МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

МОСКОВСКИЙ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

А.В. КОРЕЦКИЙ, Н.В.ОСАДЧЕНКО

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ СТАТИКИ НА ПЕРСОНАЛЬНОМ КОМПЬЮТЕРЕ

Методическое пособие
по курсам
“Механика” и “Теоретическая механика”
для студентов энергомашиностроительных, теплоэнергетических, электроэнергетических и электротехнических направлений обучения

Москва Издательство МЭИ 2003

УДК
531
К 664
УДК: 531/534 : 681.322 – 181.4 (072)

Утверждено учебным управлением МЭИ

Рецензент докт. техн. наук А.Д.Трухний

Подготовлено на кафедре теоретической механики

Корецкий А.В., Осадченко Н.В.

Решение задач статики на персональном компьютере: Методическое пособие. – М.: Издательство МЭИ, 2003. – 64 с.

Излагается методика выполнения индивидуального домашнего задания и типового расчёта по разделу “Статика” курса механики в классах персональных компьютеров. Дается описание программного комплекса СТЕВИН, представляющего собой автоматизированную обучающую систему по статике абсолютно твёрдого тела на плоскости. Приводятся примеры решения задач.

Для студентов всех специальностей, изучающих курсы “Механика” и “Теоретическая механика”.

Введение

В последние годы отмечается возрастание темпов внедрения *современных информационных технологий* в преподавание точных наук, что вызывает необходимость переоценки многих распространённых методических приёмов и выработки новых подходов. Действительно, сложившаяся исторически парадигма высшего образования предусматривала, что в течение пяти-шести лет студент должен усвоить основную часть той информации, которая потребуется ему в будущей деятельности. Однако в результате так называемого "информационного взрыва", характеризующегося стремительным увеличением объёма накопленных человечеством знаний, эта цель стала практически нереализуемой.

Разумеется, в современном обществе образование и не может ставить своей целью только чистую передачу некоторого объёма информации. Гораздо важнее сформировать у будущего специалиста способности и потребность постоянно обновлять свои знания, "доучиваясь" уже в ходе своей профессиональной деятельности. В связи с этим важна [8] рациональная организация преподавания точных наук, существенно опирающаяся на многообразные дидактические и инструментальные возможности современного аппаратного и программного компьютерного обеспечения.

Опыт преподавания различных учебных дисциплин, накопленный на кафедре теоретической механики МЭИ, показал [4,8], что наиболее эффективной сферой применения *компьютерных обучающих программ* оказывается их применение для организационной, методической и инструментальной поддержки *самостоятельной работы* студентов. В самом деле, если преподаватель при традиционном подходе задаёт на дом задание по общеизвестному задачнику (или даже по внутривузовскому, но одинаковое для всей группы студентов), то весьма затруднительно проконтролировать самостоятельность выполнения студентом домашнего задания. Наличие же соответствующих обучающих программ позволяет обеспечить широкое применение *индивидуальных заданий* различных уровней сложности.

Так, учебные планы курсов "Механика" и "Теоретическая механика" предусматривают выдачу студентам *типового расчёта* из трёх заданий (по числу основных разделов курса). Задание по статике включает обычно три задачи, одна из которых предусматривает составление системы уравнений равновесия и её решение при помощи компьютера. Без использования компьютера решение получаемой системы линейных уравнений 6-го порядка весьма затруднительно. Для решения других задач (называемых ниже индивидуальными домашними заданиями, *ИДЗ*) достаточно возможностей обычного калькулятора.

Впрочем, использование компьютера для численных расчётов – это всего лишь одна из тех возможностей, которые может предоставить студенту современная вычислительная техника. Современные обучающие программы способны, не подменяя собой преподавателя, оказать студенту существенную помощь в усвоении методики решения задач, контролируя правильность самого процесса их решения и предоставляя обучающемуся необходимую по мощь (наводящие вопросы, вывод на экран справочного материала). Преподаватель же при помощи компьютера может осуществлять контроль и управление учебным процессом. При этом *своевременность* проведённого контроля весьма важна и для студента, который получает возможность систематизировать свои знания и, что немаловажно, оперативно восполнить имеющиеся пробелы. *Объективность* контроля, возможность выполнять задание в *естественном темпе* способствуют активной работе студента.

Таким образом, компьютерные системы обучения позволяют, гарантируя индивидуальную работу с каждым студентом, добиться резкого снижения непроизводительных затрат времени и у преподавателя, и у учащихся. За счёт этого удаётся повысить *экономичность* учебного процесса, обеспечить *массовость* образования.

Применение таких обучающих систем, созданных на рациональной методической основе и учитывающих характерные для компьютерного обучения информатико-психологические аспекты, способно интенсифицировать и существенно улучшить *качество* процесса обучения, так как компьютер "позволяет накапливать, ускоренно совершенствовать и неискажённо тиражировать прогрессивный дидактический опыт" [6]. При этом обучающая система для студента служит терпеливым, внимательным проводником и помощником в продвижении по незнакомому материалу, а для преподавателя – достаточно квалифицированным ассистентом, помогающим умело организовать работу обучаемого.

Итак, обучающая система выступает как быстро тиражируемое, дешёвое, надёжное, простое в применении, дидактически действенное и достаточно универсальное средство обучения.

В методическом пособии описана работа с обучающей системой СТЕВИН, реализованной на персональных компьютерах класса PC IBM. Эта система может использоваться при изучении основ статики в вузах различного профиля. Благодаря достаточно гибкой структуре и имеющимся средствам настройки её нетрудно адаптировать к конкретному учебному плану.

1. Обучающая система СТЕВИН: назначение, возможности, рекомендации по использованию

1.1. Что такое система СТЕВИН?

Система СТЕВИН представляет собой *компьютерную обучающую систему* по статике абсолютно твёрдого тела на плоскости. Это – программный комплекс, реализованный на компьютерах класса PC IBM (в качестве языка реализации использован Си).

Система может быть использована на аудиторных занятиях и при самостоятельной подготовке. Она содержит набор заданий различной степени сложности, встроенные средства контроля за правильностью хода решения задачи, разнообразные справочные материалы и сервисные возможности.

С помощью системы СТЕВИН можно:

1) повторить и закрепить в памяти основные определения, факты, формулы, практические рекомендации, относящиеся к статике;

2) потренироваться в решении простых задач, ориентированных на отработку и закрепление навыков исследования условий равновесия механических систем;

3) выполнить задачу контрольной работы по статике системы твёрдых тел;

4) получить индивидуальное домашнее задание по статике и проверить, правильно ли оно было решено;

5) найти численное решение уравнений равновесия, составленных в процессе выполнения задачи типового расчёта по статике.

1.2. Как воспользоваться услугами системы СТЕВИН?

Чтобы воспользоваться услугами системы СТЕВИН, нужно иметь доступ к персональному компьютеру, совместимому с PC IBM, на жёстком диске которого находятся файлы этой системы. Кроме того, надо запастись парой листков бумаги и авторучкой – они потребуются для несложных выкладок (при этом нет нужды иметь с собой микрокалькулятор: в состав системы входит встроенный калькулятор, доступный в любой момент времени).

Для вызова системы СТЕВИН следует запустить на выполнение программу **“stevin.exe”** (если Вы когда-либо работали на IBM-совместимом компьютере, то сделаете это без труда; если же нет – обратитесь к тому, кто знает, и он научит Вас за пару минут).

После запуска программы Вы на экране видеомонитора увидите заставку системы. Нажав клавишу **Enter**, Вы уберёте эту заставку с экрана, и на нём появится *основное меню* системы СТЕВИН.

1.3. Основное меню системы СТЕВИН

Меню – одно из важнейших средств, при помощи которых можно вести диалог с программой на персональном компьютере. Наличие меню позволяет осуществлять *множественный выбор* [6], т.е. выбор одной возможности из предложенного набора.

Система СТЕВИН также широко использует множественный выбор. Меню данной системы отображаются на экране в виде набора прямоугольных полей (соответствующих *пунктам* меню), одно из которых является *активным* и отличается от аналогичных полей своим цветом. При помощи клавиш управления курсором (клавиши ←, ↑, ↓, →, **Home** и **End** на клавиатуре) можно сделать активным любой из пунктов меню. Последующее нажатие клавиши **Enter** сообщает системе о том, что конкретный пункт (а именно – тот, который в данный момент является активным) выбран.

В основном меню системы СТЕВИН присутствуют четыре пункта. Три из них – это названия *подсистем* системы СТЕВИН; четвёртый пункт используется для завершения работы с системой.

Версия 3.1 системы СТЕВИН, обсуждаемая здесь, включает следующие четыре подсистемы: КОНСУЛЬТАНТ, РЕПЕТИТОР, КОНТРОЛЁР и КАЛЬКУЛЯТОР (название последней в основном меню отсутствует). Все они функционально независимы, но работают в единой среде и допускают переход из одной подсистемы в другую с возможностью последующего возврата.

Тот режим работы подсистемы, когда она вызвана через основное меню, называется *основным режимом*. Подсистема КОНСУЛЬТАНТ может также работать в *режиме поддержки*, когда обращение к ней происходит во время работы с другой компонентой комплекса СТЕВИН (для этого достаточно нажать функциональную клавишу **`F1`**); подсистема КАЛЬКУЛЯТОР работает только в режиме поддержки и может быть вызвана практически в любой момент нажатием клавиши **`F2`**.

1.4. Подсистема КОНСУЛЬТАНТ

Предположим, что в основном меню системы СТЕВИН выбран первый пункт. Тогда на экране возникнет меню подсистемы КОНСУЛЬТАНТ.

Эта подсистема играет вспомогательную роль. Её основное назначение – предоставить необходимый справочный материал. В соответствии с этим в меню подсистемы присутствуют следующие пункты:

1) информация о системе СТЕВИН;

2) краткие сведения из теории с рекомендациями по методике решения задач статики;

3) особенности конкретных видов связей.

Четвёртый – заключительный – пункт меню позволяет завершить работу с подсистемой и вернуться к основному меню системы СТЕВИН.

Меню подсистемы организовано по иерархическому принципу: выбор одного из его пунктов означает переход к меню соответствующей её компоненты. Например, если после появления на экране меню подсистемы КОНСУЛЬТАНТ сразу же нажать **`Enter`** (выбрав тем самым первый пункт меню), то получаем следующий перечень рубрик: **“О названии системы”** [1], **“Как ответить на вопрос системы”**, **“Набор выражения, формулы”**, **“Набор греческих букв”**, **“Набор переменной с индексами”**, **“Знаки операций и скобки”**, **“Использование функций”**, **“Градусное / радианное измерение углов”**, **“Об ошибках при наборе”**. Каждой из этих рубрик отвечает компактный текст, содержащий рекомендации по использованию соответствующих возможностей системы СТЕВИН (включая один-два примера).

---

[1] Система названа в честь одного из основоположников статики – великого нидерландского математика, механика и инженера Симона Стевина (1548 –1620).

Вторая из компонент подсистемы КОНСУЛЬТАНТ напомнит (в случае необходимости) основные определения и формулы статики, используемые в процессе решения задач, а также рекомендуемую при этом последовательность действий. Здесь текст сведён до минимума, но, как правило, сопровождается поясняющим рисунком.

Разумеется, содержащиеся здесь сведения не заменят учебника. Если справочный материал оказался недостаточным, то Вы пришли в класс неподготовленным, и поэтому знакомство с системой следует отложить…

Наконец, третья компонента подсистемы фактически представляет собой краткий справочник по основным видам связей, встречающимся в задачах (приводятся условные изображения связей, разъясняется их механический смысл, указывается, какими бывают реакции этих связей). При этом процедуру освобождения от связей с введением реакций система СТЕВИН наглядно демонстрирует, используя технику компьютерной мультипликации, как развёртывающийся во времени процесс.

Напомним, что к подсистеме КОНСУЛЬТАНТ можно обращаться в двух режимах. Использовать её в основном режиме целесообразно, если Вы в первый раз работаете с системой СТЕВИН [1].

Более характерна для подсистемы, однако, работа в режиме поддержки, при котором она оказывает обучаемому помощь по его требованию. Как говорилось выше, для того, чтобы во время работы с какой-либо другой компонентой комплекса СТЕВИН обратиться к подсистеме КОНСУЛЬТАНТ, достаточно нажать функциональную клавишу **`F1`** (“**`Help`**”).

Заметим, что основной режим работы подсистемы предоставляет больше информации (например, динамическая визуализация процесса освобождения от связей доступна только в основном режиме).

1.5. О визуальном представлении информации в системе СТЕВИН

Знакомясь с подсистемой КОНСУЛЬТАНТ, обратите внимание на то, в каком виде представлена информация на экране видеомонитора. Она организована в виде набора окон, заключённых в рамки и содержащих рисунки и текстовые пояснения. При этом и в текстах, и на рисунках использованы стандартные для механики обозначения: латинские и греческие буквы, индексные обозначения, специальные математические знаки.

Обеспечить такое представление информации позволяет *графический режим* работы видеоадаптера. В данном режиме работают все подсистемы комплекса СТЕВИН, и это не случайно. При изучении механики графический способ представления информации вообще играет важнейшую роль, а в статике (где он существенно используется методикой решения задач) – особенно. Что касается способа записи формул, то он привычен для Вас – именно такая запись используется в учебной литературе или на доске при аудиторных занятиях, да и в тетради Вы записываете формулы точно так же.

---

[1] В частности, настоятельно рекомендуется предварительно ознакомиться с рубрикой “Об ошибках при наборе” подсистемы КОНСУЛЬТАНТ.

Шрифт, используемый системой СТЕВИН, также приближен к привычному. Каждая строка текста, выведенная на экран системой СТЕВИН, имеет три уровня: основной, над- и подстрочный, что позволяет использовать в формулах верхние и нижние индексы. Текст на экране всегда отформатирован, интервалы между словами и строками подобраны с учётом особенностей видеокадра.

1.6. О вводе информации с клавиатуры

При работе с подсистемами РЕПЕТИТОР, КОНТРОЛЁР или КАЛЬКУЛЯТОР потребуется вводить с клавиатуры выражения или формулы. Покажем на примере, как это делается.

Пусть в задаче, которую поставила перед Вами система СТЕВИН, дана балка AD, на правую половину которой действует распределённая нагрузка, и пусть в точке B балка опирается на острие, а в точке A – на катковую опору, расположенную на наклонной плоскости (при этом равновесие балки обеспечивается при помощи силы F, приложенной к точке D). Пусть на рисунке к задаче дан следующий текст:

Дано: P – вес балки AD; q – интенсивность распределённой нагрузки; α – угол наклонной плоскости с горизонталью; AD = 4b; DB = b.

Предположим, что система спросила Вас:

Чему равна реакция R_B?

При этом на экране появляется взятый в рамку текст:

Введите выражение:

(Прямоугольное поле чёрного цвета под текстом “Введите выражение” представляет собой *поле ввода*; в нём вводимое выражение будет отображаться по мере его набора.)

Тогда, составив на листке бумаги уравнение моментов относительно точки A и решив его относительно R_B, можно дать следующий ответ:

(2bP + 6bqb) / 3b

(после набора выражения нужно нажать клавишу **`Enter`**).

Все символы, входящие в это выражение, присутствуют на клавиатуре, поэтому трудностей при наборе, скорее всего, не возникнет (следите только за регистром, в котором ведётся набор; так, в приведённом ответе вместо заглавной буквы **P** нельзя набирать строчную **p**). Ответ свой Вы могли бы дать и в любой другой из эквивалентных форм записи (например, числитель и знаменатель приведённой дроби можно было бы сократить на **b**). Однако величины, входящие в выражение, должны быть выражены через параметры, данные в условии: писать **AB** вместо **3b** нельзя.

Если при вводе допущена ошибка (а клавиша **Enter** ещё не нажата), то её можно тут же исправить. В частности, если Вы ввели не ту литеру и тут же заметили это, то нажмите один раз клавишу **Backspace** [1] (неверно введённая литера при этом из поля ввода исчезнет) и после этого осуществите правильный набор.

Если ошибка замечена Вами не сразу, то используйте клавиши управления курсором ← и →. Курсор при наборе выражения в поле ввода высвечен под обрабатываемой в текущий момент литерой в виде горизонтальной чёрточки; его нужно подвести под неверно введённую литеру, после чего эту литеру удаляют нажатием клавиши **Del** (**Delete**) и набирают нужную букву. Затем курсор вновь устанавливают в конец набранной части вводимого выражения (для быстрого перехода в конец строки удобно использовать клавишу **End**, а для перехода в начало – клавишу **Home**).

Наконец, если Вы, сделав ошибку, поторопились нажать клавишу **Enter**, то и в этом случае ещё не всё потеряно. Дело в том, что система СТЕВИН осуществляет синтаксический анализ всякого введённого выражения, проверяя корректность его записи. Например, если в приведённом примере при наборе будет пропущена закрывающая скобка, то система СТЕВИН выдаст сообщение

Закрывающая скобка не обнаружена в ожидаемом месте

а текст “Введите выражение” над полем ввода будет заменён на “Исправьте выражение”. После этого остаётся только выправить выражение так, как это было объяснено выше.

Если ошибка не привела к появлению синтаксически неверного выражения (например, если в приведённом примере вместо цифры **3** в знаменателе введена цифра **4**), то синтаксический контроль не выявит ошибки. Однако система СТЕВИН после каждой операции по вводу выражения с клавиатуры выдаёт *запрос на подтверждение*:

Вы уверены?

[1] Название **Backspace** носит клавиша, обычно размещающаяся над клавишей **Enter** и обозначаемая ← (не спутайте с обозначаемой так же клавишей управления курсором).

В данном случае, разумеется, следует ответить отрицательно, и тогда система даст возможность исправить неверно набранное выражение.

Рассмотрим ещё ситуацию, когда на некоторый вопрос системы СТЕВИН можно ответить ДА или НЕТ. В этом случае для утвердительного ответа достаточно (в любом регистре) ввести одну из следующих литер: **Д** (да), **Y** (yes) или **J** (ja, jes). Утвердительным ответом является также нажатие клавиши **Enter**. Для отрицательного ответа следует набрать **Н** (нет) или **N** (no, nein, ne); нажатие клавиши **Esc** также служит отрицательным ответом.

Таким образом, в нашем примере на вопрос “Вы уверены?” можно ответить **N**.

И только если Вы, допустив ошибку в своём ответе, так и не заметили её и утвердительно ответили на запрос о подтверждении, вот тогда…

Допустим теперь, что система СТЕВИН задала такой вопрос:

Запишите сумму проекций всех сил на ось у

В этом случае ответ мог бы быть таким:

$$R_A \cos\alpha - P + R_B - 2qb$$

Для того чтобы набрать переменную с индексом R_A, наберите заглавную букву **R**. Затем однократным нажатием клавиши ↓ перейдите на подстрочный уровень и наберите там заглавную букву **A**, после чего вернитесь на основной уровень однократным нажатием клавиши ↑. Символы основных элементарных функций (**sin**, **cos**, **exp** и т.п.) система СТЕВИН распознаёт правильно, только их необходимо набирать строчными буквами; аргумент этих функций заключать в скобки без нужды не требуется. Чтобы ввести букву греческого алфавита (в нашем примере – **α**), нужно однократно нажать функциональную клавишу **F3**, а затем набрать латинскую букву, соответствующую данной (в большинстве случаев аналог очевиден: **α** – **a**, **β** – **b**, **γ** – **g** и т.п.).

Разумеется, ответ можно было ввести и в такой форме:

$$\sin(\pi/2+\alpha)\,R_A + P\cos\pi + R_B - (3-1)\,bq$$

Ещё одна форма записи ответа:

$$R_A \sin(90^\circ - \alpha) + R_B - P - q * 2b$$

Все представленные варианты ответа эквивалентны друг другу и, следовательно, будут одинаково восприниматься системой. Присутствие в последней формуле символа градуса после числа 90 обязательно, иначе угол будет восприниматься как 90 *радиан*; ввести символ градуса можно, если нажать однократно функциональную клавишу **F4**, а затем набрать в латинском регистре строчную букву **o** (курсор по вертикали не перемещать).

З а м е ч а н и е. Если в процессе ввода выражения Вы запутались с уровнями, или если внешне правильная формула воспринимается системой как синтаксически неверная, имейте в виду следующее.

Возможность использовать различные уровни в текстовых строках реализована так: во внутреннее представление строки (используемое программными компонентами системы СТЕВИН) наряду с обычными литерами включены “псевдолитеры” – специальные коды, не имеющие непосредственного графического представления, но влияющие на размещение на экране очередных литер строки. В частности, при вводе выражения каждое нажатие клавиши ↓ или ↑ приводит к тому, что в строку, формируемую в памяти компьютера, заносится соответствующая псевдолитера смены уровня. Если перемещать курсор вдоль вводимой строки, то он будет останавливаться как под литерами, так и под псевдолитерами, причём, находясь под последними, курсор изменяет свою форму (линия из сплошной становится прерывистой).

Будьте внимательны при переходах с уровня на уровень. Если в тот момент, когда курсор находится под псевдолитерой смены уровня, нажать клавишу **Del**, то эта псевдолитера будет удалена, и расположение последующей части строки изменится. Поэтому, если Вы в процессе набора запутались с уровнями, то простейший способ выйти из положения – это удалить, двигаясь вдоль строки, все псевдолитеры (нажимая **Del** всякий раз, когда курсор имеет прерывистую форму), а затем ещё раз пройтись вдоль строки слева направо, нажимая в местах требуемой смены уровней соответствующую клавишу перемещения курсора по вертикали (↑, ↓).

Аналогично, если в формуле, которая внешне выглядит корректно, система диагностирует синтаксическую ошибку, то имеет смысл проверить, не оказались ли в текстовой строке лишние псевдолитеры, и удалить таковые.

1.7. Подсистема РЕПЕТИТОР

Главную роль в рамках комплекса СТЕВИН играют подсистемы РЕПЕТИТОР и КОНТРОЛЁР.

Подсистема РЕПЕТИТОР на примере ряда задач различной степени сложности поможет освоить приёмы их решения. В меню подсистемы можно выбрать один из двух пунктов: **“Знакомство с примерами составления уравнений равновесия”** или **“Решение контрольной задачи по статике”**. Какой пункт выбрать, Вы решаете сами (возможно, пользуясь рекомендацией преподавателя). Если в дальнейшем на основании анализа введённых ответов выяснится, что Вы явно переоценили свою подготовленность, то РЕПЕТИТОР предлагает более простые задачи.

Подсистему РЕПЕТИТОР (как и подсистему КОНТРОЛЁР) преподаватель, планируя методику работы студентов с комплексом СТЕВИН, может перед началом сеанса работы настроить на тот или иной *режим обучения*.

Одним из вариантов предварительной настройки системы СТЕВИН служит установка режима *принудительного тренинга*. Если такой режим обучения включён, то подсистема РЕПЕТИТОР предупредит Вас об этом и, прежде чем позволит выбрать один из пунктов своего меню, предложит решить короткую тестовую задачу, где требуется исследовать равновесие одного твёрдого тела.

