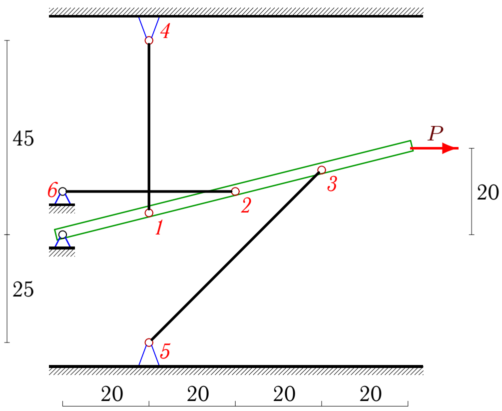
Статически неопределимая стержневая система



Дана стержневая конструкция, состоящая из жесткого недеформируемого бруса, закрепленного одним концом на неподвижном шарнире, и трех линейно упругих стержней (рис. 1). Стержни одинаковой жесткости прикреплены к брусу шарнирно, вес не учитывать. К свободному концу бруса приложена горизонтальная сила P= 16 кН. Размер бруса дан в проекциях. Найти усилия в стержнях.

Рис. 1

Решение

Способ 1. Составление уравнений совместности деформаций.

Система статически неопределимая. Для удержания бруса в равновесии очевидно достаточно неподвижного шарнира и только одного опорного стержня. Следовательно, система содержит две дополнительные неизвестные величины. Для их определения требуются два дополнительные уравнения. Этими уравнениями являются уравнения совместности деформаций. Совместность деформаций обеспечивает жесткость бруса. Рассмотрим малое отклонение OL' бруса от недеформированного состояния OL (рис.2). Шарниры 1,2,3 обозначим буквами A, B, C. После малой деформации эти шарниры примут положения A', B', C'. В силу малости деформаций дуги, по которым переместятся точки, заменим перпендикулярами к первоначальному положению бруса. Таким образом отрезки AA', BB', CC' (они выделены красным цветом) перпендикулярны OL. Новые положения опорных стержней O_1A', O_2B', O_3C' (выделены синим цветом). Опуская перпендикуляры из новых положений концов стержней на их первоначальные направления, получим удлинения $\Delta l_1 = AA''$ (рис.3), $\Delta l_2 = BB''$ (рис.4), $\Delta l_3 = CC''$ (рис.2). Для перемещений концов стержней справедлива очевидная пропорция

$$\frac{AA'}{20} = \frac{BB'}{40} = \frac{CC'}{60}. \qquad (1)$$

Кроме того, из прямоугольных треугольников имеем

$$AA' = \Delta l_1/\cos\beta,\ BB' = \Delta l_2/\sin\beta,\ CC' = \Delta l_3/\sin\gamma,$$

где $\sin\beta = LL''/OL = 20/\sqrt{20^2+80^2}$, $\sin\alpha = CK/O_3C = 40/\sqrt{40^2+40^2}$, $\gamma = \alpha - \beta$. Пропорция (1) примет вид

$$\frac{\Delta l_1}{20\cos\beta} = \frac{\Delta l_2}{40\sin\beta} = \frac{\Delta l_3}{60\sin\gamma}. \qquad (2)$$

Запишем закон Гука

$$\Delta l_1 = \frac{S_1 l_1}{EF},\ \Delta l_2 = \frac{S_2 l_2}{EF},\ \Delta l_3 = -\frac{S_3 l_3}{EF}. \qquad (3)$$

Минус в последнем случае объясняется сжатием стержня 3 (усилие сжатого стержня меньше нуля).

