат. Найти координаты точки пересечения центральной винтовой оси с плоскостью xy. Размеры на рисунках даны в м, силы — в Н.*

1.



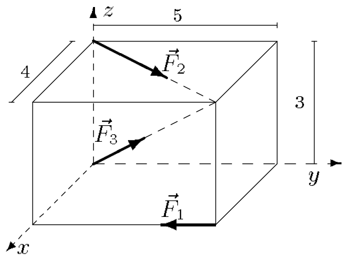
$F_1 = 1,\ F_2 = 1,\ F_3 = 2.$

2.



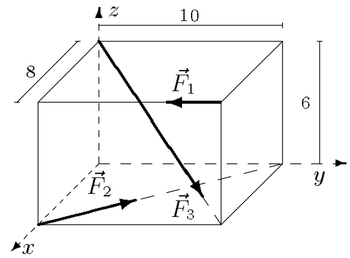
$F_1 = 2,\ F_2 = 3,\ F_3 = 5.$

3.



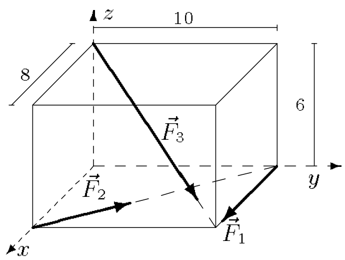
$F_1 = 3,\ F_2 = 3,\ F_3 = 6.$

4.



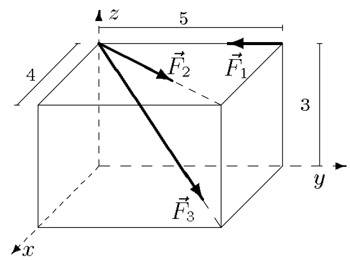
$F_1 = 4,\ F_2 = 5,\ F_3 = 8.$

5.



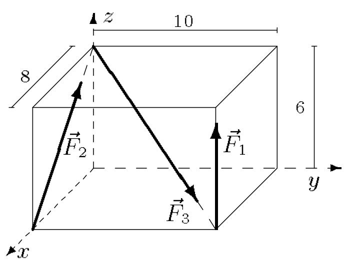
$F_1 = 1,\ F_2 = 2,\ F_3 = 4.$

6.



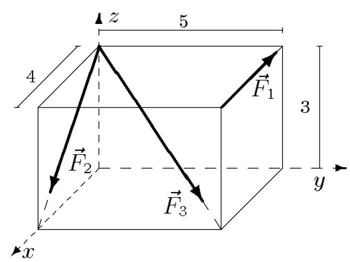
$F_1 = 2,\ F_2 = 2,\ F_3 = 5.$

7.



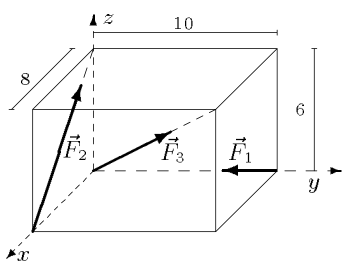
$F_1 = 3,\ F_2 = 4,\ F_3 = 5.$

8.



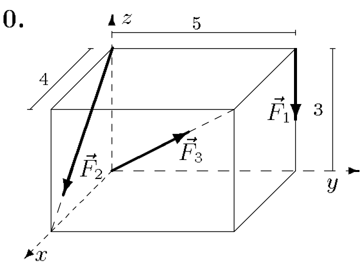
$F_1 = 4,\ F_2 = 4,\ F_3 = 6.$

9.



$F_1 = 1,\ F_2 = 2,\ F_3 = 5.$

10.



$F_1 = 2,\ F_2 = 2,\ F_3 = 3.$

Ответы

№	R_x	R_y	R_z	R	M_{Ox}	M_{Oy}	M_{Oz}	M_O	x_A	y_A
	Н				Нм				м	
1	1.756	2.195	1.849	3.364	2.657	1.874	0.000	3.252	−0.093	0.701
2	2.954	5.878	2.121	6.912	0.000	12.000	−1.259	12.066	−1.721	−1.978
3	5.268	3.585	2.546	6.862	−7.028	5.622	−12.000	15.000	−3.627	−0.677
4	1.402	5.561	−3.394	6.664	−9.941	27.153	−0.765	28.926	2.848	4.228
5	2.013	4.390	−1.697	5.119	−16.971	13.576	2.494	21.876	5.907	10.960
6	4.078	3.097	−2.121	5.543	−9.292	12.233	0.000	15.362	5.767	4.380
7	−0.372	3.536	3.279	4.836	8.787	−26.229	0.000	27.662	3.574	2.215
8	2.594	4.243	−4.946	7.013	−12.728	7.782	20.000	24.951	3.299	1.519
9	1.228	2.536	3.321	4.355	0.000	−9.600	0.000	9.600	1.911	0.475
10	3.297	2.121	−1.927	4.369	−10.000	4.800	0.000	11.092	3.805	3.146

Замечание. Решение задачи легко проверить в системе Maple V. Приведем фрагмент программы вычислений [*].

Введены следующие обозначения: `F[1]` — сила F_1, `T[1]` — радиус-вектор точки приложения силы F_1, `R` — главный вектор, `M` — главный момент, `II` — скалярный инвариант.

```
>    with(linalg):
>    F[1]:=vector(3,[-4,0,0]):  F[2]:=vector(3,[-10,0,0]):
>    F[3]:=vector(3,[0,-21,0]):
>    F[4]:=evalm(4*normalize(vector(3,[a,b,-c]))):
>    T[5]:=vector(3,[0,0,0]):  T[1]:=vector(3,[0,b,c]):
>    T[2]:=vector(3,[a,b,0]):  T[3]:=vector(3,[a,b,0]):
>    T[4]:=vector(3,[0,0,c]):
>    R:=evalm(add(F[i],i=1..N)); R0:=evalf(norm(R,2));
>    M:=evalm(add(crossprod(T[i],F[i]),i=1..N));
>    M0:=evalf(norm(M,2));       II:=dotprod(R,M);
```

Здесь использована библиотека `linalg`. В последних версиях Maple 6,7,8 существует более совершенный пакет `LinearAlgebra`. В этом случае операторы скалярного и векторного произведения необходимо заменить соответственно на `DotProduct` и `CrossProduct`.

[*] Полный текст программы размещен на странице сети Интернет www.academiaxxi.ru/solverTM.html.