На экране появляются два окна: левое, которое содержит рисунок и краткую формулировку условия задачи под заголовком “Дано: …”, и правое, содержащее текст с развёрнутой постановкой задачи. После того, как Вы внимательно прочитаете этот текст и нажмёте клавишу **Enter**, во втором окне вместо текста появится ещё один рисунок, на котором тело будет уже освобождено от связей. Далее система начнёт задавать простые вопросы (ответом на которые служат достаточно простые формулы). Если, однако, ответы на них всё же окажутся неправильными, то система будет блокировать попытки перехода к другим разделам до тех пор, пока не начнёт получать только правильные ответы (единственным исключением является возможность вызова подсистемы КОНСУЛЬТАНТ по нажатию клавиши **F1**).

Цель работы в режиме принудительного тренинга – дать обучаемому, не имевшему ранее опыта работы с компьютером, возможность адаптироваться в новых для него условиях. Одновременно он может освоиться с правилами ввода информации, принятыми в системе СТЕВИН, и попрактиковаться с вводом формул. Если же с ответами на вопросы, задаваемые в режиме принудительного тренинга, не справляется тот, кто ранее уже работал с системой, то это, как правило, говорит о том, что он просто не в форме (и тогда он сам должен решить, что лучше: или усилием воли настроить себя на внимательную работу, или отложить работу с компьютером на другой раз).

Среди вопросов, которые задаёт система в процессе решения задачи, одни требуют ответа по принципу “да – нет” (выше уже разбиралось, как можно отвечать на такие вопросы), а другие предусматривают, что в качестве ответа нужно ввести некоторое число, выражение или формулу.

Перед тем, как приступить к вводу формулы или выражения, внимательно разберитесь в обозначениях, использованных в условии задачи, а также в рисунке (в течение всего хода решения задачи Вы его видите перед собой). Вдумайтесь также в сам вопрос. Например, если бы в примере из параграфа 1.6 система предложила записать не “сумму проекций всех сил на ось y”, а “уравнение равновесия в проекции на ось y”, то ответом на этот вопрос было бы уже не выражение, а формула вида

$$\mathbf{R_A \cos\alpha - P + R_B - 2qb = 0}$$

При этом в ответе нельзя использовать никакие неизвестные или параметры, отсутствовавшие в постановке задачи. Если же система, согласившись с введённым ответом, спросит, чему равна реакция $\mathbf{R_A}$, то соответствующий ответ можно будет записать в форме

$$\mathbf{(P + 2qb - R_B)\ /\ \cos\alpha}$$

(однако только при условии, что ранее Вы уже сообщили обучающей программе, чему равно $\mathbf{R_B}$; если же никаких неизвестных ещё не найдено, то в ответе на подобный вопрос могут фигурировать только исходные данные).

После того, как тестовая задача будет успешно решена, подсистема РЕПЕТИТОР известит, что отныне все её возможности в Вашем распоряжении (если режим предварительного тренинга не был включён, то пункты меню данной подсистемы доступны с самого начала). Теперь можно, выбрав соответствующий пункт меню, перейти либо к систематическому освоению приёмов решения задач статики, либо к выполнению контрольной работы.

При этом форма Вашего диалога с подсистемой останется той же, что и в режиме предварительного тренинга, только отныне система будет аккуратно фиксировать количество допущенных ошибок, чтобы в конце сеанса подвести итог работы и сообщить Вам всё, что она о Вас думает.

Помните, что если количество сделанных ошибок превысит порог, установленный преподавателем в процессе настройки подсистемы, то РЕПЕТИТОР тут же перейдёт в режим принудительного тренинга (даже если такой режим не использовался при входе в подсистему) и обяжет Вас решать тестовую задачу без какой-либо поддержки со своей стороны.

1.8. Подсистема КОНТРОЛЁР

Подсистема КОНТРОЛЁР, проверив, в какой мере обучаемый освоил технику решения задач (используется тот же прием тестирования, что и в подсистеме РЕПЕТИТОР)[1], предоставляет ему возможность проверить правильность решения индивидуального домашнего задания и выполнить вычисления, предусмотренные в типовом расчёте.

Индивидуальные домашние задания (ИДЗ) выдаются преподавателем в начале семестра. Их подготовка также возложена на систему СТЕВИН: входящая в её состав автономная программа **“`synstat.exe`”** синтезирует условия этих заданий автоматически, выбирая случайным образом несколько абсолютно твёрдых тел из заранее предусмотренного набора и сочленяя их при помощи тех или иных связей. При подборе численных значений параметров для задания также используется датчик случайных чисел.

Предположим, что Вы выполнили ИДЗ и имеете на руках листок с ответами. Тогда ответы можно проверить, сообщив подсистеме КОНТРОЛЁР исходные данные задания. В ответ данная подсистема выдаст свой вариант ответов для этого ИДЗ.

Что касается *типового расчёта*, то получить решение задач, не прибегая к помощи компьютера, весьма затруднительно. Система СТЕВИН и здесь предоставляет свои услуги. Если, решая задачу по изложенной в [4,5] методике, Вы составили систему линейных алгебраических уравнений для определения реакций связей, то для её решения достаточно выбрать второй пункт в меню подсистемы КОНТРОЛЁР и ввести в компьютер матрицу коэффициентов при неизвестных и столбец свободных членов.

Ввод этих данных осуществляется тоже при помощи меню, только полями его служат элементы расширенной матрицы системы, которую в табличной форме КОНТРОЛЁР отображает на экране дисплея (при этом Вы всё время видите, что набираете, так что при неправильном наборе какого-либо коэффициента его можно в любой момент времени исправить). Первоначально на экране отображены единичная матрица коэффициентов и нулевой столбец свободных членов; ввод данных сводится к их корректировке. Если в ходе набора потребовалось заново вычислить тот или иной коэффициент, то это можно сделать, обратившись к подсистеме КАЛЬКУЛЯТОР.

---

[1] Если тестирование дало неудовлетворительные результаты, то КОНТРОЛЁР прекращает работу, вызывая вместо себя РЕПЕТИТОР. Заметим, что основная цель тестирования – выявить студентов с недостаточным уровнем подготовки и помочь им получить необходимые навыки решения задач статики.

Закончив ввод данных, надо нажать функциональную клавишу **F10**. После этого на экран будет выведено решение системы, т.е. значения реакций связей, подлежавших определению (если подсистема обнаружит, что введённая матрица коэффициентов является вырожденной, то она сообщит Вам об этом и предложит внести необходимые исправления). Переписав их на листок бумаги, нажмите **Enter** – в ответ подсистема спросит Вас: **“Закончили ли Вы работу с системой линейных уравнений ?”**

Если ответ будет утвердительным, то на экране вновь появится меню подсистемы КОНТРОЛЁР. Если же ответить отрицательно – подсистема вернётся в режим корректировки коэффициентов, и можно будет заменить одно или насколько ранее введённых значений.

1.9. Подсистема КАЛЬКУЛЯТОР

Четвёртая компонента системы СТЕВИН – КАЛЬКУЛЯТОР. Вызвать его, как уже говорилось выше, можно нажатием клавиши **F2**.

КАЛЬКУЛЯТОР предназначен для простейших численных расчётов, позволяя вычислять значения не слишком сложных математических выражений (содержащих знаки арифметических операций и символы основных элементарных функций). Он обрабатывает формулы по тем же правилам, что и другие подсистемы.

Допустим, например, что в какой-то момент работы потребовалось вычислить $\cos\alpha$ по известному значению $\sin\alpha$, равному 0,287. Вы нажимаете клавишу **F2** и выходите на меню подсистемы КАЛЬКУЛЯТОР. После выбора пункта **“Вычислить выражение”** на экране появится область ввода. Набрав там выражение

cos arcsin 0.287

и нажав **Enter**, Вы прочитаете (предварительно ответив “да” на запрос о подтверждении) искомый результат: 0.96793.

2. Рекомендации по решению задач на равновесие системы тел

2.1. Предмет рассмотрения

Как известно [1], в статике “изучаются методы преобразования одних совокупностей сил в другие, эквивалентные данным, выясняются условия равновесия, а также определяются возможные положения равновесия”. Полученные в статике результаты могут быть применены для решения разнообразных задач, существенно различающихся как по своей постановке, так и по приёмам решения.

Настоящее пособие ориентировано на студентов, впервые изучающих теоретическую механику, и не ставит своей целью разбор всех основных типов задач, представленных в распространённых задачниках. Здесь рассматриваются только те задачи, в которых заранее известно, что система абсолютно твёрдых тел находится в равновесии, и заданы некоторые силы, действующие на эти тела; требуется найти остальные силы. Ещё одно ограничение: в этих задачах для каждого из тел системы все силы, приложенные к нему, лежат в одной плоскости (случай *плоской системы сил*).

Приведённый в данном разделе материал, разумеется, не может заменить те сведения, которые содержатся в главах учебника, посвящённых статике. Мы ограничились лишь минимумом сведений, достаточным для решения задач охарактеризованного выше класса. Нужные формулы даются без доказательства – лишь с небольшими пояснениями. Зато значительное внимание уделено методике решения задач.

2.2. Уравнения равновесия

Для того, чтобы найти искомые силы, нужно, прежде всего, составить уравнения равновесия для каждого из тел системы. Для этого надо выяснить, какие силы действуют на эти тела.

Рассмотрим тело, на которое действуют силы $\overline{\mathbf{F}}_1, \overline{\mathbf{F}}_2, \ldots, \overline{\mathbf{F}}_N$, где N – число сил (рис.1). Каждая из сил приложена в определённой точке, радиус-вектор которой обозначим $\overline{\mathbf{r}}_k$ (на рисунке показан только вектор $\overline{\mathbf{r}}_1$). Введём для дальнейшего также систему координат $Oxyz$ (в большинстве задач оси x и y будем, как и на рисунке, направлять соответственно вправо и вверх, а ось z, перпендикулярная плоскости рисунка, будет направлена на нас).

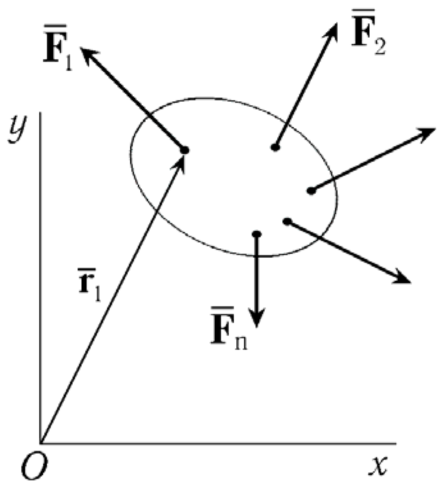


Рис. 1. Тело, на которое действует система сил

Известно [1,2], что для равновесия такого тела должны выполняться *условия равновесия* – два векторных равенства вида

$$\overline{\mathbf{R}} = 0\,, \qquad \overline{\mathbf{L}}_B = 0\,, \tag{1}$$

где B – произвольно выбранная точка, именуемая далее *полюсом*.

Вектор $\overline{\mathbf{R}}$ называется *главным вектором системы сил* и определяется следующим соотношением:

$$\overline{\mathbf{R}} = \sum_k \overline{\mathbf{F}}_k\,. \tag{2}$$

Таким образом, главный вектор системы сил – это просто векторная сумма всех сил.

Вектор $\overline{\mathbf{L}}_B$ называется *главным моментом системы сил относительно полюса* B. Он тоже, по определению, равен сумме N векторов, но уже других:

$$\overline{\mathbf{L}}_B = \sum_k \overline{\mathbf{M}}_B(\overline{\mathbf{F}}_k)\,. \tag{3}$$

Слагаемое с номером k в этой сумме представляет собой момент k-й силы относительно выбранного полюса. Понятие момента силы относится к числу важнейших понятий статики и определяется следующим образом:

Моментом силы $\overline{\mathbf{F}}_k$ *относительно полюса* B называется векторное произведение радиуса-вектора точки приложения силы на вектор самой силы:

$$\overline{\mathbf{M}}_B(\overline{\mathbf{F}}_k) = [\,\overline{\mathbf{r}}_{Bk}, \overline{\mathbf{F}}_k\,]\,. \tag{4}$$

Существенно, что радиус-вектор точки приложения проводится из данного полюса (что и отражено в обозначениях). Фактически фигурирующий в формуле (4) вектор $\overline{\mathbf{r}}_{Bk}$ равен разности $\overline{\mathbf{r}}_{Bk} = \overline{\mathbf{r}}_k - \overline{\mathbf{r}}_B$ радиус-векторов точки приложения и полюса B, проведённых из начала системы координат $Oxyz$.

Таким образом, условия равновесия (1) имеют следующий смысл: для равновесия абсолютно твёрдого тела необходимо и достаточно, чтобы как сумма всех действующих на тело сил, так и сумма моментов этих сил относительно какого-либо полюса равнялись нулю. Речь идёт обо всех силах – как заданных, так и тех, которые требуется найти.

Если спроектировать два векторных равенства (1) на оси системы координат $Oxyz$, получим *уравнения равновесия тела* – шесть скалярных равенств, которые и можно будет использовать для нахождения неизвестных сил. Однако выше мы условились рассматривать только случай плоской системы сил, а в этом случае всё упрощается. Именно:

Предположим теперь, что все силы (как и точки их приложения) лежат в плоскости Oxy; пусть в этой плоскости лежит и полюс B. Тогда проекция каждой из этих сил на ось z будет равна нулю, а у моментов сил в силу (4) обратятся в нуль проекции на оси x и y (поскольку сам вектор момента при сделанных предположениях будет – в силу (4) – перпендикулярен плоскости Oxy). Поэтому из шести уравнений равновесия, которые приходится рассматривать в случае пространственной системы сил, три обращаются в заведомые тождества.

Итак, справедливы следующие *уравнения равновесия для плоской системы сил*:

$$\boxed{\sum_k F_{kx} = 0\,, \quad \sum_k F_{ky} = 0\,, \quad \sum_k M_{Bz}(\overline{\mathbf{F}}_k) = 0} \;. \tag{5}$$

В левых частях первых двух из этих уравнений стоят суммы проекций всех сил соответственно на оси x и y; в левой части третьего из уравнений (5) стоит сумма проекций моментов всех сил на ось z. Для краткости данные уравнения далее будут именоваться так: “уравнение проекций на ось x”, “уравнение проекций на ось y” и “уравнение моментов”.

2.3. Вычисление момента силы

Рассмотрим способы, по которым можно вычислить проекцию момента силы на ось z (далее для краткости слово “проекция” обычно будем опускать).

Разумеется, можно пользоваться непосредственно формулой (4), вычисляя векторное произведение в правой части этой формулы. Но при решении задач статики по теме “Плоская система сил” обычно более эффективны другие способы вычисления момента силы.

Первый из рассматриваемых здесь способов основан на следующем геометрическом построении.

Проведём прямую (рис.2), на которой лежит вектор силы (эта прямая называется *линией действия* силы). Опустим из полюса на эту линию перпендикуляр; длину h этого перпендикуляра принято называть *плечом* силы.

Таким образом, плечо силы – это расстояние от полюса до линии действия силы.

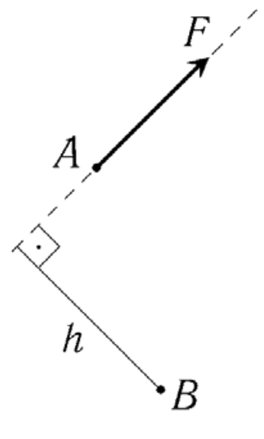


Рис. 2. Первый способ вычисления момента силы

Обратите внимание, что на рис.2 над буквой F черта отсутствует. Это – принципиально! Здесь буква обозначает модуль вектора силы, но не сам этот вектор; направление же этого вектора показано стрелкой.

Поскольку вектор однозначно определён, если известны его модуль и направление, то такой способ задания векторов, во всяком случае, вполне корректен. Причины же того, почему при решении конкретных задач мы будем придерживаться, следуя [13], именно такого способа задания векторов, обсудим ниже.

После того, как данное построение выполнено, момент силы $\overline{\mathbf{F}}$ относительно полюса B можно вычислить по следующей формуле:

$$M_{Bz}(\overline{\mathbf{F}}) = \pm Fh\,. \tag{6}$$

Знак в формуле (6) выбирается вполне определённым образом: произведению Fh приписывается знак “плюс”, если сила стремится повернуть тело вокруг оси z против хода часовой стрелки, и знак “минус” в противном случае.

При определении знака проекции момента силы на ось z полезен такой приём. Представьте себе, что в полюс вбит гвоздь, а рисунок может свободно поворачиваться вокруг этого гвоздя. Теперь достаточно мысленно потянуть за стрелку; если тело повернётся в положительном направлении (против хода часовой стрелки), то проекция момента будет положительна, а если в отрицательном – отрицательна.

Пользуясь этим приёмом, полезно помнить, что силу можно переносить вдоль линии действия, так что для большей наглядности имеет смысл (прежде чем тянуть за стрелку) переместить точку приложения силы в основание опущенного из полюса на эту линию перпендикуляра.

С учётом этого становится понятно, что в ситуации, изображённой на рис.2, в формуле (6) следует выбрать именно знак “минус”.

Отметим ещё такое следствие из формулы (6): момент ненулевой силы относительно данного полюса обращается в нуль тогда и только тогда, когда расстояние h равно нулю, т.е. когда полюс лежит на линии действия силы.

Как мы увидим в параграфе 2.7, на этапе выбора полюса данный факт играет ключевую роль.

Итак, в основе первого способа вычисления момента силы лежит непосредственное вычисление плеча этой силы.

Этот способ вычисления момента является универсальным. Однако в ряде ситуаций он приводит к более громоздким выражениям, чем другой способ вычисления момента, к рассмотрению которого мы и переходим.

Второй способ вычисления момента силы основан на том, что сила $\overline{\mathbf{F}}$ раскладывается на две составляющие, обычно параллельные координатным осям (рис.3).

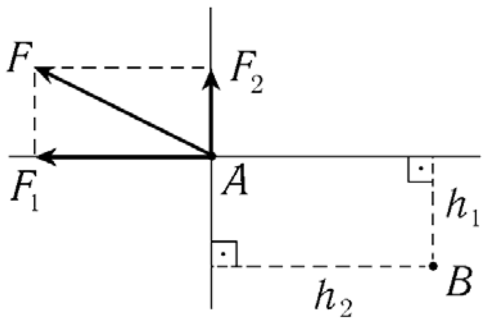


Рис. 3. Второй способ вычисления момента силы

В этом случае момент данной силы относительно полюса B можно найти как сумму моментов этих составляющих относительно этого же полюса:

$$M_{Bz}(\overline{\mathbf{F}}) \;=\; \pm F_1 h_1 \pm F_2 h_2 \,. \tag{7}$$

Знаки при обоих слагаемых в формуле (7) определяются независимо – по правилам, изложенным выше. Например, в ситуации, представленной на рис.3, знак первого слагаемого будет положительным, а второго – отрицательным.

Заметим, что сила $\overline{\mathbf{F}}$ является равнодействующей сил $\overline{\mathbf{F}}_1$ и $\overline{\mathbf{F}}_2$. Поэтому формула (7) немедленно следует из формулы (6), если применить теорему Вариньона [1]: момент равнодействующей относительно произвольной точки равен сумме моментов отдельных сил относительно этой же точки.

Итак, в основе второго способа вычисления момента силы лежит разложение этой силы на составляющие. Поскольку оба способа равносильны, то результат в обоих случаях будет одинаков, однако форма, в которой он будет представлен, может оказаться разной. Разумнее использовать первый способ, если плечо силы найти проще, чем плечи отдельных составляющих. В противном случае следует предпочесть второй способ.

Геометрические построения, характерные для этих двух способов, обычно выполняются в уме. Впрочем, можно указать ещё и третий способ вычисления момента силы – чисто аналитический, вообще не требующий каких-либо геометрических построений.

Третий способ вычисления момента силы основан на переходе к координатному представлению как самой силы, так и радиуса-вектора точки её приложения силы. В этом случае, если вычислить момент силы как векторное произведение по формуле (4) и затем взять его проекцию на ось z, то результат будет таким:

$$M_{Bz}(\overline{\mathbf{F}}) \;=\; x_A F_y - y_A F_x \,. \tag{8}$$

Здесь x_A и y_A – координаты радиуса-вектора $\overline{\mathbf{r}}_{BA} = \overline{BA}$ точки приложения силы.

Формулу (8) проще запомнить, если координаты вектора $\overline{\mathbf{F}}$ обозначать не F_x и F_y, а X и Y, и читать буквы по-русски. Тогда формула принимает вид

$$M_{Bz}(\overline{\mathbf{F}}) \;=\; x\,Y - y\,X \tag{9}$$

(индекс A здесь также опущен); в вузовском фольклоре она известна как “формула ХУ минус УХ”.

При решении тех задач, о которых идёт речь в данном методическом пособии, нет необходимости обращаться к третьему способу вычисления момента силы: первые два способа оказываются более удобными. Однако нужно иметь в виду, что при решении задач статики для систем с большим числом твёрдых тел рационально использовать компьютер не только для численного решения уравнений равновесия, но и для получения самих этих уравнений. В этой ситуации использование формулы (8) оказывается более выгодным, так как процесс составления уравнений равновесия при этом легче алгоритмизировать.

2.4. Пара сил и её момент

Во многих задачах оказывается, что среди сил, действующих на тело, имеются две силы, равные по модулю и направленные противоположно. В этом случае используется специальная терминология.

Система $\{\,\overline{\mathbf{F}}_1\,,\,\overline{\mathbf{F}}_2\,\}$ называется *парой сил*, если $\overline{\mathbf{F}}_2 \;=\; -\,\overline{\mathbf{F}}_1$ (рис.4).

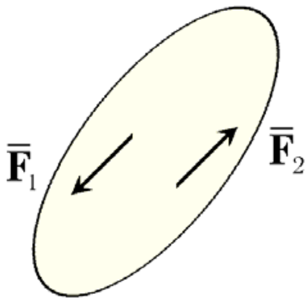


Рис. 4. Пара сил

Строго говоря, под парой сил естественно понимать не только такую систему из двух сил, но и любую систему из произвольного числа сил, которая приводится к данной с помощью эквивалентных преобразований, но на этом мы останавливаться не будем.

Отметим, что понятие пары сил играет важнейшую роль при дедуктивном построении теории статики. Здесь же нам потребуются следующие результаты.

Свойства пары сил:

1) вклад пары сил в $\overline{\mathbf{R}}$ равен нулю;

2) вклад пары сил в $\overline{\mathbf{L}}_B$ не зависит от выбора полюса B.

Указанные “вклады”, как нетрудно заметить, имеют вид

$$\overline{\mathbf{F}}_1 + \overline{\mathbf{F}}_2 \qquad \text{и} \qquad M_{Bz}(\overline{\mathbf{F}}_1) + M_{Bz}(\overline{\mathbf{F}}_1)\;. \tag{10}$$

Таким образом, первая из этих сумм равна нулю (что очевидным образом следует из определения пары сил), а вторая не зависит от выбора полюса B (хотя отдельные слагаемые от такого выбора зависят).

Следовательно, в действительности пара сил (с точностью до эквивалентности) однозначно характеризуется вектором

$$\overline{\mathbf{M}} \;\equiv\; \overline{\mathbf{M}}\,(\,\overline{\mathbf{F}}_1\,,\,\overline{\mathbf{F}}_2\,) \;=\; \overline{\mathbf{M}}_B\,(\,\overline{\mathbf{F}}_1\,) + \overline{\mathbf{M}}_B\,(\,\overline{\mathbf{F}}_2\,)\;, \tag{11}$$

который называется *моментом пары сил*. Он не зависит от выбора полюса (что и отражено в обозначениях).