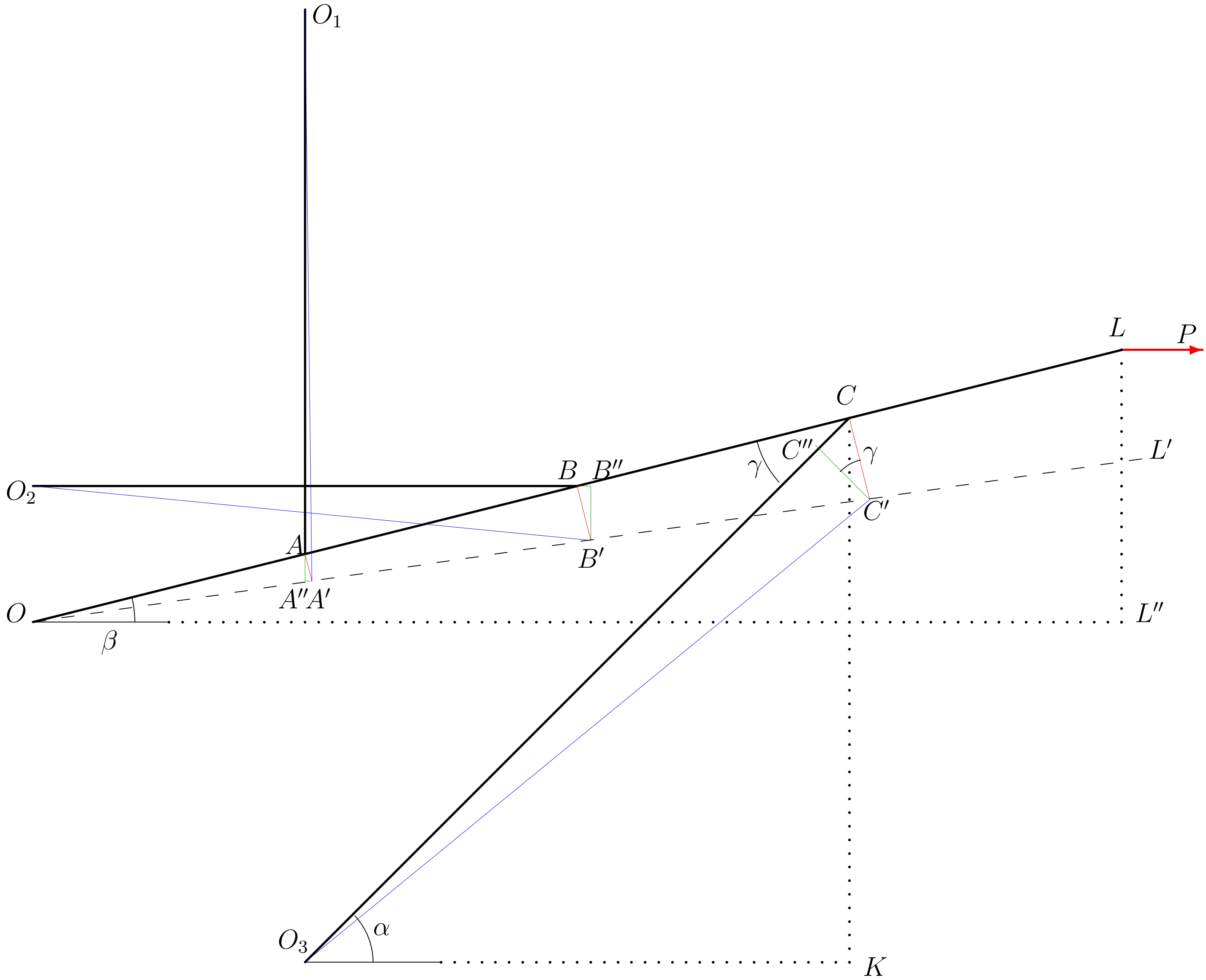
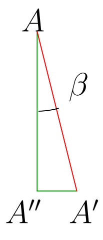


Рис. 2



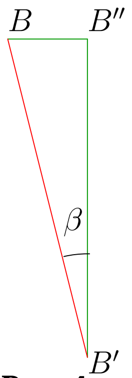


Рис. 3 **Рис. 4**

Подставим (3) в (2) и получим

$$S_2 = \frac{S_1 l_1}{20\cos\beta}\frac{40\sin\beta}{l_2} = 0.5S_1,\ \ S_3 = \frac{S_1 l_1}{20\cos\beta}\frac{60\sin\gamma}{l_3} = -1.125S_1.$$

Эти соотношения надо подставить в уравнение статики — уравнение моментов относительно неподвижного шарнира (рис. 5)

$$S_1 20 + S_2 O_2 O - S_3 \sin \gamma OC - P \cdot LL'' = 0,$$

или

$$60.8 S_1 - 20P = 0,$$

откуда $S_1 = 5.26$кН, $S_2 = 2.63$кН, $S_3 = -5.92$кН.

Способ 2. Метод сил. В качестве основной системы метода сил возьмем конструкцию с отброшенными шарнирами 6 и 4.

Система канонических уравнений метода сил для дважды статически неопределимой системы имеет вид

$$\begin{aligned} \delta_{11} S_1 + \delta_{12} S_2 + \Delta_{1p} &= 0 \qquad (4) \\ \delta_{21} S_1 + \delta_{22} S_2 + \Delta_{2p} &= 0 \qquad (5) \end{aligned}$$

Для вычисления коэффициентов системы необходимо найти усилия в основной системе от действия внешней нагрузки P и от единичных сил, соответствующих неизвестным усилиям S_1, S_2. Усилие в стержне 3 от нагрузки P найдем из уравнения моментов (рис. 6)

$$-S_3 \sin \gamma OC - P \cdot LL'' = 0.$$

Получим $S_{3,P} = -10.057$кН. Усилие в стержне 3 от единичной нагрузки, приложенной к опоре стержня 1, найдем из уравнения (рис. 8)

$$1 \cdot 20 - S_3 \sin \gamma OC = 0,$$

Получим $S_{3,1} = 0.628$. Усилие в стержне 3 от единичной нагрузки, приложенной к опоре стержня 2, найдем из уравнения (рис. 7)

$$1 \cdot 10 - S_3 \sin \gamma OC = 0,$$

Получим $S_{3,2} = 0.314$. Пользуясь формулой Максвелла-Мора, вычислим коэффициенты

$$\delta_{11} = \sum_k \int \frac{S_{k,1}^2}{EF} ds = \frac{l_1 \cdot 1^2 + l_3 S_{3,1}^2}{EF} = \frac{63.35}{EF},$$