В задачах, где фигурируют пары сил, принято рисовать не сами силы, составляющие эти пары, а только векторы моментов пар. В случае плоской пары сил каждый такой вектор ортогонален плоскости рисунка, и его принято изображать дугой со стрелкой на конце. Рядом с дугой проставляют обозначение модуля данного вектора. Действует обычное правило о положительном и отрицательном направлениях вращения: если дуга ориентирована против хода часовой стрелки, то вектор момента направлен на наблюдателя (и его проекция на ось z положительна); если же дуга ориентирована по ходу часовой стрелки, то вектор момента направлен от наблюдателя (и его проекция на ось z отрицательна).

В соответствии с этим вместо вполне корректного выражения “на тело действует пара сил с моментом M” часто, допуская вольность речи, говорят: “на тело действует момент M”. Язык, как всегда, стремится к лаконичности – даже в ущерб точности. Такой способ выражаться вполне укоренился, и поэтому приемлем (но только при условии, что говорящий отчётливо осознаёт, что на самом деле имеется в виду).

Отсюда вытекает следующий рецепт:

Пусть на твёрдое тело (наряду с другими силами) действует момент (рис.5); этот момент может иметь либо положительную, либо отрицательную ориентации (случаи *а* и *б*). Тогда при составлении уравнений равновесия в левую часть уравнения моментов следует добавить слагаемое, равное M в первом случае и $-M$ во втором. В левые части уравнений проекций ничего не добавляется.

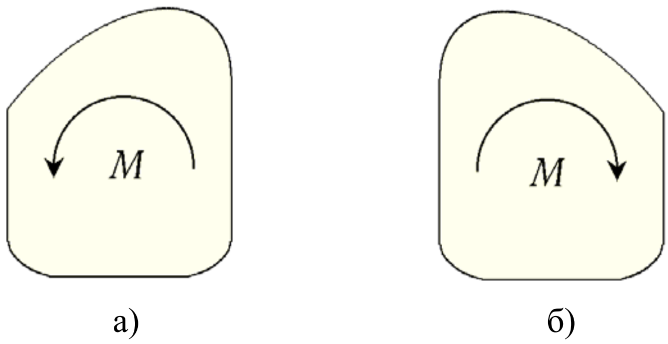


Рис. 5. Случаи различной ориентации момента, действующего на тело

2.5. Распределённая нагрузка

Система сил, действующих на твёрдое тело, может включать не только сосредоточенные силы (до сих пор мы говорили только о них), но и распределённые силы.

Различают [1] силы, распределённые по линии, по поверхности и по объёму тела. Ограничимся здесь лишь случаем сил, распределённых по линии (а именно – вдоль участка прямой). Более того, предполагаем, что вдоль этого отрезка силы распределены равномерно: нагрузка на подотрезок длины Δx пропорциональна Δx и не зависит от длины подотрезка.

Рассматриваемая в учебниках техника эквивалентных преобразований систем параллельных сил позволяет заменить распределённую нагрузку одной сосредоточенной силой. Сформулируем соответствующий рецепт для случая равномерно распределённой нагрузки.

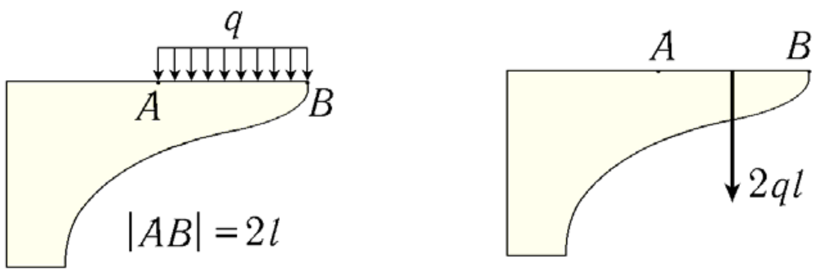


Рис. 6. Замена распределённой нагрузки сосредоточенной силой

Если на какой-либо участок границы тела действует равномерно распределённая нагрузка (рис.6), то её можно заменить эквивалентной сосредоточенной силой по правилам:

1) точкой приложения заменяющей сосредоточенной силы служит середина участка, на который действует распределённая нагрузка, а направление данной силы совпадает с направлением маленьких стрелок в условном обозначении этой нагрузки;

2) модуль заменяющей силы находится как произведение интенсивности q распределённой нагрузки на длину участка, к которому она приложена.

После того, как указанная замена выполнена, заменяющая сила трактуется так же, как и другие известные силы, действующие на тело.

2.6. Связи и их реакции

Связями называются заранее заданные ограничения, налагаемые на положения (а в общем случае – на движение) тел механической системы.

Например, если гладкий шар с центром C и радиусом R находится на гладкой горизонтальной плоскости Oxy, то плоскость мешает шару провалиться вниз, так что на его положения (как бы он ни двигался) заранее наложено такое ограничение: $z_C \geqslant R$.

Если на тело не наложено никаких связей, то тело называют *свободным*.

В механике принимают [1] следующее положение (*аксиома о связях*, или *принцип освобождаемости*): всякое несвободное тело можно рассматривать как свободное, если отбросить связи и заменить их действие *реакциями связей*.

Речь идёт о том, что всегда можно приложить к телу такие силы, действие которых на это тело будет эквивалентно эффекту наложения на это тело связей; именно эти силы и называют реакциями связей.

В примере с шаром можно отбросить плоскость и заменить её действие на шар силой, направленной вертикально вверх и приложенной в точке контакта шара с плоскостью (или, что в данном случае эквивалентно – в центре шара). Если выбрать модуль этой силы так, чтобы сумма проекций на ось z этой силы и всех остальных сил, действующих на шар, равнялась нулю, то такая сила и будет эквивалентна реакции связи.

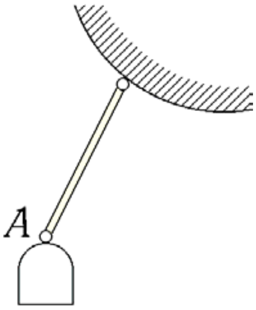
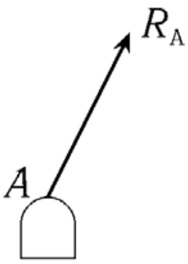
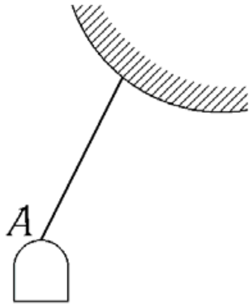
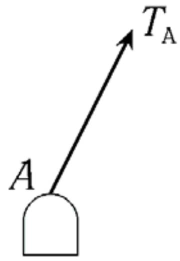
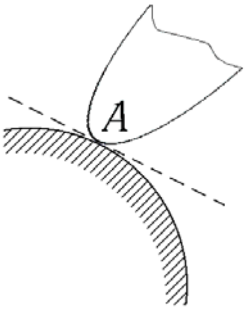
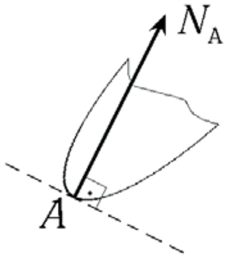
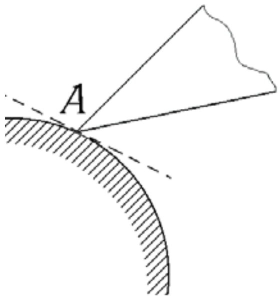
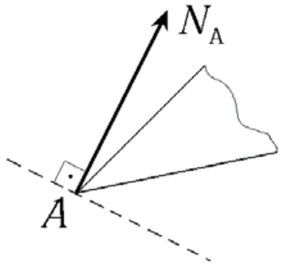
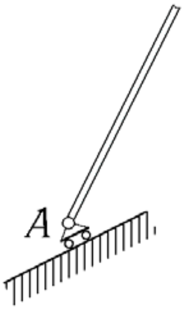
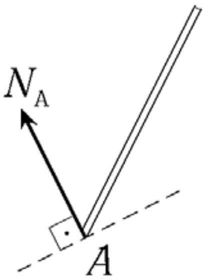
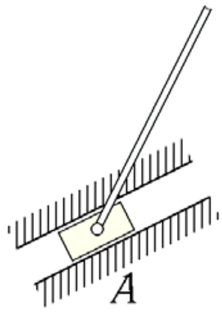
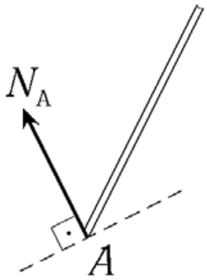
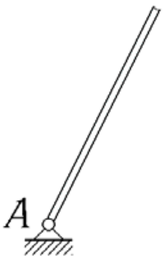
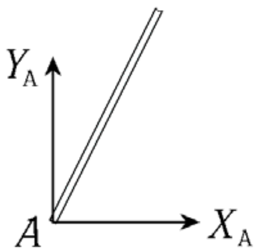
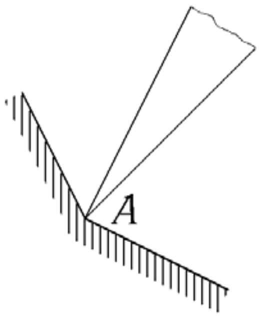
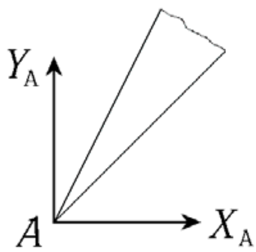
Таким образом, в механике силы делятся на два основных класса: *активные силы* и *реакции связей*.

Активные силы вполне корректно определяются как силы, не являющиеся реакциями связей. В задачах статики обычно (но не всегда) эти силы являются заданными. А вот реакции связей никогда заранее не известны; в рассматриваемых здесь задачах статики именно их и требуется найти.

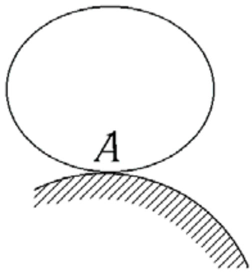
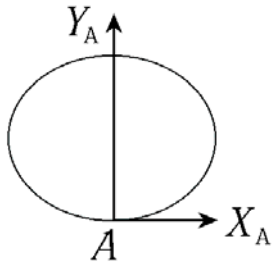
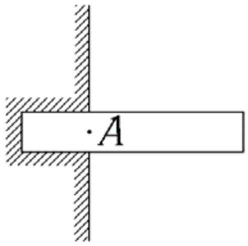
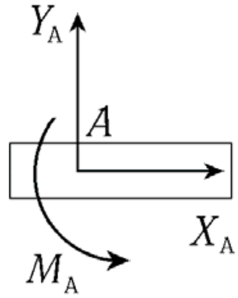
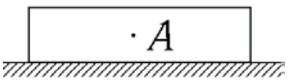
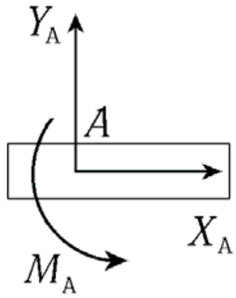
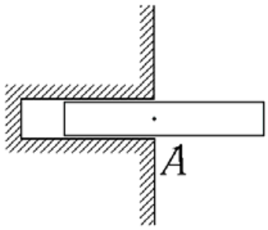
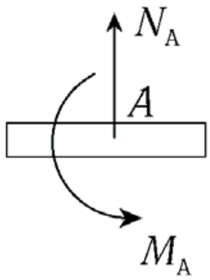
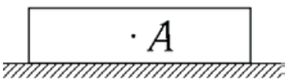
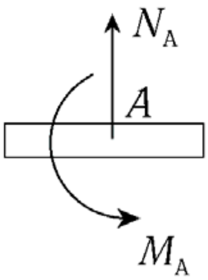
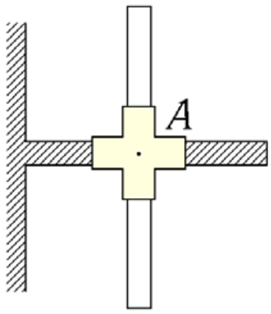
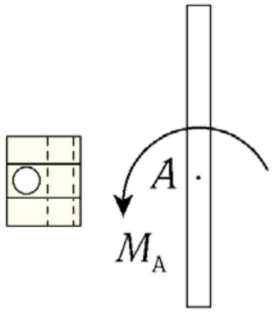
Заметим, что общее понятие связи достаточно абстрактно. В конкретных задачах с наличием связей мы сталкиваемся тогда, когда тела механической системы соединены друг с другом тем или иным образом. Реакции связей при этом существенно зависят от характера соединения тел друг с другом.

В связи с этим приведём таблицу, в которой для различных видов связей (или, точнее, способов соединения тел между собой) представлены соответствующие реакции связей.

Таблица 1

<table>
<tr><td colspan="2">I. а) ненагруженный поводок $\underline{\nabla}$ Δ</td><td colspan="2">б) нить $\underline{\nabla}$</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">в) точечный контакт гладких поверхностей $\underline{\nabla}$</td><td colspan="2">г) контакт угла с гладкой поверхностью $\underline{\nabla}$</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">д) катковая опора $\underline{\nabla}$</td><td colspan="2">е) ползун с шарниром $\underline{\nabla}$ Δ</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">II. а) шарнир $\underline{\nabla}$ Δ</td><td colspan="2">б) угол в угле $\underline{\nabla}$</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Продолжение табл.1

<table>
<tr><td colspan="2">в) точечный контакт шероховатых поверхностей $\underline{\nabla}$, $\overset{\nabla}{\Delta}$</td><td colspan="2">III. а) жёсткая заделка $\overset{\nabla}{\Delta}$</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">б) неточечный контакт шероховатых поверхностей $\underline{\nabla}$, $\overset{\nabla}{\Delta}$</td><td colspan="2">IV. а) скользящая заделка $\overset{\nabla}{\Delta}$</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">б) неточечный контакт гладких поверхностей $\underline{\nabla}$, $\overset{\nabla}{\Delta}$</td><td colspan="2">V. а) крестовина $\overset{\nabla}{\Delta}$</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Напоминаем, что речь идёт о задачах по теме “Плоская система сил”. В табл.1 представлены наиболее распространённые виды связей, а также некоторые менее распространённые, но интересные в плане сопоставления их с другими видами.

Каждый вид связей представлен двумя рисунками. На левом рисунке изображены два тела, соединённые между собой. Одно из этих тел – неподвижно (что показано, как это принято в статике, штриховкой); впрочем, это непринципиально, и случай двух подвижных тел ничем не отличается от рас сматриваемого здесь. Другое тело – это как раз то тело, равновесие которого анализируется.

На правом рисунке изображено это последнее тело, но уже после освобождения от связей и введения реакций связей.

Предполагается, что на рассматриваемое тело действуют ещё какие-то другие силы (они не показаны на рисунке, но при их отсутствии всё становится тривиальным, так как в этом случае все изображённые на правом рисунке силы и моменты будут равны нулю).

Если внимательно присмотреться к таблице, то легко выделить пять различных типов, к которым относятся представленные в ней виды связей (эти пять типов обозначены римскими цифрами): к типу I отнесены те виды связей, в которых действие неподвижного тела на подвижное сводится к одной силе; для связей типа II налицо две силы; типа III – две силы и момент; типа IV – одна сила и момент; типа V – только один момент. Связи, отнесённые к одному типу, в общем-то, эквивалентны друг другу (за исключением одного обстоятельства, которое сейчас и будет обсуждаться).

Среди связей в механике принято [1] выделять связи *удерживающие*[1] и связи *неудерживающие*[2] (в табл.1 удерживающие связи условно обозначены значком $\frac{\nabla}{\Delta}$, а неудерживающие – значком $\underline{\nabla}$).

Разница между ними следующая: в случае удерживающей связи ограничения на движение тел формально записываются в виде равенств, а в случае неудерживающей связи – в виде неравенств. Поэтому реакция удерживающей связи может быть направлена как в сторону, показанную на рисунке в табл.1, так и в диаметрально противоположную сторону, а вот реакция неудерживающей связи обязана быть направлена именно так, как показано.

Например, в рассмотренном примере с шаром (в табл.1 ему соответствует случай Iв) имеем дело как раз с неудерживающей связью. Реакция плоскости в этом примере может быть направлена вертикально вверх, но не вертикально вниз. Если другие силы, действующие на шар, таковы, что из условий равновесия шара будет следовать, что реакция плоскости должна быть направлена вертикально вниз, то никакого равновесия вообще не будет: реакция в действительности обратится в нуль, а шар придёт в движение и сойдёт со связи, т.е. оторвётся от плоскости.

В некоторых ситуациях (варианты IIв, IIIб, IVб) одному виду связей соответствуют сразу два значка. Здесь соединение между телами реализуется как комбинация неудерживающих и удерживающих связей.

В рассматриваемых ситуациях, с одной стороны, анализируемое тело не может проникнуть внутрь неподвижной поверхности, но может оторваться от неё (поэтому реакции, обозначаемые Y_A и N_A, могут быть направлены вверх, но не вниз).

С другой стороны, сила, действующая по касательной к шероховатой поверхности, может быть направлена в произвольную сторону (что говорит об удерживающем характере связи). Физически эта сила реализуется как сила сцепления, но сейчас для нас её природа не важна, и мы обозначаем её просто X_A.

Наконец, момент M_A также может быть направлен произвольно[3].

---

[1] Часто используется иной термин – “двусторонняя связь”.

[2] Другое название – “односторонняя связь”.

[3] Аккуратный анализ характера связей в случаях IIIб и IVб показывает, что хотя знак момента может быть любым, но на его *величину* налагаются определённые ограничения (на таком анализе, однако, мы задерживаться не будем).

Заметим, что в одних случаях тела соединены между собой непосредственно, в других же – через промежуточный элемент (ненагруженный поводок, каток, ползун с шарниром, нить и т.п.). В статике этому различию не следует придавать большого значения. Так, вид связей Iд (катковая опора) вполне эквивалентен виду связей Iг, где никакого промежуточного элемента нет.

Напротив, принадлежность конкретного вида связей к одному из пяти выделенных здесь типов имеет первостепенное значение. Заметим, что при отсутствии каких-либо связей подвижного тела с неподвижным это тело способно совершать *три* независимых перемещения[1]: поворот вокруг оси z и смещения вдоль каких-либо взаимно перпендикулярных осей, лежащих в плоскости Oxy. Имеет место следующее общее положение:

Реакция связей возникает в том и только в том случае, когда возможное перемещение в соответствующем направлении запрещено связью.

Применяя этот принцип, можно легко справиться и с таким видом связей, который не включён в табл.1.

Следует, пожалуй, обсудить также виды связей IVа и Vа. Скользящая заделка отличается от жёсткой (случай IIIа) тем, что балка не заделана в стенку "намертво", а может двигаться в гладком канале; поэтому вместо двух сил, действовавших в случае IIIа, остаётся лишь одна сила, направленная по нормали к стенкам канала.

Соединение же тел посредством крестовины – пример соединения тел через промежуточный элемент. На правом из рисунков для случая Vа показан вид крестовины сбоку. Видно, что через неё проходят два гладких канала, перпендикулярные друг другу. Поэтому подвижное тело в рассматриваемом примере может смещаться относительно неподвижного тела в любом направлении: как в направлении оси x (тогда оно будет перемещаться вместе с крестовиной), так и в направлении оси y (в последнем случае крестовина останется неподвижной). Поворот же тела вокруг оси z запрещён связью, что и является причиной возникновения момента M_A.

При освобождении тела от связей следует изобразить это тело на рисунке, указав *все* действующие на него силы и моменты – как активные, так и реакции связей. Заметим, что условия большинства задач, которые Вам могут встретиться, сопровождаются рисунком, на котором активные силы уже показаны. Но так бывает не во всех случаях: иногда наличие некоторых активных сил просто оговаривают в тексте условия (особенно часто это касается сил тяжести). Поэтому рекомендуется перед решением задачи внимательно прочитать текст её условия, чтобы не пропустить какую-либо силу или момент.

Реакции связей Вы должны изобразить сами: никто другой за Вас это не сделает. При этом, если связи – удерживающие, то не обязательно при изображении пытаться угадать, куда действительно будет направлена реакция: если при решении задачи для её величины будет получено отрицательное значение, то это означает, что в действительности реакция будет направлена в сторону, противоположную направлению стрелки.

Напротив, для реакции неудерживающей связи направление стрелки определяется однозначно. Если же при решении задачи величина хотя бы одной из реакций неудерживающих связей окажется отрицательной, то это означает, что равновесие физически нереализуемо.

[1] Напоминаем, что сейчас рассматриваются только плоские задачи.

Вернёмся в заключение к виду связей, который представлен в табл.1 случаем Ia. Рассмотрим его более подробно, и начнём обсуждение с определений.

Тело называется *поводком* [10], если оно имеет ровно два соединения с другими телами. Говорят, что поводок – *ненагруженный*, если на него не действуют никакие активные силы (как сосредоточенные, так и распределённые) или моменты (т.е. если после освобождения от связей на него будут действовать только реакции в двух точках соединений).

Обычно в задачах ненагруженные поводки представлены в виде тонких стержней (прямолинейных или изогнутых), и тогда предпочитают говорить о ненагруженных стержнях. Впрочем, это не обязательно, и в общем случае форма поводка может быть произвольной.

В дальнейшем будем предполагать, что соединения поводка с другими телами допускают вращение, т.е. каждое из них относится к типу I или II из табл.1 (но не к типам III–V). Тогда (приводя, если требуется, силы в каждом из двух соединений к равнодействующим), можно считать, что ненагруженный поводок находится под действием двух сил. Но тогда можно воспользоваться *аксиомой о двух силах* [1], которая утверждает: абсолютно твёрдое тело под действием двух сил находится в равновесии тогда и только тогда, когда эти две силы равны по модулю, действуют по одной прямой и направлены в противоположные стороны. Пример ненагруженного поводка под действием таких двух сил представлен на рис.7 в правом верхнем углу.

Подчеркнём, что модули обеих сил обозначены одним и тем же символом R_A.

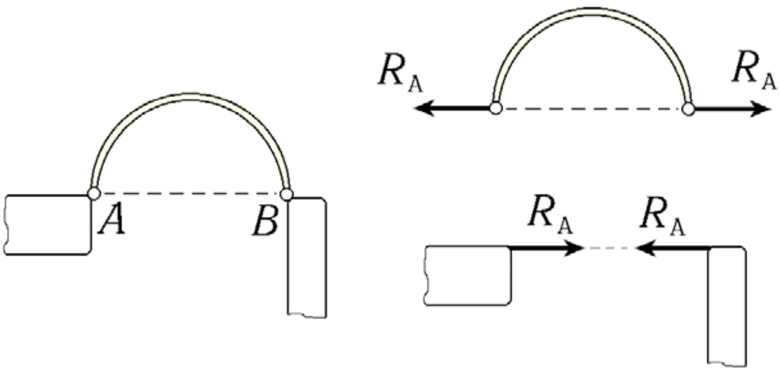


Рис. 7. Силы, действующие на тела, соединённые ненагруженным поводком

Учитывая это, в дальнейшем можно не рассматривать ненагруженные поводки как самостоятельные тела (т.е. тела, для которых составляются уравнения равновесия), а считать их промежуточным элементом, с помощью которого осуществляется соединение между другими телами системы. Это и предполагалось при составлении табл.1, в которой ненагруженный поводок представлен как один из видов связей.

Таким образом, если два тела соединены при помощи ненагруженного поводка (см. рис.7, левое изображение), то при освобождении от связей реакции вводятся так, как это изображено в правом нижнем углу рисунка.

Подчеркнём, что если ненагруженный поводок трактуется как вид связей, то не следует отдельно учитывать соединения на концах поводка. В ситуации, представленной на рис.7, было бы грубой ошибкой, например, нарисовать в точке A ещё и реакции шарнира.

Направления стрелок на рис.7 выбраны с учётом другой аксиомы механики – *3-го закона Ньютона*, по которому силы взаимодействия равны по модулю, противоположны по направлению и направлены вдоль одной прямой. Вновь модули обеих сил обозначены одним и тем же символом R_A.

Заметим, что каждый из символов, обозначающих величину реакции связей, является одной из неизвестных величин в системе уравнений равновесия. Если бы мы хотели использовать для показанных на рис.7 сил разные буквы, то неизвестных стало бы больше, и пришлось бы дополнить систему ещё одним уравнением: $R_A = R_B$. Ясно, что это не слишком рационально.

Отметим ещё, что здесь проявляется преимущество принятого выше соглашения о том, что символы на рисунках обозначают лишь величину векторов (но не сами векторы), а направления векторов показывают стрелками. Иначе без дополнительных обозначений обойтись бы не удалось и, кроме того, в формулах пришлось бы учитывать и знак. Так, для сил на рис.7 надо было бы писать:

$$\overline{\mathbf{R}}_B = -\overline{\mathbf{R}}_A .$$

Необходимость пользоваться 3-м законом Ньютона в статике возникает всегда, когда речь идёт о реакциях внутренних связей.

Связь тела, входящего в механическую систему, с неподвижным телом называется *внешней связью*; связь между двумя телами системы – *внутренней* связью.

С учётом этой терминологии можно сформулировать общее правило: если на рисунке, изображающем тело после освобождения от связей, нарисованы какие-либо силы (или моменты), возникшие при отбрасывании внутренней связи, то на рисунке для второго тела следует нарисовать точно такие же силы (или моменты), но с противоположным направлением всех стрелок.

2.7. Методика решения задач статики

Изложим последовательность действий, которых рекомендуется придерживаться при решении задач статики.

1°. Освободить систему от внешних связей, заменив их действие реакциями внешних связей.

2°. Расчленить систему на отдельные тела, вводя реакции внутренних связей с учётом 3-го закона Ньютона.

3°. Составить уравнения равновесия для каждого тела и найти неизвестные силы.

Замечания. 1°. На первом этапе распределённые нагрузки следует заменить сосредоточенными силами. 2°. Ненагруженные поводки не следует считать самостоятельными телами.

Смысл последних двух замечаний был разъяснён в предыдущих параграфах. Ненагруженные поводки заслуживают особого внимания потому, что это – единственный вид связей, для которого промежуточный элемент, соединяющий тела, можно принять за самостоятельное тело (если поступить так, то это будет не ошибкой, а просто нерациональным поступком, так как решение станет более громоздким). Поэтому, обдумывая условие каждой задачи, следует задать себе вопрос: а нет ли в задаче ненагруженных поводков?

Обсудим ещё, почему освобождение от связей рекомендуется делать в два этапа: сначала отбрасывать лишь внешние связи, а уже потом – внутренние. Дело в том, что существует такой приём решения задач статики: после выполнения этапа 1 составить уравнения равновесия для всей *системы в целом* (рассматривая её как единый "монолит"), а потом – на этапе 3 – для одного из тел вообще не составлять уравнений равновесия.

Когда следует предпочесть именно этот приём? Тогда, когда полученная таким образом система уравнений окажется более простой. Универсального рецепта здесь не существует, но обычно работает следующее эмпирическое правило: если количество неизвестных, которые попадут в уравнения, записанные для системы в целом[1], будет равно 3 или 4, то следует начать с составления уравнений для системы в целом; если же в эти уравнения войдёт большее число неизвестных (или если уравнение моментов для системы в целом оказывается чересчур громоздким), то лучше работать только с уравнениями для отдельных тел.

В некоторых случаях эти рассуждения можно обобщить и заменять уравнения для некоторых тел уравнениями, составляемыми для специально выделенных групп тел (вновь рассматривая каждую такую группу как единый "монолит").

Процесс составления уравнений равновесия в двух следующих главах будет подробно разобран для конкретных примеров. Сделаем лишь два замечания. *Первое* из них относится к составлению уравнений проекций на оси x и y.

Если сила не параллельна одной из координатных осей, то её проекции войдут в оба уравнения. Предположим, что по условию задачи известен угол, образуемый данной силой с горизонталью или вертикалью (если такой угол непосредственно не дан, то следует выразить его через исходные данные задачи). Тогда проекциями на координатные оси будут служить произведения модуля силы на синус и на косинус этого угла, взятые с соответствующими знаками.

Для того, чтобы понять, в каком уравнении будет фигурировать синус, а в каком – косинус, может быть полезно следующее рассуждение. Известно, что при $\alpha \to 0$ $\sin\alpha$ стремится к нулю, а $\cos\alpha$ – к единице. Поэтому достаточно мысленно устремить угол, задающий направление силы, к нулю (каким бы он ни был на самом деле); если при малых значениях угла проекция силы на ось окажется маленькой, то в произведении надо взять синус, а в противном случае – косинус.

Знак же проекции (плюс или минус) определяется тем, какой угол (острый или тупой) образует сила с положительным направлении координатной оси.

Второе замечание относится к выбору полюса при составлении уравнения моментов.

Хотя в уравнениях равновесия, записанных в форме (5), за полюс можно принять любую точку (они останутся справедливыми при любом выборе полюса), при решении конкретной задачи разумный выбор полюса имеет большое значение. Удачный выбор полюса позволяет получить более простое уравнение моментов, что может существенно упростить процесс решения задачи.

Но что означают слова "более простое уравнение"? Прежде всего, будем считать, что уравнение тем проще, чем меньше в него входит неизвестных. Но тогда один из критериев выбора полюса становится очевидным: поскольку момент силы обращается в нуль тогда и только тогда, когда полюс лежит на линии действия этой силы, то следует выбирать полюс так, чтобы через него проходило как можно больше линий действия *неизвестных* сил.

В главе 3 мы обсудим это более подробно.

---

[1] Этими неизвестными будут величины реакций внешних связей (а также неизвестных внешних активных сил, если такие силы фигурируют в задаче).

3. Пример использования системы СТЕВИН при выполнении индивидуального домашнего задания

3.1. Постановка задачи, входящей в состав задания

Из предложенного набора тел (группы тел **A** и **B**, рис. 8 – 15) следует составить единую конструкцию, совместив обе группы тел в общей для них точке B и получив механическую систему, включающую балки, пластины и стержни различной конфигурации (весом которых следует пренебречь). Необходимые числовые данные, относящиеся к рассматриваемому здесь примеру, приведены в табл.2.

Таблица 2

Индивидуальные домашние задания
по статике плоской системы сил
для . . . . факультета

группа . . . .

Условие задачи:

Для механической системы, представляющей собой составную конструкцию из групп тел “A” и “B”, определить реакции связей в точках A, D, O и E (если реакция имеет две составляющие, найти также модуль равнодействующей).

Сделать вывод о физической реализуемости [нереализуемости] равновесия системы при заданной силовой нагрузке, проведя анализ знаков реакций односторонних связей.

Поверхности тел - абсолютно гладкие. Трение в шарнирах и катковых опорах отсутствует.

В таблице численные значения линейных размеров заданы в метрах; углы - в градусах; силы - в кН; момент пары сил - в кН·м; распределённая нагрузка - в кН/м.

Исходные данные								Ответы	
Вар.	A	B	alfa	L	F	M	Q	RA	RD
1	23	10	37	0.78	8	0.59	15	19.741	14.906
2	17	12	48	0.19	1	0.83	6	1.731	3.732
3	16	2	31	0.57	2	0.84	4	3.621	1.370
4	6	13	21	0.68	4	0.14	17	28.652	-9.079
5	24	14	21	0.53	9	0.35	19	6.777	-11.352
6	17	12	14	0.82	4	0.40	19	33.717	20.191
7	3	8	33	0.62	10	0.44	3	16.514	-7.318
8	16	4	43	0.02	8	0.92	13	26.256	25.596
9	13	18	58	0.60	8	0.01	2	16.200	-10.891

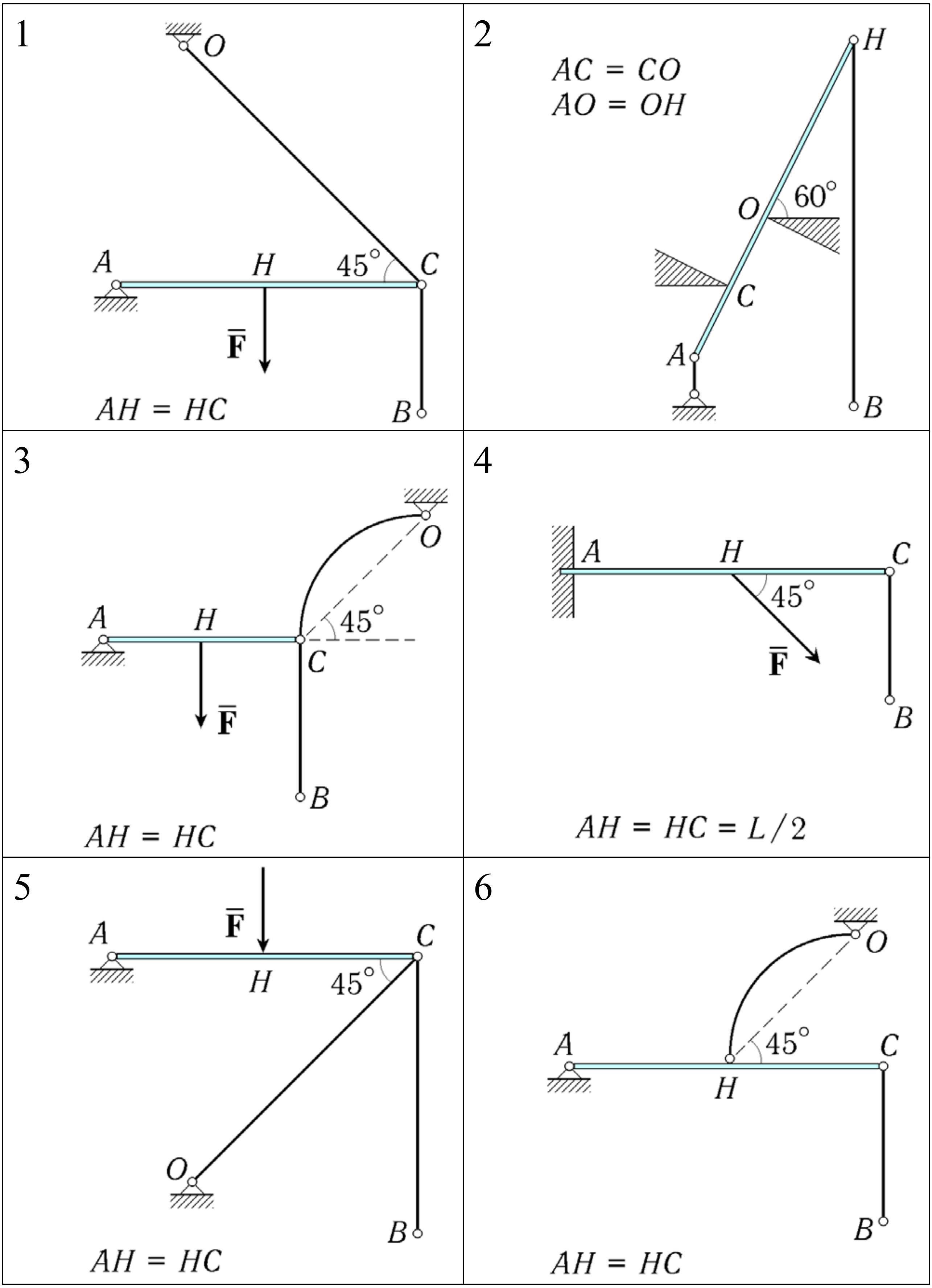


Рис. 8. Группа тел **А** для ИДЗ (структурные схемы 1– 6)

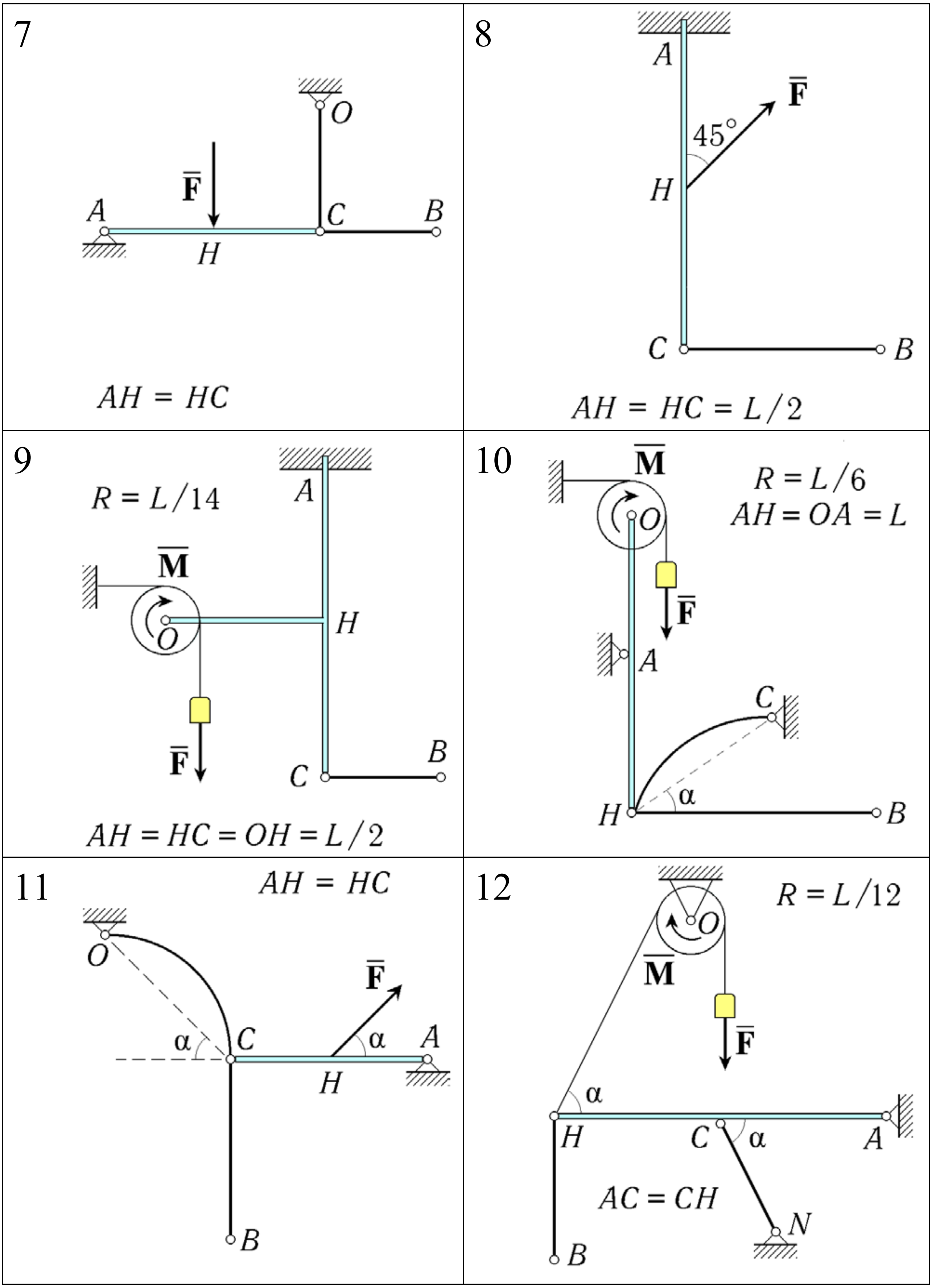


Рис. 9. Группа тел **A** для ИДЗ (структурные схемы 7 – 12)

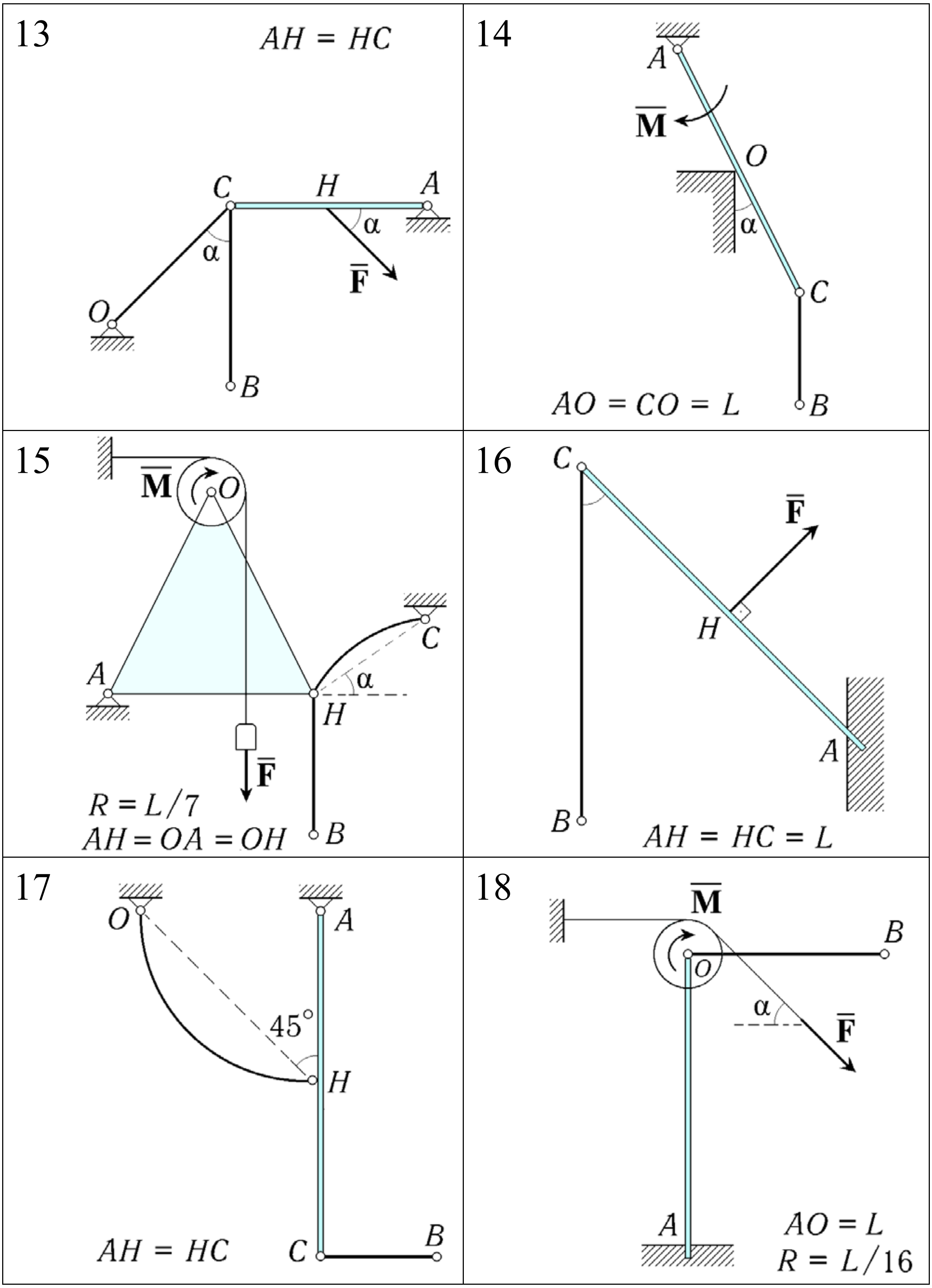


Рис. 10. Группа тел **А** для ИДЗ (структурные схемы 13 – 18)

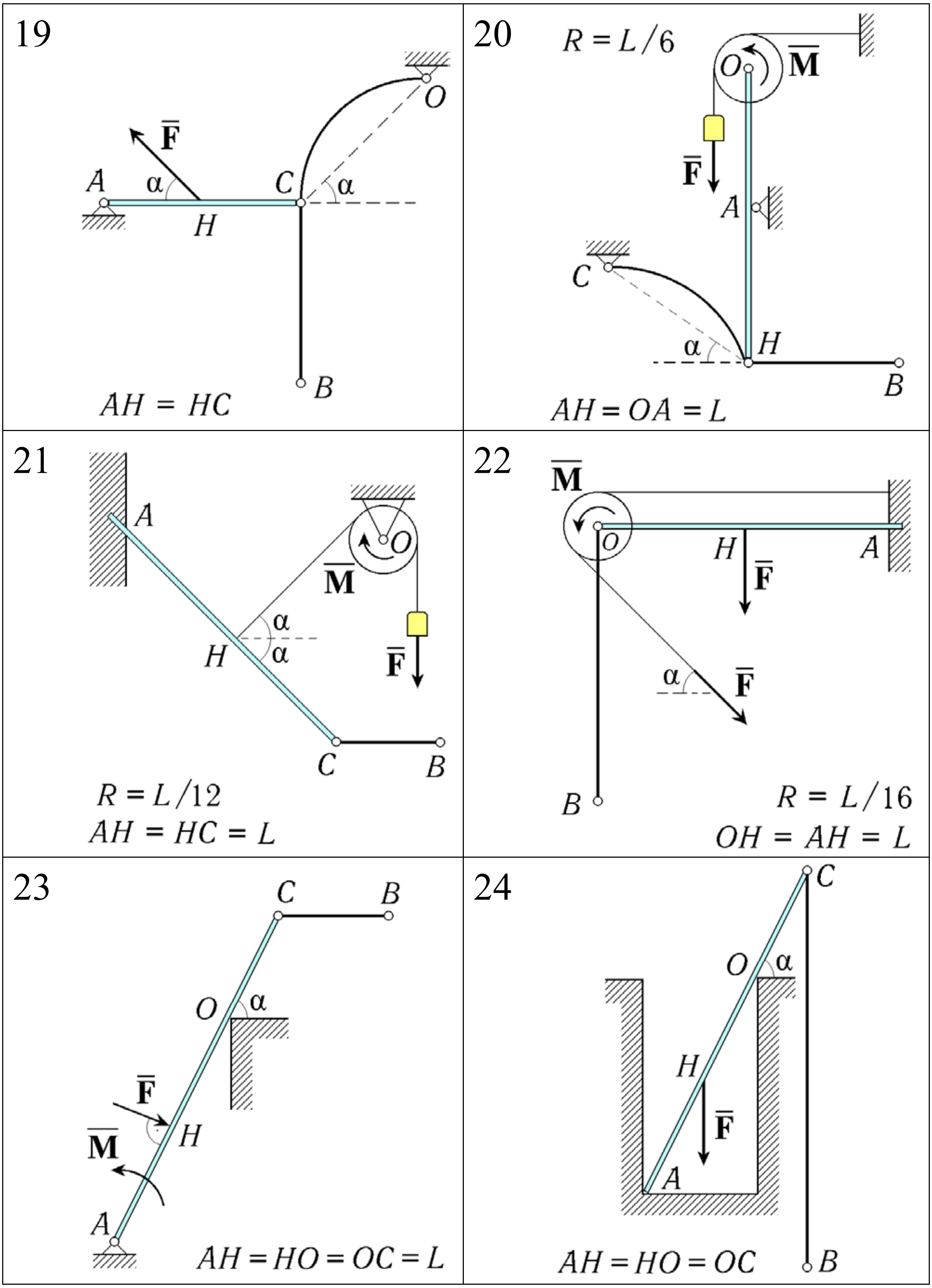


Рис. 11. Группа тел **A** для ИДЗ (структурные схемы 19 – 24)