$$\delta_{12} = \sum_k \int \frac{S_{k,1} S_{k,2}}{EF} ds = \frac{l_3 S_{3,1} S_{3,2}}{EF} = \frac{11.17}{EF},$$

$$\delta_{22} = \sum_k \int \frac{S_{k,2}^2}{EF} ds = \frac{l_2 \cdot 1^2 + l_3 S_{3,2}^2}{EF} = \frac{45.59}{EF},$$

$$\Delta_{1p} = \sum_k \int \frac{S_{k,1} S_{k,p}}{EF} ds = \frac{l_3 S_{3,1} S_{3,p}}{EF} = -\frac{357.57}{EF},$$

$$\Delta_{2p} = \sum_k \int \frac{S_{k,2} S_{k,p}}{EF} ds = \frac{l_3 S_{3,2} S_{3,p}}{EF} = -\frac{178.78}{EF}.$$

Решаем систему канонических уравнений (4,5), получаем $S_1 = 5.26$кН, $S_2 = 2.63$кН. Усилие в стержне 3 найдем из уравнения равновесия $S_3 = -5.92$кН.

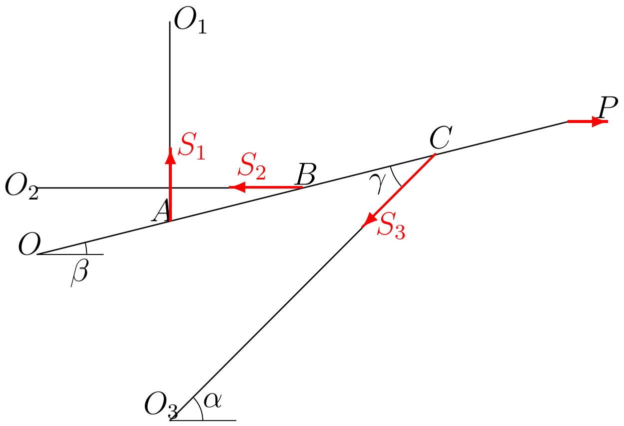


Рис. 5

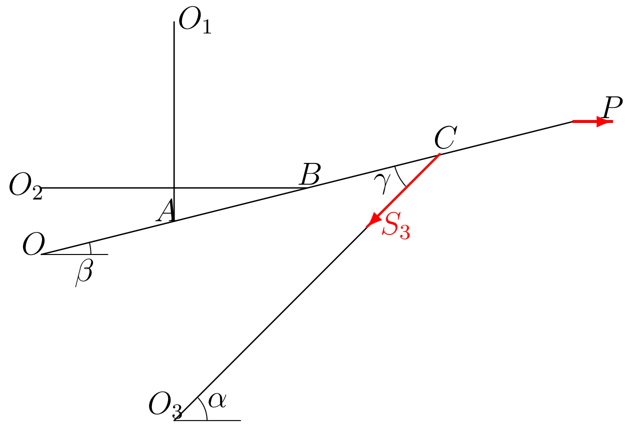


Рис. 6

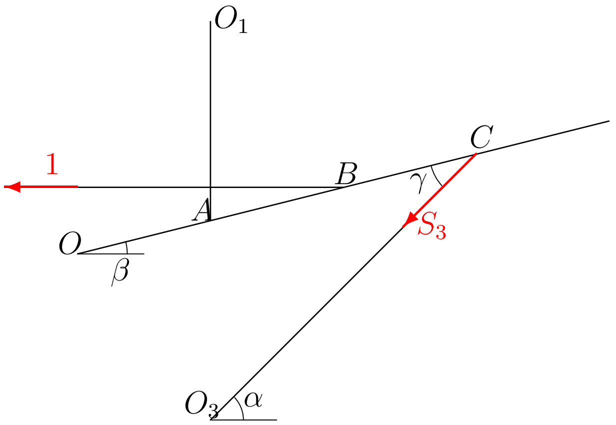


Рис. 7

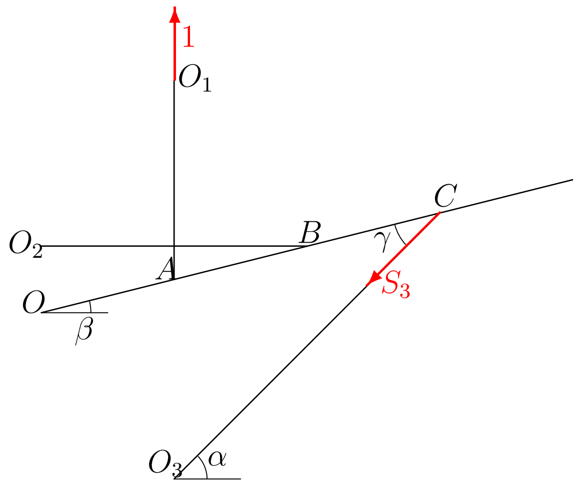


Рис. 8

	кН	кН	кН
1	$S_{3,5} = -5.92$	$S_{2,6} = 2.63$	$S_{1,4} = 5.26$