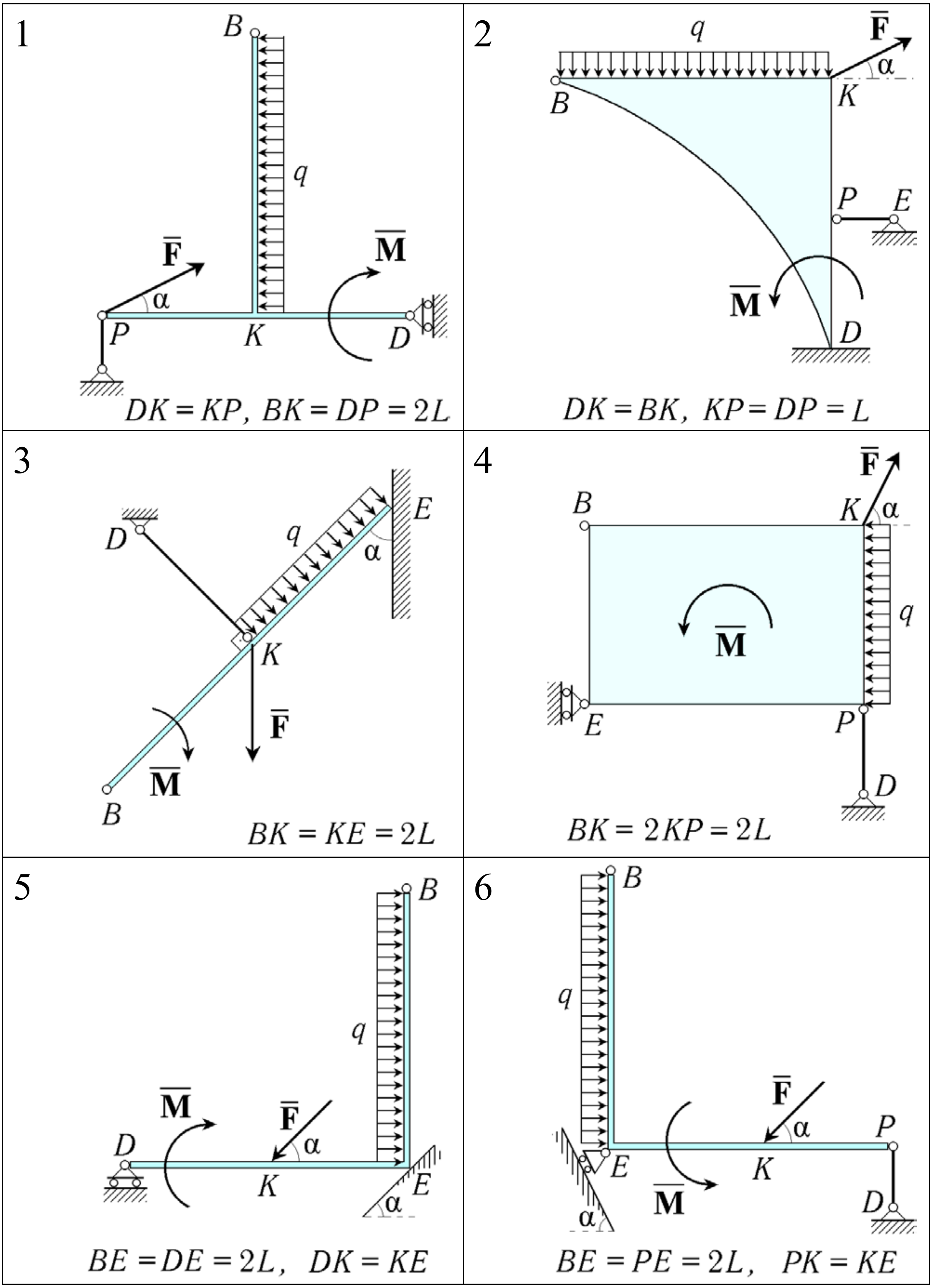


Рис. 12. Группа тел **В** для ИДЗ (структурные схемы 1 – 6)

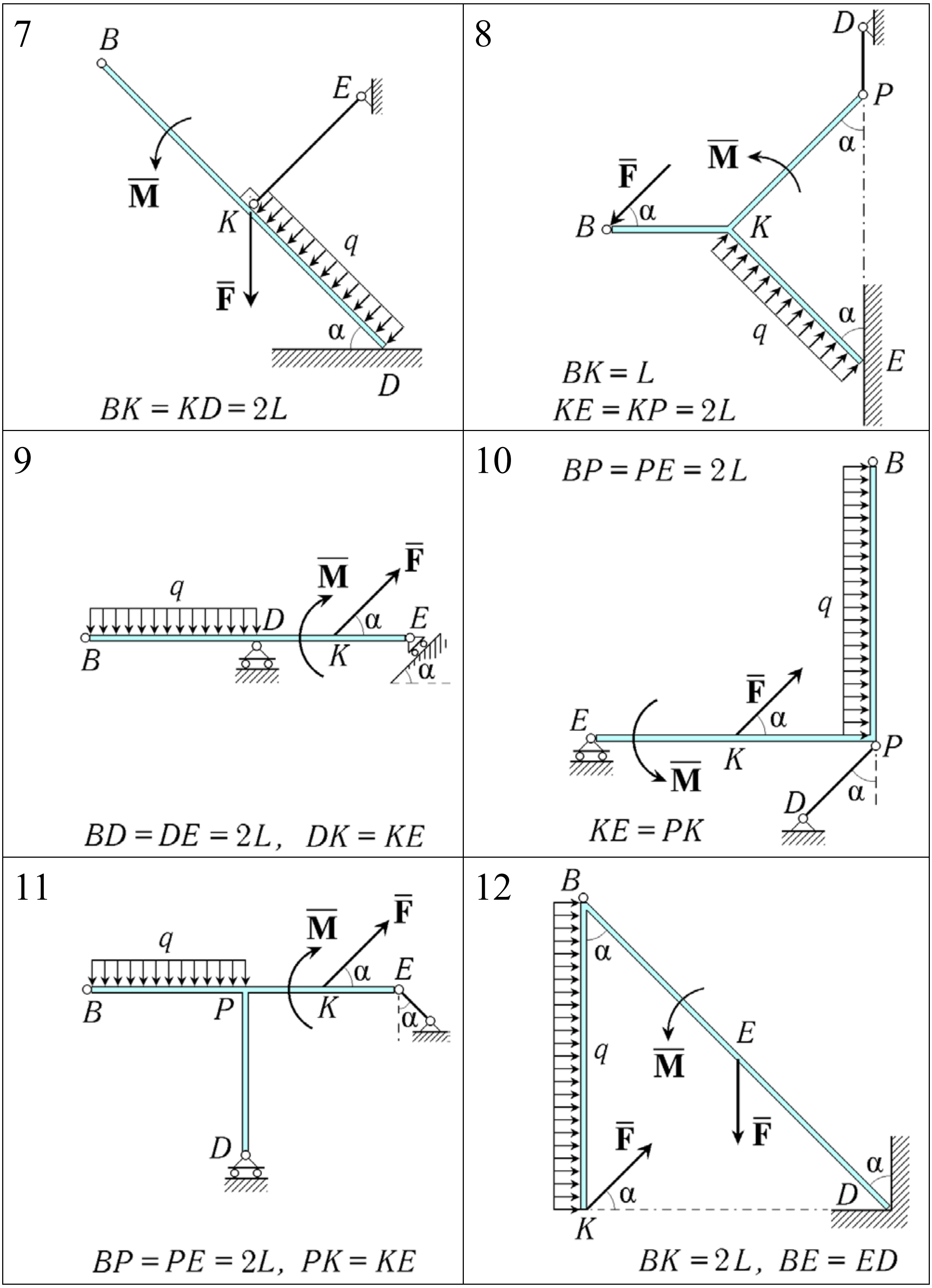


Рис. 13. Группа тел **В** для ИДЗ (структурные схемы 7 – 12)

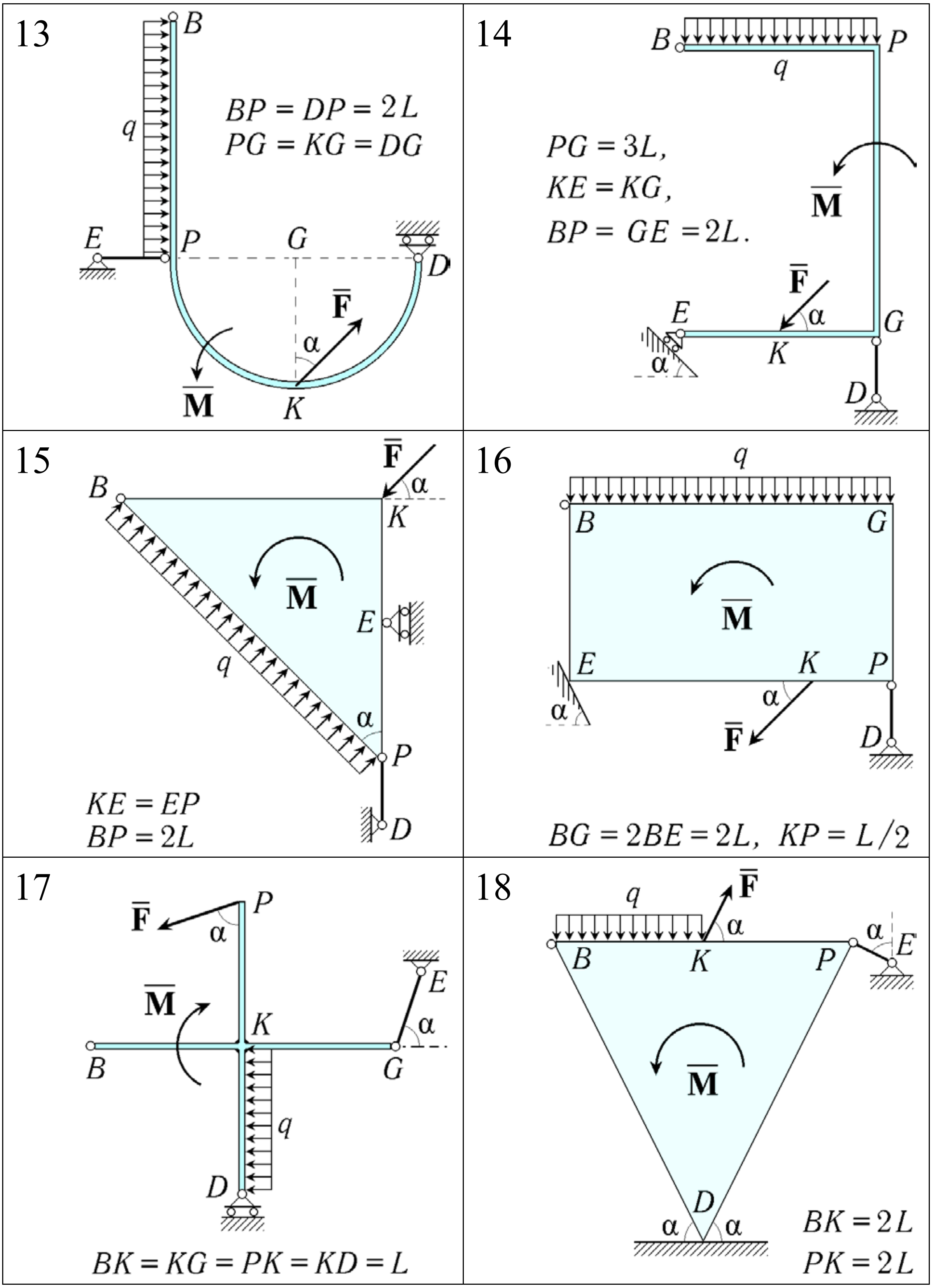
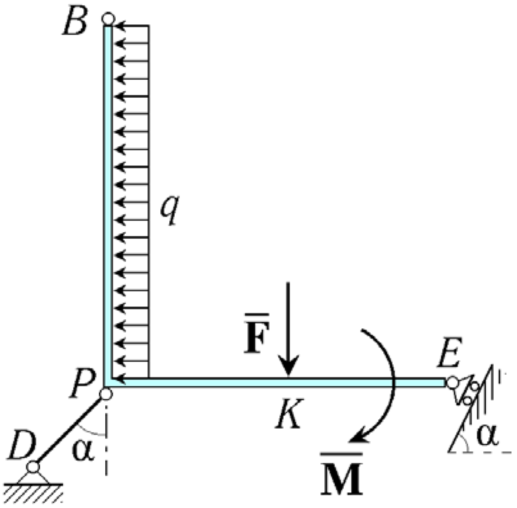


Рис. 14. Группа тел **В** для ИДЗ (структурные схемы 13 – 18)

19

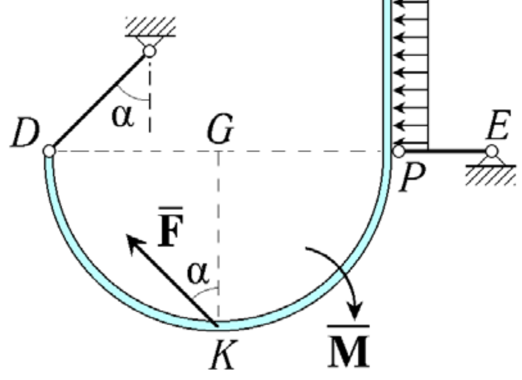


$BP = PE = 2L, \quad KE = PK.$

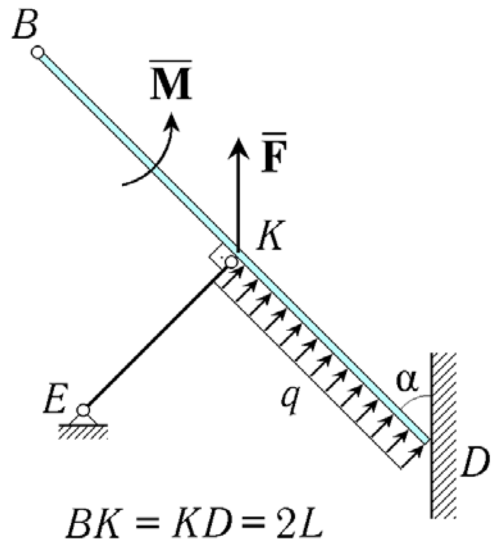
20

$BP = DP = 2L$

$PG = KG = DG$

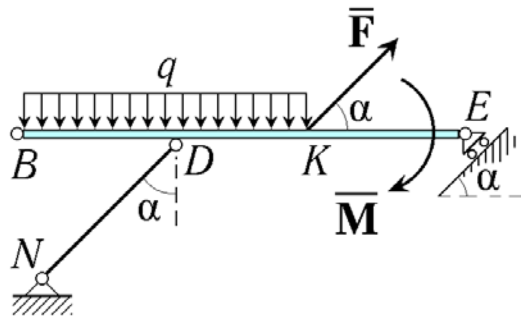


21



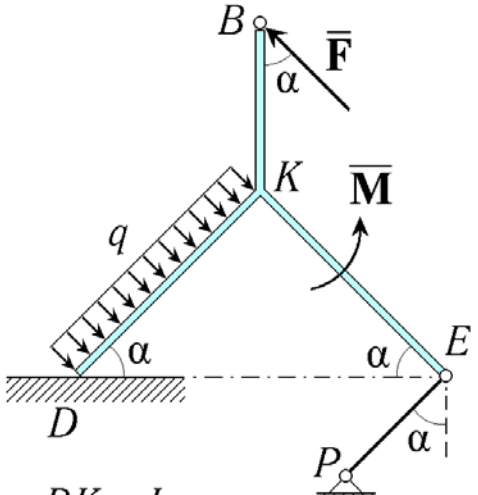
$BK = KD = 2L$

22



$BD = DK = KE = L$

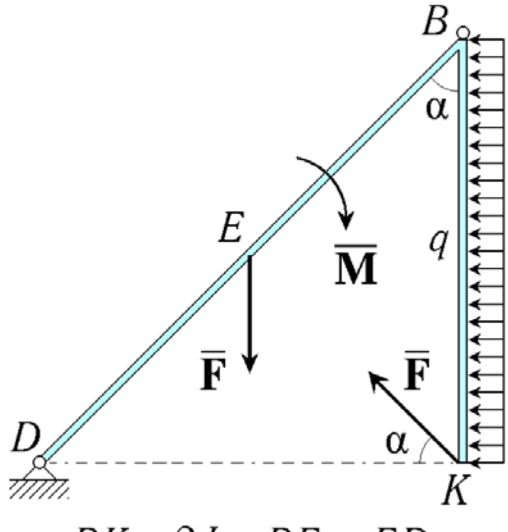
23



$BK = L$

$KE = KD = 2L$

24



$BK = 2L, \; BE = ED$

Рис. 15. Группа тел **B** для ИДЗ (структурные схемы 19 – 24)

Требуется: 1) Найти условия равновесия системы под действием нагрузки, изображённой на рисунке. 2) Определить значения реакций внешних связей. 3) Проверить полученные ответы при помощи системы СТЕВИН.

3.2. Общие замечания по поводу выполнения задания

Перед составлением уравнений равновесия надо нарисовать группы тел, освобождённые от связей, изобразив при этом стрелками как заданные силы, так и реакции связей [1]. Выбор направлений стрелок определяет знаки ответов (так что ответ без рисунков неполон).

Распределённые нагрузки при этом следует заменить эквивалентными сосредоточенными силами по изложенным в главе 2 правилам.

Для облегчения проверки ответов договоримся заранее о следующем выборе направления стрелок:

1) для неудерживающей связи – в ту же сторону, что и вектор реакции (в предположении, что связь действительно удерживает тело);

2) для реакции удерживающей связи, представленной двумя составляющими, – вдоль положительных направлений осей x и y;

3) для момента жёсткой заделки – против хода часовой стрелки;

4) для реакций, создаваемых ненагруженными стержнями, – в ту же сторону, что и векторы этих реакций (в предположении, что стержни растягиваются).

Решив уравнения равновесия, необходимо проверить знаки реакций неудерживающих связей: может оказаться, что для заданных значений нагрузки неудерживающая связь не в состоянии удержать тело (в этом случае оно должно сойти со связи[1], и равновесие не будет иметь места). Если это произошло, то требуется так изменить один из параметров, характеризующих нагрузку, чтобы связь удерживала тело, и вновь решить систему уравнений равновесия (в этом случае в отчёт о выполнении задания следует включить выкладки и ответы для обоих вариантов).

3.3. Пример выполнения задания

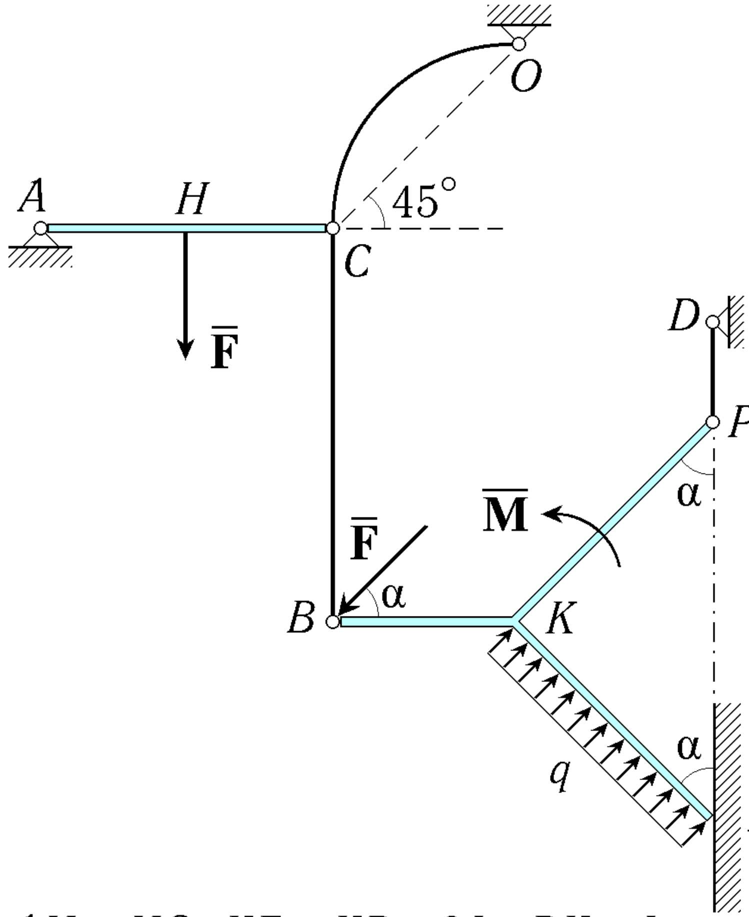
Дано: $\mathbf{A} = 3$, $\mathbf{B} = 8$; $\alpha = 33^\circ$; $L = 0{,}62$ м; $F = 10$ кН; $M = 0{,}44$ кН·м; $q = 3{,}0$ кН/м.

Определить реакции в точках A, D, E и O, проверив при этом выполнение условий равновесия.

Найдя в предложенном наборе (рис. 8–15) группы тел с $\mathbf{A} = 3$, $\mathbf{B} = 8$, строим единую конструкцию (рис. 16).

---

[1] Заметим, что при наличии нескольких неудерживающих связей тело обязано покинуть одну из них, но не обязательно ту, для реакции которой получен недопустимый знак [14].



$$AH = HC,\ KE = KP = 2L,\ BK = L$$

Рис. 16. Механическая система (**A** = 3, **B** = 8)

Предположим, что система находится в равновесии. Освободим её от внешних связей и заменим их действие соответствующими реакциями связей (рис. 17). Свободное опирание на абсолютно гладкую вертикальную стенку в точке E заменим силой реакции, направленной перпендикулярно к этой поверхности. Заметим сразу же, что поскольку данная связь является неудерживающей, то должно выполняться условие:

$$R_E \geqslant 0 . \tag{12}$$

Стержни CO и DP – ненагруженные поводки, поэтому реакции в точках D и O должны быть направлены вдоль прямых, проходящих через концевые точки этих стержней. Направление реакций на рис.17 выбрано в предположении, что стержни растягиваются.

Общее число изображённых на рис.17 неизвестных величин (X_A, Y_A, R_O, R_E и R_D) равно 5. Поэтому, в соответствии с рекомендациями, изложенными в главе 2, систему придётся расчленить на отдельные тела или группы тел.

Расчленим рассматриваемую систему на группы тел **A** и **B** (рис.18); группа **B** здесь сводится к одному телу, а в группу **A** входит стержень AC вместе с ненагруженным поводком CO.

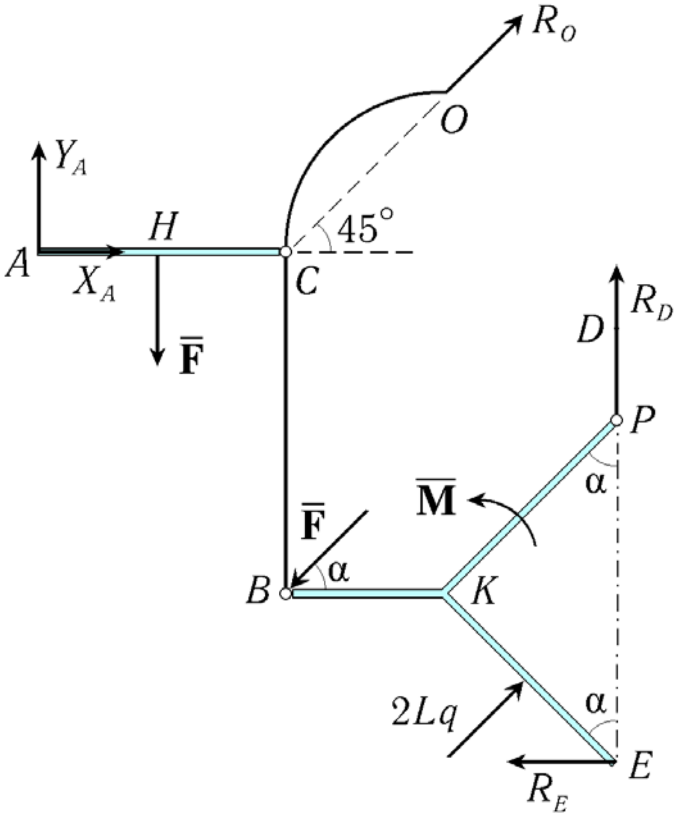


Рис. 17. Система, освобожденная от внешних связей

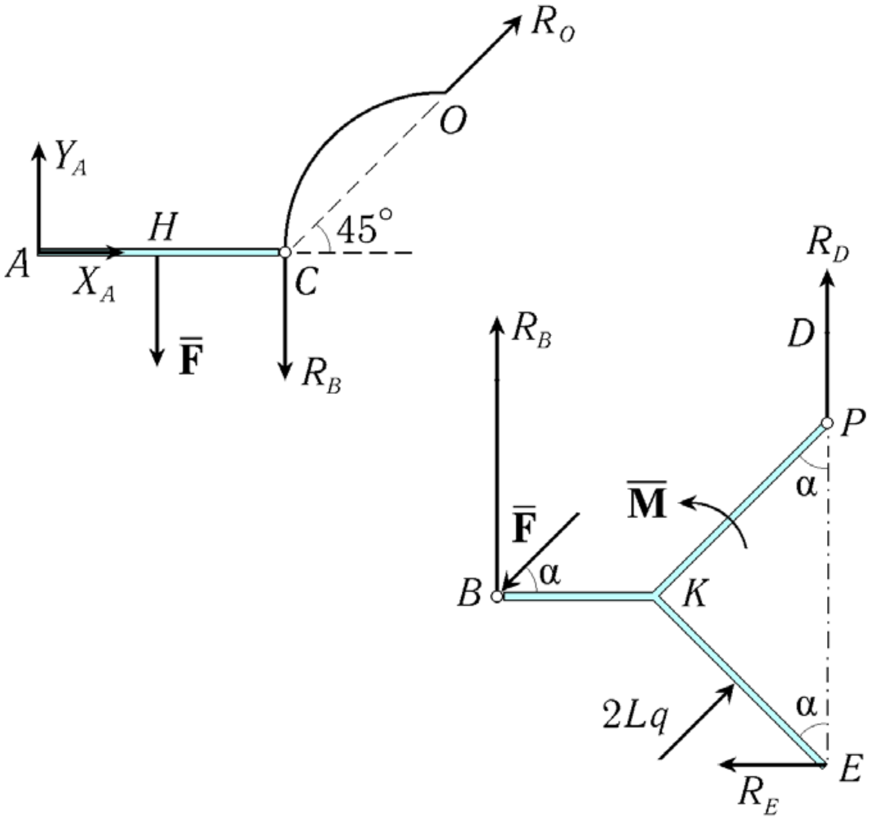


Рис. 18. Результат расчленения системы

После расчленения к уже введённым реакциям связей добавится реакция в точке B; направление этой реакции заранее известно (так как стержень BC – ненагруженный поводок, то реакция направлена вдоль прямой, соединяющей точки B и C), неизвестным является лишь её численное значение R_B. Поэтому общее число неизвестных становится равным 6. Но число независимых уравнений равновесия, которые можно составить для двух групп тел, также равно 6. Итак, задача является *статически определённой* [1,2].

Составим теперь уравнения равновесия для групп тел **A** и **B**.

При выборе полюсов будем действовать в соответствии с рекомендацией из параграфа 2.7 – выбирать полюс так, чтобы через него проходило как можно больше линий действия неизвестных сил[1].

Может случиться так, что сформулированному критерию удовлетворяют одновременно несколько точек (так что в уравнениях моментов, записанных относительно данных полюсов, окажется одинаковое – минимальное – число неизвестных). В этом случае естественно стремиться избавиться в первую очередь от тех сил, моменты которых – при ином выборе полюса – представлялись бы более громоздкими выражениями[2].

В рассматриваемом примере для группы тел **A** удобнее всего выбрать полюс в точке C, где пересекаются линии действия трёх неизвестных сил: R_O, R_B и X_A.

Аналогично, для группы тел **B** выбираем за полюс точку E, поскольку в ней пересекаются линии действия двух неизвестных сил: R_D и R_E.

В результате получаем следующие уравнения равновесия:

(**A**)
$$x: \quad X_A + R_O \cos 45^\circ = 0, \tag{13}$$

$$y: \quad Y_A - F + R_O \sin 45^\circ - R_B = 0, \tag{14}$$

$$M_C: \quad FL - Y_A 2L = 0; \tag{15}$$

(**B**)
$$x: \quad -F\cos\alpha - R_E + q\,2L\cos\alpha = 0, \tag{16}$$

$$y: \quad R_B - F\sin\alpha + R_D + q\,2L\sin\alpha = 0, \tag{17}$$

$$M_E: \quad M - q\,2L\cdot L - R_B(L + 2L\sin\alpha) + {}$$
$$+ F\cos\alpha\,(2L\cos\alpha) + F\sin\alpha\,(L + 2L\sin\alpha) = 0.$$

Последнее уравнение нетрудно упростить. Применяя тождественные преобразования, получаем:

$$M_E: \quad M - q\,2L^2 - R_B L(1 + 2\sin\alpha) + FL(2 + \sin\alpha) = 0. \tag{18}$$

---

[1] Это правило, выражаясь образно, можно сформулировать иначе. Условимся говорить, что сила “убита”, если полюс выбран так, что её момент относительно этого полюса равен нулю. Тогда правило будет звучать так: “Убей как можно больше неизвестных!”

[2] Если считать такие силы более “вредными”, то второе правило выбора полюса можно сформулировать так: “Из всех неизвестных в первую очередь убей самых вредных!”

Подставим в систему (13) – (18) численные значения. Теперь для нахождения искомых реакций связей осталось решить систему линейных алгебраических уравнений 6-го порядка.

Учитывая конкретный вид уравнений (13) – (18), её легко решить, не прибегая к помощи компьютера. Именно, определив из (18) R_B, можно найти R_D из (17) и R_E из (16). После этого из (15) находим Y_A, из (13) – R_O и из (12) – X_A.

Модуль вектора $\overline{\mathbf{R}}_A$ находим по теореме Пифагора: как корень квадратный из суммы квадратов компонент этого вектора. В итоге имеем: $R_A = 16{,}514$ кН; $R_D = -7{,}318$ кН; $R_O = -22{,}258$ кН; $R_E = -5{,}267$ кН.

Заметим, что в полученных результатах некоторые реакции имеют отрицательные значения. Каков смысл этого? Знак “минус” в значениях R_D и R_O означает, что стержни CO и DP в действительности не растягиваются, а сжимаются, и никакого противоречия с постановкой задачи нет. Однако отрицательный знак R_E противоречит неравенству (12). Поэтому в данный момент времени равновесие системы невозможно: система обязана покинуть неудерживающую связь.

Поэтому, в соответствии со сделанными выше замечаниями, необходимо изменить силовую нагрузку. Из уравнения (16) видно, что знак R_E определяется значениями F и q. Для положительности R_E можно, не изменяя F, увеличить q – так, чтобы $2qL > F$. С этой целью достаточно взять $q = 3{,}0$ кН/м.

Для изменённых исходных данных получаем следующие ответы: $R_A = 13{,}164$ кН; $R_D = -7{,}889$ кН; $R_O = -17{,}222$ кН; $R_E = -0{,}973$ кН.

Для проверки правильности вычислений воспользуемся системой СТЕВИН. Войдём в подсистему КОНТРОЛЁР и выберем в её меню первый пункт. Тогда подсистема перейдёт в режим ввода исходных данных. Наберём сначала данные, приведённые в условии задачи, а затем нажмём клавишу **F10**; КОНТРОЛЁР выдаст свою версию ответов.

Чтобы проверить ответы, полученные при изменённом значении q, достаточно вернуться к ранее набранным данным и исправить это значение. Сделаем это и вновь нажмём **F10**; КОНТРОЛЁР выдаст ответы для изменённых данных.

Анализируя последний набор значений R_A, R_D, R_O, R_E, заключаем, что при таком выборе нагрузки исследуемая конструкция будет находиться в равновесии.

4. Пример выполнения задания типового расчёта при помощи системы СТЕВИН

4.1. Постановка задачи типового расчёта

Из предложенного набора тел (группы тел **A** и **B**, рис. 20 – 25) следует составить единую конструкцию, совместив точки B и C одной группы тел с одноимёнными точками другой группы тел и получив тем самым механическую систему, включающую балки, пластины и стержни различной конфигурации (если веса тел системы не показаны на рисунках, то ими следует пренебречь). Необходимые числовые данные можно найти в таблице, выдаваемой на руки студентам группы преподавателем.

Требуется: 1) Составить уравнения равновесия системы и представить их в виде системы линейных алгебраических уравнений (*СЛАУ*), записанной в матричной форме. 2) Решить данную СЛАУ при помощи системы СТЕВИН, определив значения реакций связей. 3) Проверить физическую реализуемость равновесия, проанализировав знаки реакций неудерживающих связей.

В качестве примера рассмотрим задачу, аналогичную задачам типового расчёта, и посмотрим, как она может быть решена при помощи системы СТЕВИН.

4.2. Пример задачи типового расчёта

Дана механическая конструкция из жёстких невесомых балок (рис.19), которая находится под действием заданной нагрузки (заметим, что связь в точке A является неудерживающей).

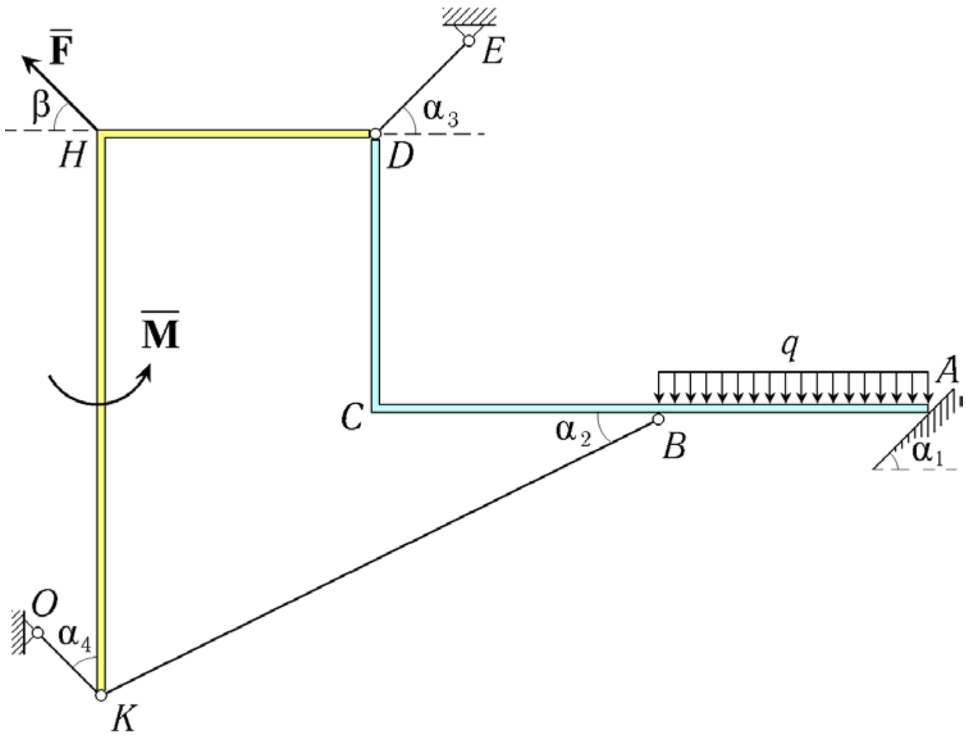


Рис. 19. Механическая конструкция из жёстких балок

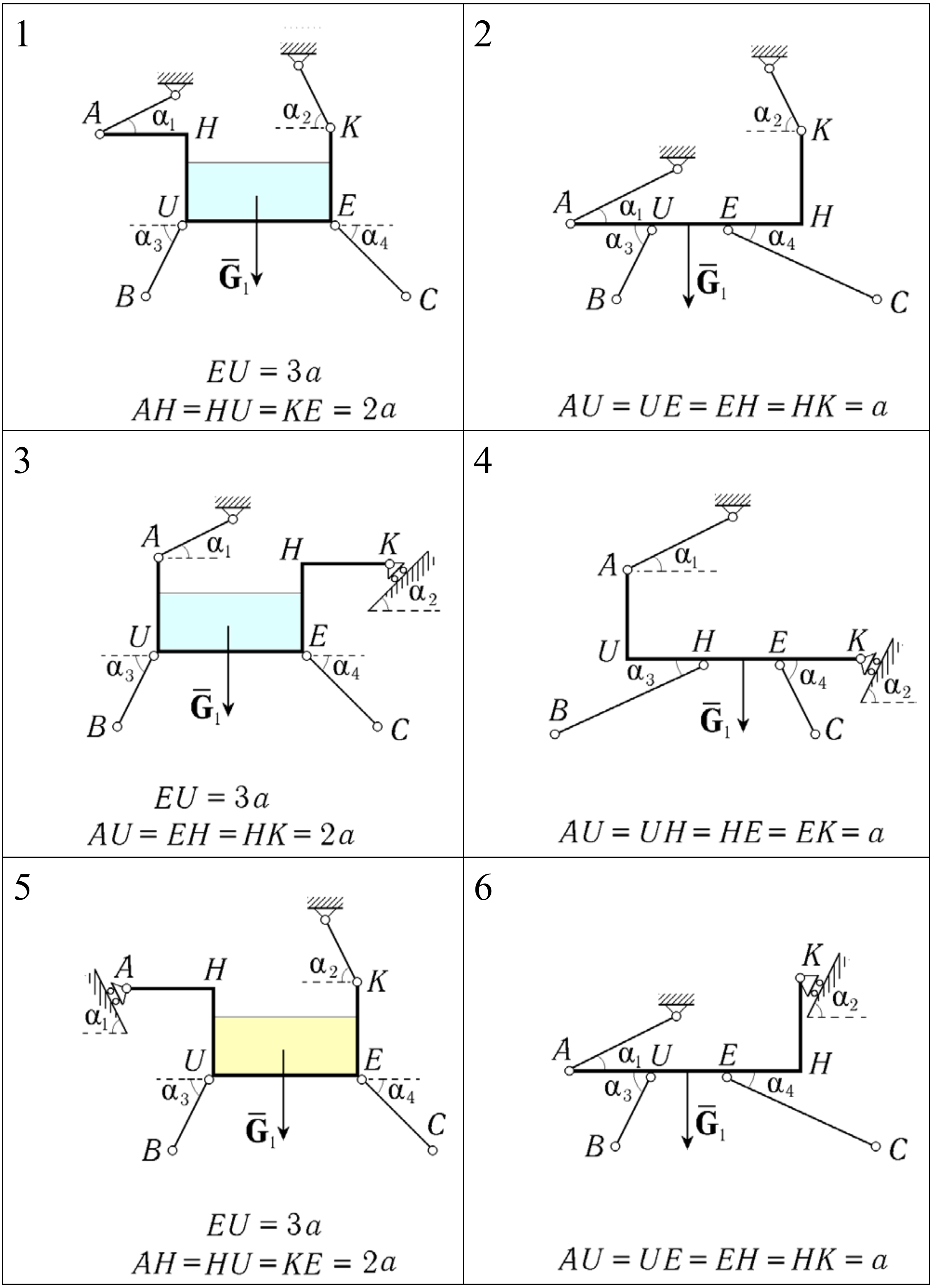
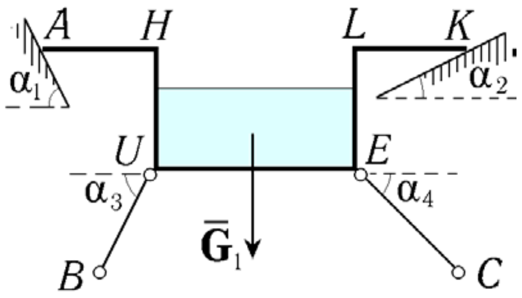


Рис. 20. Группа тел **A** для типового расчёта (структурные схемы 1– 6)

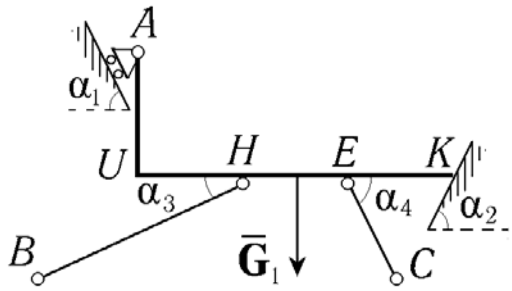
7



$EU = 3a$

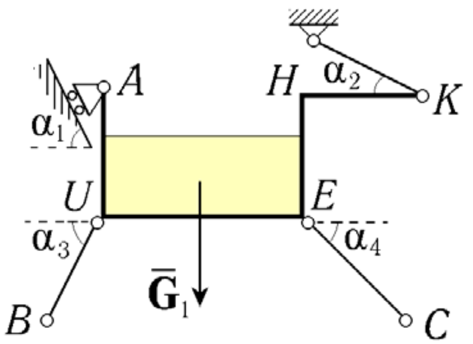
$AH = HU = LE = LK = 2a$

8



$AU = UH = HE = EK = a$

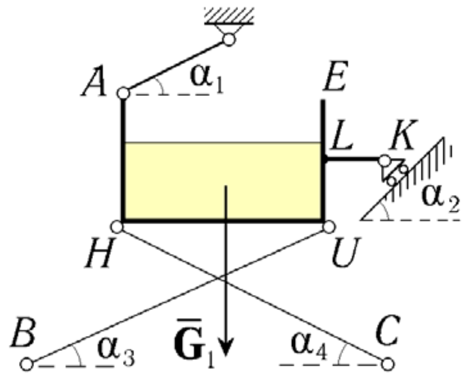
9



$EU = 3a$

$AU = EH = HK = 2a$

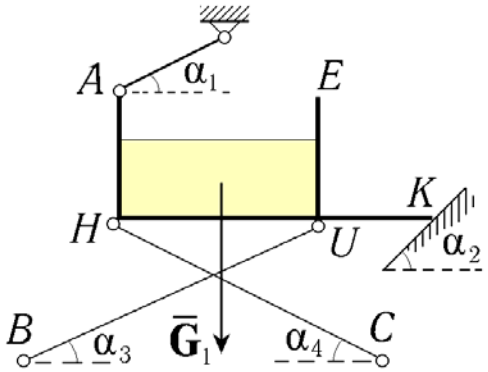
10



$LK = EL = LU$

$HU = 3a, \; AH = EU = 2a$

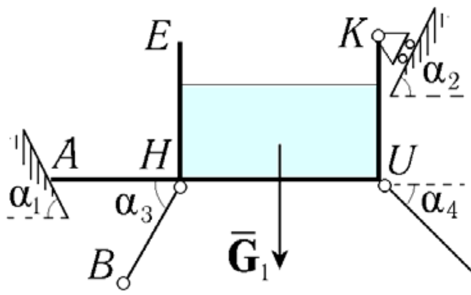
11



$HU = 3a$

$AH = EU = KU = 2a$

12

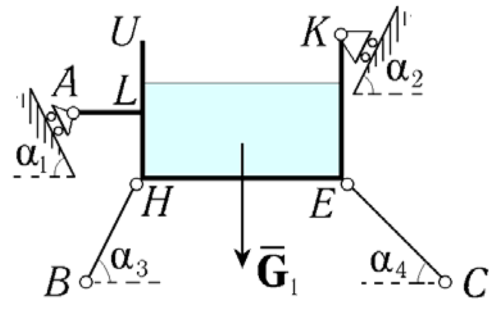


$HU = 3a$

$AH = HE = KU = 2a$

Рис. 21. Группа тел **A** для типового расчёта (структурные схемы 7 – 12)

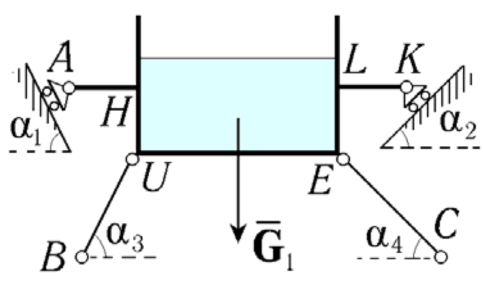
13



$HE = 3a$

$KE = HU = 2AL = 2a$

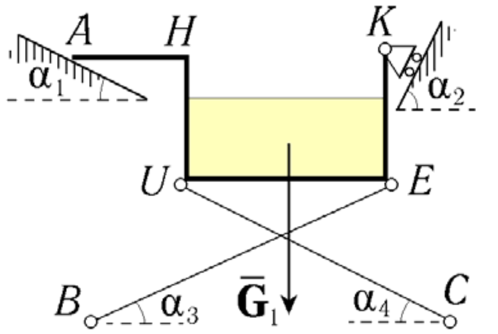
14



$UE = 3a$

$AH = LK = HU = LE = a$

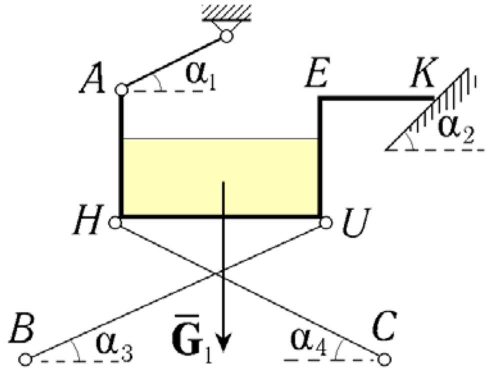
15



$EU = 3a$

$AH = HU = KE = 2a$

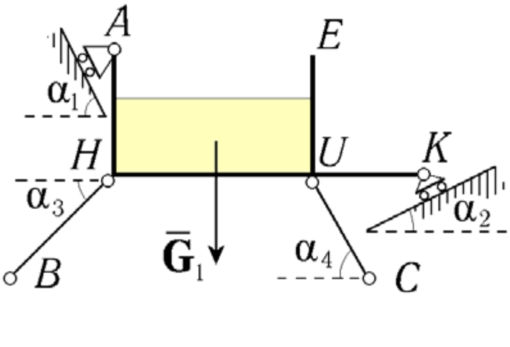
16



$HU = 3a$

$AH = EU = KE = 2a$

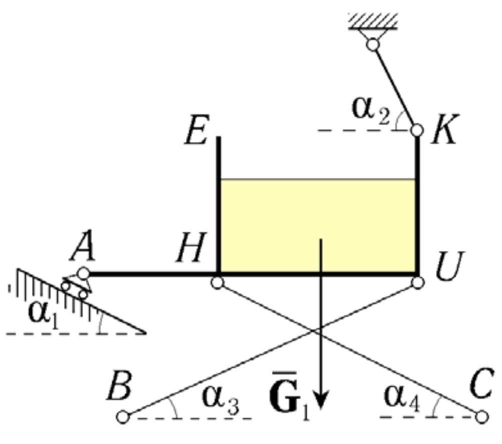
17



$HU = 3a$

$AH = EU = KU = 2a$

18



$HU = 3a$

$AH = HE = KU = 2a$

Рис. 22. Группа тел **A** для типового расчёта (структурные схемы 13 – 18)

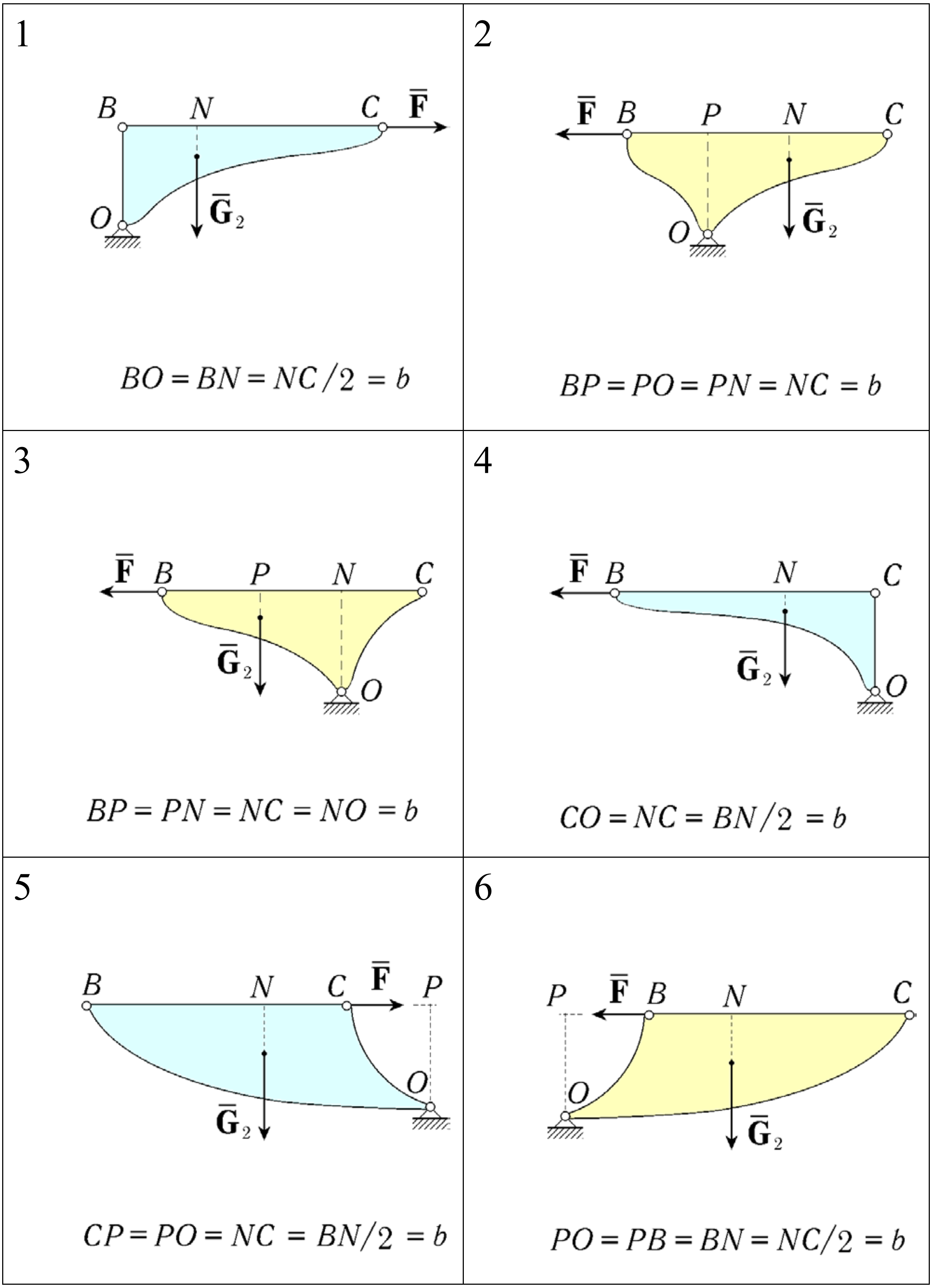


Рис. 23. Группа тел **B** для типового расчёта (структурные схемы 1 – 6)

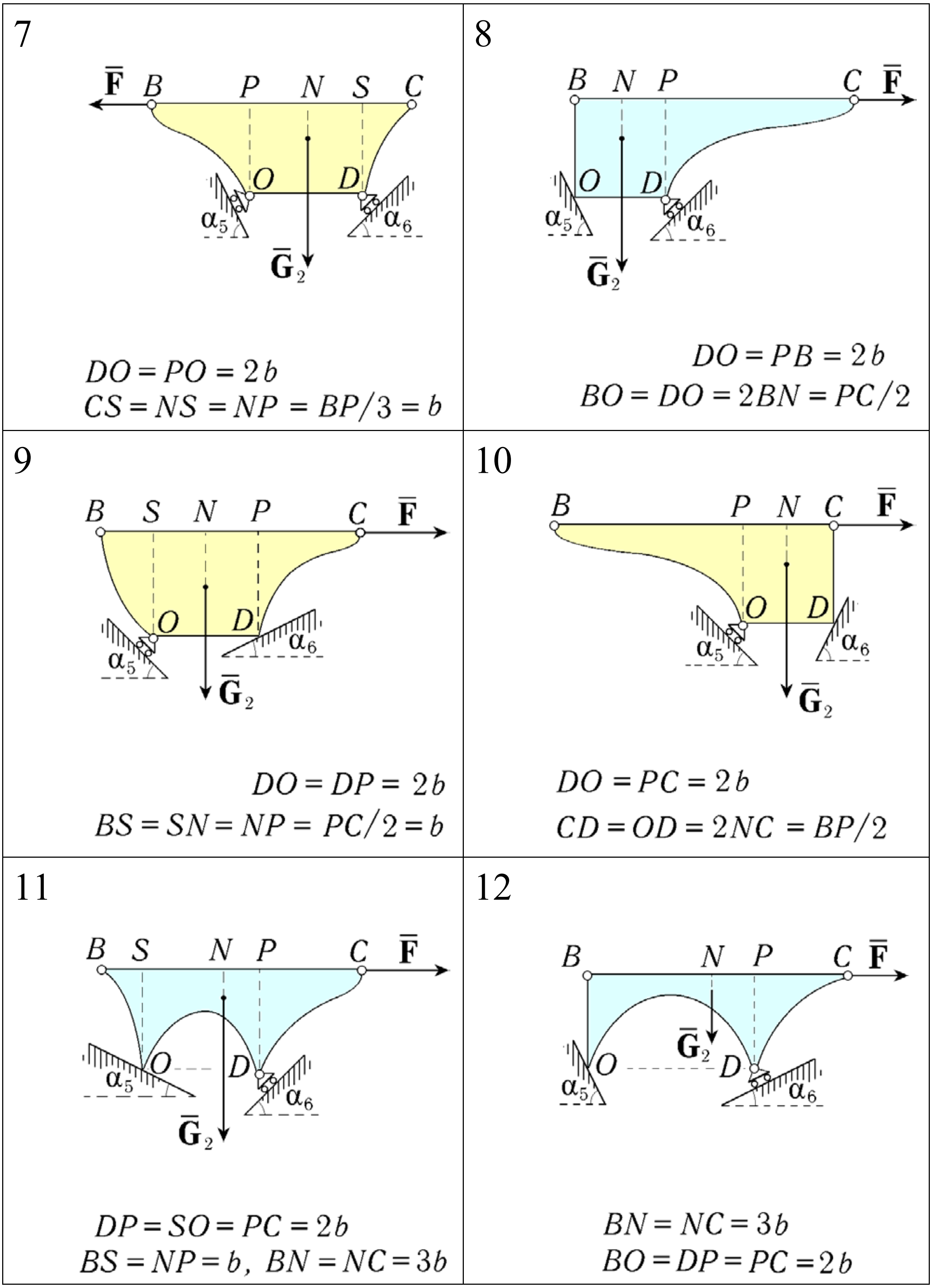
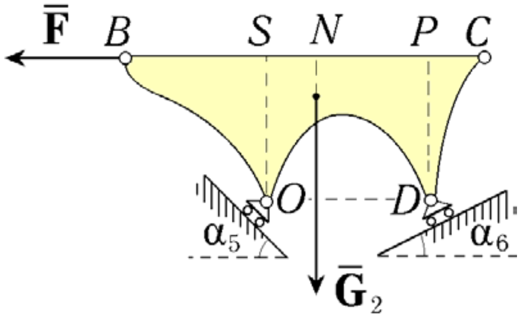


Рис. 24. Группа тел **В** для типового расчёта (структурные схемы 7 – 12)

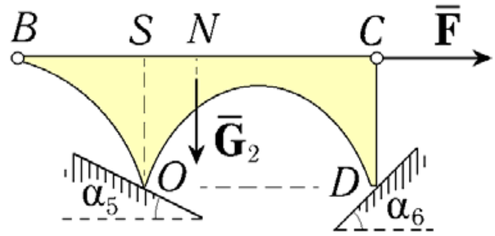
13



$DP = SO = BS = 2b$

$SN = PC = b,\ BN = NC = 3b$

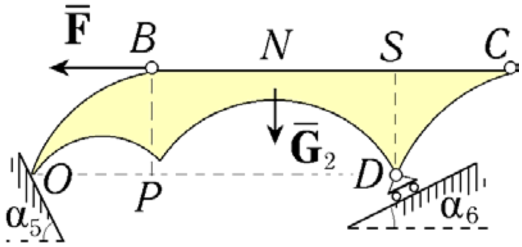
14



$BN = NC = 3b$

$BS = SO = CD = 2b$

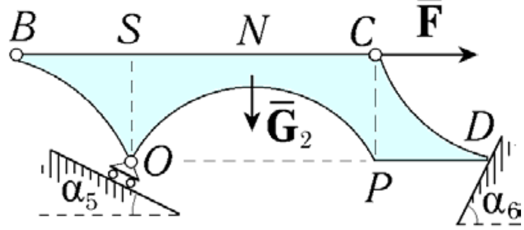
15



$OP = PB = SD = 2b$

$BN = NS = SC = 2b$

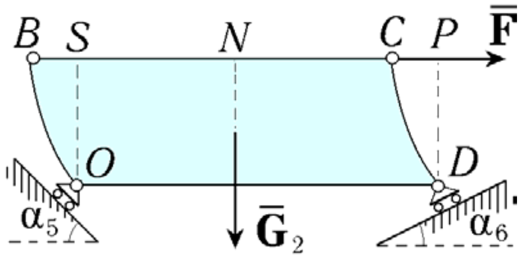
16



$BS = SN = NC = 2b$

$BS = SO = CP = PD = 2b$

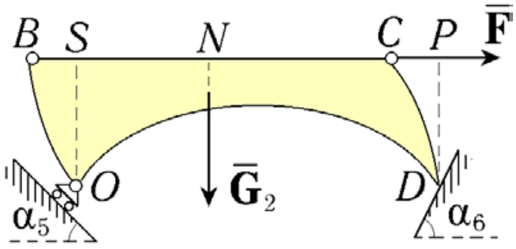
17



$DP = SO = 2b$

$SB = PC = b,\ SN = NC = 3b$

18



$DP = SO = SN = 2b$

$SB = PC = b,\ NC = 3b$

Рис. 25. Группа тел **B** для типового расчёта (структурные схемы 13 – 18)

Дано: $DH = CB = BA = b = 0{,}4$ м; $KH = 2b$; $F = 3$ кН; $M = 12$ кН·м; $q = 7$ кН/м; $\sin\alpha_1 = 0{,}345$; $\sin\alpha_2 = 0{,}678$; $\sin\alpha_3 = 0{,}973$; $\sin\alpha_4 = 0{,}835$; $\sin\beta = 0{,}673$.

Найти реакции в точках A, D, E и O и проверить физическую реализуемость равновесия. Предлагается также ответить на дополнительный вопрос: какому диапазону должны принадлежать значения силы F для того, чтобы равновесие системы было физически реализуемым (т.е. значение реакции связи в точке A оказывается положительным)?

4.3. Решение примера

Предположим, что механическая система (рис.19) находится в равновесии. Освободим её от связей, введя соответствующие реакции связей (рис.26).

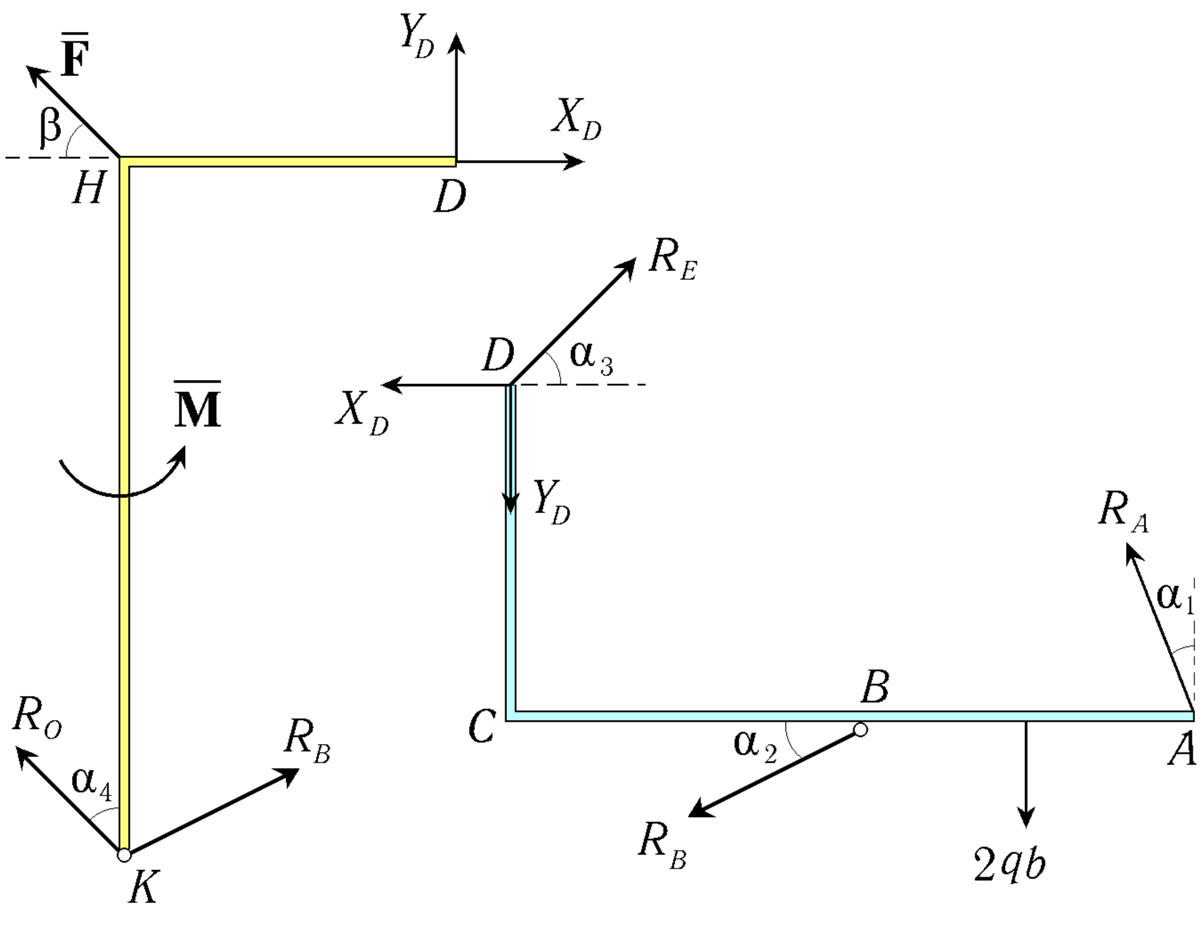


Рис. 26. Результат расчленения конструкции

Составим уравнения равновесия для отдельных тел системы:

$$x: \quad -X_D - R_B\cos\alpha_2 - R_A\sin\alpha_1 + R_E\cos\alpha_3 = 0, \tag{19}$$

$$y: \quad -Y_D - R_B\sin\alpha_2 + R_A\cos\alpha_1 + R_E\sin\alpha_3 - qb = 0, \tag{20}$$

$$M_C: \quad X_D b - R_B b \sin\alpha_2 + R_A 2b\cos\alpha_1 - {}$$
$$- R_E b\cos\alpha_3 - 3qb^2/2 = 0; \tag{21}$$
$$x: \quad X_D + R_B\cos\alpha_2 - R_O\sin\alpha_4 - F\cos\beta = 0, \tag{22}$$
$$y: \quad Y_D + F\sin\beta + R_O\cos\alpha_4 + R_B\sin\alpha_2 = 0, \tag{23}$$
$$M_K: \quad F\,2b\cos\beta + M + Y_D b - X_D 2b = 0. \tag{24}$$

Введём единые обозначения X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6 соответственно для реакций R_A, R_B, R_E, R_O, X_D, Y_D и, подставив численные значения, запишем систему (19) – (24) в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} -0{,}345 & -0{,}735 & 0{,}231 & 0 & -1 & 0 \\ 0{,}939 & -0{,}678 & 0{,}973 & 0 & 0 & -1 \\ 1{,}877 & -0{,}678 & -0{,}231 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0{,}735 & 0 & -0{,}835 & 1 & 0 \\ 0 & 0{,}678 & 0 & 0{,}550 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \\ X_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7{,}2 \\ 10{,}8 \\ 2{,}219 \\ -2{,}019 \\ -9{,}438 \end{pmatrix}.$$

Полученное матричное уравнение имеет вид:

$$AX = B, \tag{25}$$

где X – вектор-столбец неизвестных; A – матрица коэффициентов при них; B – столбец свободных членов.

Для решения уравнения (25) прибегнем к помощи системы СТЕВИН. Войдём в подсистему КОНТРОЛЁР и выберем в её меню второй пункт. Тогда подсистема выведет на экран сообщение, в котором предлагается ввести численные значения элементов матрицы A и столбца B и поясняется, как это сделать.

После нажатия **Enter** на экране возникнет таблица чисел, отвечающих элементам матрицы и столбца. Над этими числами приведены их обозначения (например, элемент в левом верхнем углу матрицы обозначается $\mathbf{a_{11}}$, элемент, стоящий справа от него – $\mathbf{a_{12}}$, и т.п.; соответственно элементы столбца B обозначены: $\mathbf{b_1}$, **...**, $\mathbf{b_6}$). Первоначальные значения элементов отвечают единичной матрице и нулевому столбцу. Совокупность данных обозначений образует меню; выбирая его поля (что можно делать в произвольном порядке) и набирая в возникающем при этом на экране поле ввода свои данные[1], можно сформировать матрицу A и столбец B.

После этого достаточно нажать клавишу **F10**, и КОНТРОЛЁР под заголовком **"Вычисленные значения неизвестных"** выведет (в рассматри-

---

[1] После нажатия клавиши **Enter** старое значение элемента замещается вновь набранным.

ваемом случае) на экран значения: $X_1 = 0{,}369$; $X_2 = -7{,}243$; $X_3 = 5{,}670$; $X_4 = -1{,}241$; $X_5 = 6{,}506$; $X_6 = 3{,}575$.

Теперь можно записать ответ на первый вопрос задачи: $R_A = 0{,}369$ кН; $R_B = -7{,}243$ кН; $R_E = 5{,}670$ кН; $R_O = -1{,}241$ кН; $X_D = 6{,}506$ кН; $Y_D = -22{,}258$ кН. Условие $R_A > 0$ выполнено, так что неудерживающая связь в точке A не нарушается.

Кратко обсудим теперь, как можно получить ответ на дополнительный вопрос, сформулированный в условии примера.

Заметим, что в силу линейности уравнений равновесия R_A оказывается линейной функцией от F (значения остальных параметров задачи предполагаем фиксированными). Линейная функция одного переменного вполне определена, если известны её значения для *двух* значений аргумента.

Поэтому возьмём в качестве значения F какое-либо новое значение (примем, например, что $F = 0$) и снова решим (с помощью подсистемы КОНТРОЛЁР) СЛАУ (14), но уже с новыми значениями свободных членов: $b_1 = 0$; $b_2 = 7{,}2$; $b_3 = 10{,}8$; $b_4 = 0$; $b_5 = 0$; $b_6 = -5$.

В результате получим: $X_1 = 2{,}302$; $X_2 = -5{,}147$; $X_3 = 4{,}943$; $X_4 = 0{,}416$; $X_5 = 4{,}130$; $X_6 = 3{,}262$ (значение первой неизвестной по-прежнему положительно, так что и для нового выбора нагрузки механическая конструкция находится в равновесии). Теперь осталось представить R_A в виде линейной функции аргумента F и решить относительно F линейное неравенство $R_A \geqslant 0$.

5. Основные характеристики обучающей системы СТЕВИН

5.1. Структура и состав системы СТЕВИН

По своей структуре обучающая система СТЕВИН (версия 3.1) представляет собой набор из нескольких файлов, в число которых входят загружаемые файлы **“stevin.exe”**, **“st_demo.exe”** и **“synstat.exe”**, а также файлы с данными, используемые в процессе работы программами **“stevin.exe”** и **“st_demo.exe”** (последняя предназначена для *демонстрационного прогона*).

Для запуска программы **“stevin.exe”** достаточно набрать её имя в командной строке MS DOS (удобнее же использовать одну из программ-оболочек – например, Norton Commander [15]). Перед запуском можно изменить стандартные параметры настройки системы СТЕВИН, сделав исправления в файле данных **“stevin.cfg”** (обычно это делает преподаватель в дисплейном классе).

Как отмечалось в главе 1, в состав программы **“stevin.exe”** входят четыре подсистемы: КОНСУЛЬТАНТ, РЕПЕТИТОР, КОНТРОЛЁР и КАЛЬКУЛЯТОР.

Каждая из подсистем представляет собой набор функций, написанных на Turbo C. Для обеспечения доступа к подсистемам и их частям разработана иерархическая система меню. С этой целью используются также функциональные клавиши **F1** (она, в соответствии с её стандартным назначением – “Help” (*подсказка*), служит для вызова подсистемы КОНСУЛЬТАНТ в режиме поддержки) и **F2** (для вызова подсистемы КАЛЬКУЛЯТОР).

Такая схема доступа к компонентам обучающей системы предоставляет пользователю удобный способ *управления программой*. Пользуясь иерархическим меню, обучаемый может “бродить” по комплексу по своему усмотрению, выбирая тот или иной его раздел. Однако при работе с подсистемами РЕПЕТИТОР и КОНТРОЛЁР возможности произвольного продвижения по этим подсистемам ограничены: алгоритм обучения навязывает определённую последовательность работы, которая модифицируется в зависимости от результатов анализа ответов обучаемого. Заголовки в пунктах меню короткие, в силу чего отпадает необходимость *использования аббревиатур*.

По нажатию клавиши **F1** доступны следующие возможности (*“функции подсказки”*): справочные сведения о системе СТЕВИН и работе с ней (в частности, правила ввода аналитических выражений); краткий теоретический материал (основные определения и формулы статики) с методическими рекомендациями; основные виды связей с соответствующими реакциями.

В ходе реализации комплекса СТЕВИН создано сервисное программное обеспечение, позволяющее при *вводе текстовой информации* с клавиатуры и выводе её на экран использовать латинские, русские и греческие буквы, индексы, специальные математические знаки. При работе с клавиатурой *функции клавиш* и их комбинаций, как правило, ясны и привычны для пользователя. В частности: 1) клавиши **Y** и **Enter** служат для подтверждения, **N** и **Esc** – для отрицания; 2) нажатие клавиши **Home** переводит курсор в начало строки (или меню), а нажатие клавиши **End** – в конец; 3) другие клавиши управления курсором (←, ↑, ↓, →) перемещают его на один символ (или пункт меню) в соответствующем направлении[1]; 4) для удаления символа используются клавиши **Del** (**Delete**) и **Backspace**; 5) комбинация **Ctrl+C** в любой момент времени позволяет прервать выполнение программы **“stevin.exe”**.

При наборе символов, отсутствующих на клавиатуре, в системе СТЕВИН использован тот же приём, что и в распространённых текстовых редакторах (типа ChiWriter [15]) при изменении шрифта: последовательное нажатие функциональной и алфавитно-цифровой клавиши. Так, для ввода греческой буквы нужно нажать **F3** и соответствующую латинскую букву, а для ввода градуса – **F4** и латинскую букву **o**.

Описанные выше программные средства входят в единую среду, к которой обращаются все компоненты системы СТЕВИН. По мнению разработчиков системы, единый подход к представлению входной и выходной информации, используемый в различных частях комплекса СТЕВИН, облегчает работу студента с обучающей системой.

[1] При вводе какой-либо строки ответов клавиши ↑ и ↓ используются для перехода на другой уровень в ходе набора индексов.

5.2. Технические характеристики системы СТЕВИН

Автоматизированная обучающая система СТЕВИН рассчитана на работу в среде операционной системы MS DOS (версия 2.0 и выше). Система не требует нахождения в оперативной памяти каких-либо резидентных программ.

Исключение: для ввода букв русского алфавита может потребоваться предварительная загрузка какого-либо из драйверов клавиатуры, поддерживающих альтернативную кодировку ГОСТа [15]; впрочем, на практике необходимость во вводе русских букв при работе с системой СТЕВИН не возникает.

Любая компонента программного комплекса СТЕВИН допускает неограниченное число *повторных обращений* к ней. Время выполнения отдельных функций, входящих в состав данного комплекса, мало, поэтому реакция программы на ответы обучаемого при диалоге – практически мгновенная (обычно бо́льшую часть сеанса система находится в режиме ожидания). При визуализации процесса освобождения от связей, выводе на экран поощрительных реплик и в других подобных ситуациях специально (с учётом психологии восприятия) предусмотрены приемлемые *временные задержки*.

Выйти на какую-либо компоненту можно, используя иерархическое меню, достаточно быстро (в связи с этим отпадает необходимость в автостарте). Возможен *временный останов* работы системы по нажатию клавиши **`Pause`** (для продолжения работы можно нажать **`Enter`**).

Программный комплекс СТЕВИН не теряет работоспособности в случае неправильного нажатия клавиш. Если пользователь, набирая строку, сделал ошибку, то он может её тут же исправить. В любой ситуации система реагирует только на определённые клавиши, игнорируя остальные. Наконец, во многих случаях система выдаёт запрос на подтверждение ввода; отрицательный ответ означает *отмену ввода*, после чего могут быть внесены необходимые изменения. Выбранная схема диалога обеспечивает достаточно высокую надёжность и устойчивость работы комплекса СТЕВИН.

5.3. Графические возможности системы СТЕВИН

При выполнении системы СТЕВИН видеоадаптер работает в режиме EGAHI системы Turbo C [11]. Неотъемлемой составляющей всех задач являются рисунки (в то время как текстовые части задач сведены до разумного минимума). На рисунках используются стандартные приёмы схематического изображения механических систем, принятые в теоретической механике, так что изображение всегда *соответствует содержанию*. Система СТЕВИН обеспечивает достаточную *чёткость изображения*, а элементы рисунков отличаются ясными очертаниями.

При работе системы в графическом режиме EGAHI важная роль отводится *цвету*. Цвет выделяет поля меню и ключевые элементы изображений, цветом в необходимых случаях выделяются ключевые элементы текста. Применяются и другие *графические средства*: использование полей различной контрастности, контурная графика, выделение рамками отдельных элементов изображения, подчёркивание ключевых слов в тексте.

С учётом всего этого каждый кадр изображения в системе СТЕВИН предстаёт как упорядоченная совокупность текстовых и графических полей, *расположение* и *размеры* которых подчиняются требованиям, связанным с важностью и информативностью данного элемента изображения.

Существенное значение для улучшения понимания студентом правил, по которым связи могут быть заменены их реакциями, имеет *компьютерная мультипликация*. Достаточной быстроты смены кадров удаётся добиться, локализуя область экрана, в которой происходят изменения, окном ограниченных размеров. Этим обеспечивается достаточная *плавность движения*.

Как уже отмечалось выше, *графическое представление текстовой информации*, используемое в системе СТЕВИН, обеспечивает привычный для студента способ записи формул и выражений (наличие греческих букв, индексных обозначений), практически неотличимый от той формы представления информации, которая применяется на лекциях, в книгах и конспектах и т.п. Это потребовало разработки шрифта, включающего *расширенный набор литер*, графическое представление которых выдержано в едином стиле.

Заметим, что для стандартного матричного шрифта графической библиотеки Turbo C [11] (как и для шрифта, используемого ROM BIOS в текстовом режиме) характерна одинаковая ширина всех литер, что затрудняет их визуальное восприятие (например, такие литеры, как **i** или **l**, располагаются в текстовой строке слишком свободно, а литеры **m**, **ш**, **ы**, **ю** предельно сужены). В шрифте, используемом системой СТЕВИН, различные литеры имеют разную ширину, подобранную с учётом *читабельности текста*.

Дополнительному улучшению читабельности способствует гибкое *управление интервалами* между буквами, словами и строками, что позволяет оптимально приспосабливаться к особенностям текста: сохранять *выдержанность интервалов* в тексте, не содержащем сложных формул, обеспечивать необходимое *увеличение расстояния* между строками при наличии над- и подстрочных индексов, осуществлять *выделение заголовков* и т.п.

В системе большое внимание уделено разумному и корректному использованию *прописных и строчных букв*. Во-первых, правильное (с точки зрения языковых норм) употребление прописных и строчных букв улучшает восприятие пользователем сообщений системы. Во-вторых, необходимость различать прописные и строчные буквы при наборе выражений дисциплинирует студента, приучает его к корректной записи формул.

5.4. Обработка аналитических выражений в системе СТЕВИН

В процессе создания системы СТЕВИН разработано программное обеспечение, позволяющее вводить с клавиатуры *математические формулы и выражения*, анализировать их и вычислять их значения.

Необходимость в такого рода обеспечении вызвана двумя причинами. Во-первых, способность обучающей системы работать с аналитическими выражениями расширяет её *дидактические возможности*: она может запрашивать у обучаемого ответ в виде формульной строки и распознавать правиль ность ответа при любом из эквивалентных способов его записи. Во-вторых, студенту предоставляются дополнительные *сервисные возможности*: в любой момент времени он может выполнить численные выкладки при помощи самой системы, не прибегая к помощи микрокалькулятора.

Под “формульной строкой” здесь понимается линейная последовательность, образуемая *символами*, следующими друг за другом по определённым правилам; под *символами*, в свою очередь, понимаются: 1) символы переменных; 2) числовые константы; 3) знаки математических операций; 4) функциональные символы; 5) круглые скобки.

В качестве *символов переменных* допускаются буквы латинского и греческого алфавитов (прописные и строчные), снабжённые, быть может, нижними индексами (в роли индекса может выступать произвольная последовательность литер). Значением переменной может быть вещественное число (т.е., в терминологии языка Си, любое значение типа double). В роли символов переменных (с фиксированным значением) выступают π и $^\circ$ (значение последнего символа равно радианной мере градуса, т.е. $\pi/180$).

В качестве *числовых констант* допускаются произвольные вещественные числа в обычной десятичной записи (при этом целая часть отделяется от дробной части *десятичной точкой*). Если дробная часть отсутствует, то десятичную точку ставить не следует (целую же часть опускать нельзя).

В качестве *знаков математических операций* выступают литеры **+**, **−**, $*$, **/** и **=**; при этом плюс и минус могут обозначать и бинарную, и унарную операции. Знак умножения обычно может опускаться (*неявное задание умножения*); его нельзя опускать между числовыми константами (если ни одна из них не взята в скобки). Знак равенства трактуется как присваивание и используется в формулах вида < *переменная* > = < *выражение* >. Приоритеты операций следующие: первым выполняется умножение, заданное неявно, затем – деление и явно заданное умножение (их приоритет одинаков), затем – сложение и вычитание, а присваивание выполняется последним.

В качестве *функциональных символов* (каждый из которых соответствует определённой функции вещественного переменного) используются следующие последовательности строчных литер: **abs**, **sqrt**, **exp**, **sin**, **cos**, **tg**, **sh**, **ch**, **th**, **ln** (синонимом является символ **log**), **lg**, **arcsin**, **arccos**, **arctg**, **up**[1]. Аргумент каждой из этих функций берётся в круглые скобки, однако если он представляет собой символ переменной, числовую константу или же произведение константы на переменную (записанное без знака умножения), то скобки можно опустить.

---

[1] Функция $\mathrm{up}(x)$ – финитная бесконечно дифференцируемая функция с носителем на отрезке $[-1, 1]$, определяемая [12] формулой

$$\mathrm{up}(x) \;=\; \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\sin 2^{-k} t}{2^{-k} t}\, \mathrm{d}t\,.$$

Эта функция обладает рядом интересных свойств, позволяющих эффективно использовать её в задачах численной интерполяции и аппроксимации функций.

Работа с формулами и выражениями в системе СТЕВИН проходит в *два этапа*: на первом из них производится ввод формулы с клавиатуры, её синтаксический анализ и преобразование её в промежуточное внутреннее представление, а на втором – вычисление значения данной формулы.

Для синтаксического анализа введенной формульной строки применяется метод *нисходящего грамматического разбора* [7]. Преобразование формулы в промежуточное представление происходит одновременно с процессом синтаксического анализа, а основывается это представление на постфиксной форме записи. Таким образом, при реализации функций обработки формул был принят подход, опирающийся на *компиляцию*, а не на *интерпретацию*.

Выбор в пользу компиляции обусловлен соображениями эффективности. Если для подсистемы КАЛЬКУЛЯТОР вычисление значения для каждой введённой формулы производится только один раз (тут интерпретация была бы вполне уместна), то в других компонентах комплекса СТЕВИН часто требуется проверять правильность ответа в его аналитической форме, а это подразумевает проведение нескольких вычислений при различных значениях переменных и параметров, фигурирующих в формуле (и здесь скорость вычислений является критическим фактором).

5.5. Дидактическая специфика системы СТЕВИН

Основная *цель* разработки обучающей системы СТЕВИН – создать средство, которое позволило бы интенсифицировать практические занятия по теоретической механике, содействуя активному усвоению методических приёмов и закреплению навыков решения типовых задач изучаемого курса.

В [6] отмечается: “Важнейшая дидактическая способность компьютера состоит в его пригодности для программируемого автоматического управления процессами обучения человека”. Это управление заключается в том, что обучающая система предлагает студенту задания с учётом степени его подготовленности, выявляющейся в ходе сеанса, анализирует и оценивает его ответы, а затем в зависимости от полученных результатов определяет дальнейший порядок обучения. Несомненным преимуществом компьютерной системы обучения является возможность обеспечить *индивидуальную работу* с каждым студентом.

Действительно, процесс диалогового общения студента с обучающей системой СТЕВИН более всего напоминает индивидуальные занятия с преподавателем: в обоих случаях всё внимание (преподавателя или обучающей системы) сосредоточено на данном конкретном студенте. Студент не может “перескочить” через какой-либо вопрос системы, не разобравшись в нём и не найдя правильного ответа. Однако продуманный *выбор последовательности вопросов*, задаваемых обучаемому, *постепенность* движения от простого к более сложному делают поиск ответа вполне *посильной* задачей. С другой стороны, обучающая программа не даёт студенту без нужды “засиживаться” на одном месте, постоянно стимулируя его активную работу новыми вопросами и поощрительными репликами. В свою очередь, успешное продвиже ние вперёд укрепляет уверенность обучающегося в себе и решимость идти дальше.

Разработчики системы СТЕВИН разделяют мнение авторов [6]:

“Залогом успешности обучения являются: желание учащегося научиться и способность учителя искусно обучать. Желание учиться врождено человеку, но притупляется и угасает, если его не укреплять. Чтобы оно укреплялось, учёба должна быть увлекательной.

Источниками увлекательности служат интерес к предмету и посильность обучения. Интерес пробуждается демонстрацией полезности предмета. Посильность достигается, если не подавлять способности ученика чрезмерным количеством материала... и добиваться уменьшения трудности применением рациональной дидактики”.

В плане *содержания* система СТЕВИН охватывает ту часть курса статики твёрдого тела, в которой изучаются плоские системы сил. Во время работы с системой студент знакомится с *современной методикой* и рациональными приёмами решения задач статики, с основными видами связей, и тут же закрепляет новую информацию на практике, решая конкретные задачи возрастающей сложности.

Форма представления материала и *последовательность выполнения* программы взаимосвязаны с содержанием и диктуются методикой решения задач, используемой системой (при этом одни методические приёмы формулируются явно, другие – чтобы не перегружать активную память обучаемого – доводятся до него исподволь, при помощи последовательно предлагаемых вопросов наводящего характера).

Большое внимание при создании программного комплекса СТЕВИН уделялось *согласованности содержания и методов обучения*. Благоприятным фактором здесь является внутренне присущая статике *непосредственная наглядность* исследуемых явлений, иногда несколько теряющаяся из-за абстрактности используемого формального аппарата и сложности математических формул. Графические возможности, имеющиеся в системе СТЕВИН, позволяют вернуть учебному материалу непосредственную наглядность, причём параллельное использование системой вербального и визуального *способов представления информации* способствует повышению прочности его усвоения.

Заметим, что если при слушании лекции или чтении учебника роль студента довольно пассивна (он является лишь объектом – приёмником информации), то обучающая система СТЕВИН навязывает ему *активную роль*, понуждая при ответах на вопросы системы делать умозаключения, производить аналитические и численные выкладки, придавать своим ответам корректную форму. Кроме того, процесс набора ответа в виде текстовой строки активизирует и моторную память обучающегося. Всё это способствует концентрации внимания, укрепляет мотивационную установку студента на освоение нового учебного материала.

Работа с комплексом СТЕВИН позволяет развивать у студентов элементы *творческого мышления*: вопросы, задаваемые системой, и их последовательность выбраны таким образом, что обучающая программа поощряет обучаемого искать не только верное решение, но и наиболее быстрые, оптимальные приёмы его получения.

Подчеркнём, что использование обучающей системы СТЕВИН в учебном процессе не предполагает отказ от *других форм обучения* (в частности, не использующих компьютер). Наиболее эффективным в дидактическом плане является оптимальное сочетание новых и традиционных форм обучения.

При этом работа с системой СТЕВИН оказывает положительное *воздействие на обучаемого*. Она не отвращает его от других видов деятельности, а стимулирует их. Те знания, опыт и навыки, которые обучающиеся приобрёл в ходе диалога с системой, пригодятся ему и на практических занятиях, и при самостоятельной подготовке.

Например, привыкнув при диалоге с системой СТЕВИН к корректной и общепринятой записи формул, студент будет и далее пользоваться рациональными обозначениями. Заметим также, что навыки решения задач, вырабатываемые у студента в результате работы с системой, не ориентированы жёстко на компьютер; они соответствуют стандартной методике решения задач статики, представленной в современной учебной и научно-методической литературе [1–5, 13–14].

5.6. Интерактивные свойства системы СТЕВИН

Дидактический процесс представляет собой взаимодействие процессов преподавания и обучения. Стабилизировать дидактический процесс, сделать его целенаправленным и управляемым невозможно без наличия *обратных связей*, организуемых в рамках взаимодействия преподавателя, обучающей программы и обучающегося [9]. В связи с этим большое значение приобретают продуманная организация диалога между обучающей системой и обучающимся, наличие средств, позволяющих преподавателю обеспечить контроль за работой студента с обучающей программой.

Организация диалога “студент – система ” предполагает наличие гибкой реакции системы на действия обучающегося. В системе СТЕВИН, как уже отмечалось, обучающийся обладает возможностью самостоятельного *выбора разделов* обучающей программы. В то же время при работе с конкретной подсистемой уже она сама, анализируя ответ студента, определяет *последовательность прохождения материала*. В наборе задач, предлагаемых системой, имеются задания *различного уровня сложности*, и обучающая программа имеет возможность выбора задания с учётом того, насколько успешно обучающийся справился с предыдущими.

Важно также, что *скорость продвижения* обучающегося лимитируется только его личными возможностями. Ему не требуется, как это часто бывает во время практических занятий с группой в учебной аудитории, ожидать, пока его товарищи также усвоят уже понятый им материал. Диалог между системой и студентом протекает в непринуждённой обстановке и естественном для обучающегося темпе. Подчеркнём, что именно студент навязывает система темп, а не наоборот.

Анализ ошибок, допускаемых студентами при ответе на вопросы системы СТЕВИН, она осуществляет на нескольких уровнях. Во-первых, анализируется синтаксическая правильность каждого ответа. Если при этом введённая строка не является синтаксически правильным выражением или формулой, то система выводит сообщение о наличии синтаксической ошибки, одновременно указывая её характер: незакрытая скобка, неописанная переменная и т.п.

После синтаксического анализа выполняется проверка того, является ли введённое выражение (или формула) действительно требуемым ответом на вопрос. О том, является ли ответ правильным или же нет, комплекс СТЕВИН обязательно информирует обучаемого (дальнейшие действия комплекса зависят от того, какая подсистема и в каком режиме выполняется, так что по своей структуре система СТЕВИН принадлежит к классу *линейно-разветвлённых обучающих программ*).

Известно [9], что дидактическая эффективность обучающей программы повышается, если процесс диалога программы и студента приобретает *личностную, эмоциональную окраску* (так что поддерживается иллюзия настоящего диалога с преподавателем). Это обстоятельство было учтено при разработке средств реакции системы СТЕВИН на ответы студента.

Именно, вместо однообразных, адресованных не данному конкретному собеседнику, а некоему абстрактному существу, реплик типа “Верно” и “Неверно” предусмотрены такие сообщения: “Хочу Вас поздравить! Именно это и требовалось”, или “Мне нравится ход Ваших мыслей! Это то, что нужно”, или “Досадно, конечно, но Вы сейчас не правы” и др. Запас их, заложенный в систему, достаточно велик, и они обязательно содержат эмоциональный элемент – похвалу при удачном ответе, сочувствие при неудаче. Учёт личностного аспекта в процессе диалога позволяет компенсировать дефицит эмоционального общения, который может возникать в системах человеко-машинного диалога.

Разнообразит процесс интерактивного общения студента с системой СТЕВИН и то, что она во многих случаях допускает несколько *вариантов ответа* на свой вопрос. Так, при необходимости ввести формульную строку студент может (в зависимости от соображений удобства и вкуса) выбрать тот или иной из эквивалентных способов её записи. Аналогично, если требуется дать на вопрос системы утвердительный (или отрицательный) ответ, то студент располагает различными вариантами такого ответа.

Отметим, что преподаватель имеет возможность воздействовать на ход диалога студента с системой СТЕВИН путём *выбора параметров настройки* системы, внося перед началом сеанса необходимые изменения в файл данных **“stevin.cfg”** (в частности, он может выбрать тот *режим обучения*, который считает наиболее подходящим для данной группы или конкретного студента). Во время занятия в дисплейном классе дежурный преподаватель наблюдает за ходом работы студентов, периодически подходя то к одному, то к другому. При необходимости он может лично вмешаться в процесс диалога.

Библиографический список

Рекомендуемая литература

1. **Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р.** Курс теоретической механики: Учебник. СПб.: Лань, 2002. 736 с.
2. **Еленев С.А., Шевелёва Г.И.** Теоретическая механика. Статика: Конспект лекций. М.: Издательство “Станкин”, 1999. 78 с.
3. **Кирсанов М.Н.** Решебник. Теоретическая механика. М.: Физматлит, 2002. 384 с.
4. **Корецкий А.В., Осадченко Н.В.** Методические указания по проведению практических занятий по курсу “Теоретическая механика” в классах ПЭВМ. М.: Издательство МЭИ, 1993. 44 с.
5. **Новожилов И.В., Зацепин М.Ф.** Типовые расчёты по теоретической механике на базе ЭВМ. М.: Высш. шк., 1986. 136 с.

Использованная литература

6. **Брусенцов Н.П., Маслов С.П., Рамиль Альварес Х.** Микрокомпьютерная система обучения “Наставник”. М.: Наука, 1990. 224 с.
7. **Вирт Н.** Алгоритмы + структуры данных = программы. М.: Мир, 1985. 324 с.
8. **Мартыненко Ю.Г., Осадченко Н.В.** Возможности использования виртуальной реальности в преподавании точных наук: лекция-доклад // Серия материалов школы-семинара “Создание единого информационного пространства системы образования”. М.: Исследовательский центр проблем качества подготовки специалистов, 1998. 19 с.
9. **Одегова В.В.** Учебный процесс и ЭВМ: дидактические проблемы управления. Львов: Вища школа, 1988. 175 с.
10. **Озол О.Г.** Теория механизмов и машин. М.: Наука,1984. 432 с.
11. **Прокофьев В.П., Сухарев Н.Н., Храмов Ю.В.** Графические средства Turbo C и Turbo C++. М.: Финансы и статистика, СП “Ланит”, 1992. 160 с.
12. **Рвачёв В.Л., Рвачёв В.А.** Неклассические методы теории приближений в краевых задачах. Киев: Наукова думка, 1979. 196 с.
13. **Слободянский М.Г.** Построение и изложение в курсе теоретической механики раздела “Статика твёрдого тела” // Теоретическая механика во втузах: Сб. статей. М.: Высш. шк., 1971. С.156 – 170.
14. **Теоретическая** механика. Вывод и анализ уравнений движения на ЭВМ: Ч.I. / В.Г.Веретенников, И.И.Карпов, А.П..Маркеев и др. М.: Высш. шк., 1990. 174 с.
15. **Фигурнов В.Э.** IBM PC для пользователя. М.: Финансы и статистика, 1990. 240 с.

Оглавление