Содержание

1 Сила. Материальная точка. Абсолютно твердое тело

В статике изучается равновесие тел под действием сил и свойства систем сил, необязательно находящихся в равновесии.

Определение. **Сила** — это одна из характеристик взаимодействия материальных тел. В механике сила определяется с помощью аксиом.

Основными **единицами измерения** силы являются ньютон (Н) в системе СИ и Килограмм-сила(кгс) в системе МКГСС.

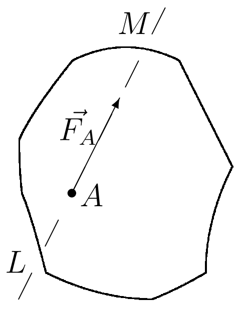


Рис. 1

Определение. **Абсолютно твердым телом (АТТ)** называется тело конечных размеров, расстояния между точками которого неизменны.

Определение. **Материальной точкой** называется весомое тело, размеры которого в данном рассматриваемом случае не учитываются. **Определение.** Точка приложения силы и направление определяют **линию действия** силы.

2 Эквивалентные системы сил

Определение. **Эквивалентными** будем называть такие системы сил, которые одинаково воздействуют на абсолютно твердое тело. Если система сил не меняет состояния тела, то эта система эквивалентна нулю.

$$\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n\} \sim \{0\} \tag{1}$$

Определение. Если система сил эквивалентна одной силе, то эта сила называется **равнодействующей**. Не всякая система сил имеет равнодействующую.

$$\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n\} \sim \{\vec{R}\} \tag{2}$$

Сила — не свободный вектор. Равенства сил не достаточно для эквивалентности.

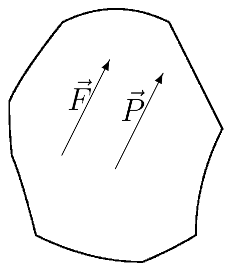


Рис. 2

$\vec{F} = \vec{P}$, но эти силы не эквивалентны, т.е. оказывают различное действие на абсолютно твердое тело

3 Аксиомы статики и их следствия

Определение. Элементарными операциями над силами являются сложение и разложение сил по правилу параллелограмма, добавление и отбрасывание систем сил, эквивалентных нулю.

Аксиома 1 (о векторном характере силы, действующей на точку)

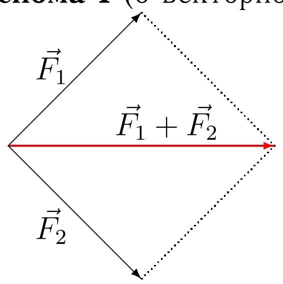


Рис. 3

Сила, действующая на материальную точку, может быть охарактеризована величиной, направлением и подчиняется закону сложения по правилу параллелограмма.

Аксиома 2 (о двух силах)

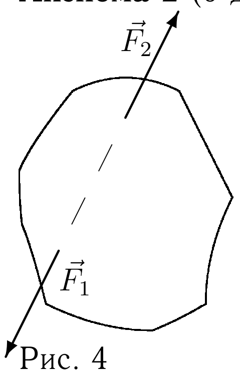


Рис. 4

$$\{\vec F_1, \vec F_2\} \sim \{0\} \tag{3}$$

Две силы, приложенные к абсолютно твердому телу, эквивалентны нулю тогда и только тогда, когда они равны по модулю, действуют по одной прямой и направлены в противоположные стороны.

Аксиома 3 (об упрощении системы сил)

Системы сил, эквивалентные нулю, можно добавлять к любой системе сил или отбрасывать от нее.

Следствие (аксиом 2 и 3)

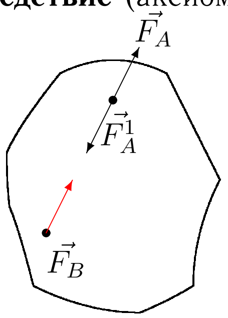


Рис. 5

$$\{\vec F_B, \vec F_A^1\} \sim \{0\}; \quad |\vec F_B| = |\vec F_A| = |\vec F_A^1| \tag{4}$$

Сила, действующая на абсолютно твердое тело, представляется скользящим вектором. Скользящий вектор можно двигать вдоль линии действия силы.

Аксиома 4 (о взаимодействии разных тел — третий закон Ньютона)

При взаимодействии двух тел сила, с которой первое тело действует на второе, равна по величине, находится на той же прямой и противоположно направлена по отношению к силе, которая действует на первое тело со стороны второго.

Аксиома 5 (о связях)

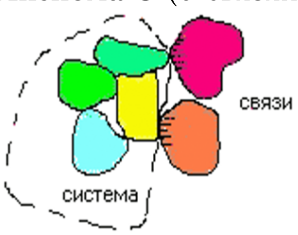


Рис. 6

Определение. Связями в механике называют ограничения, препятствующие движению материальных тел. Действие связей можно заменить силами (которые называются реакциями связей) по определенным правилам.

Аксиома 6 (Отвердевания)

При добавлении связей к системе тел, на которую действует система сил, эквивалентная нулю, состояние системы не меняется.

4 Теорема о приведении произвольной системы сил к двум силам

Теорема. Произвольную систему сил с помощью только элементарных операций можно привести к двум силам.

Доказательство.

1. Одна сила: Разложить по правилу параллелограмма.

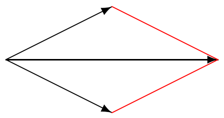


Рис. 7

2. Две силы: Уже приведены.
3. Три силы: ($\vec{F_A}$ в точке A, $\vec{F_B}$ в точке B, $\vec{F_C}$ в точке C):

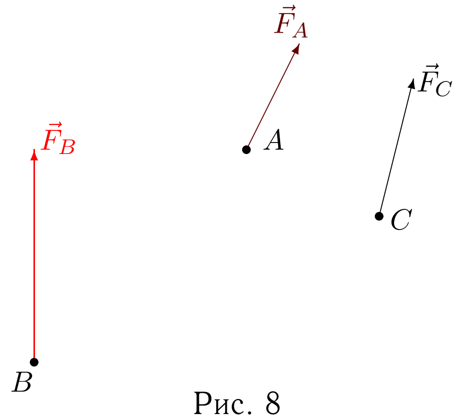


Рис. 8

   (a) Через точку A и вектор $\vec{F_C}$ проводим плоскость (рис. 9). Точка B в эту плоскость может и не попадать.

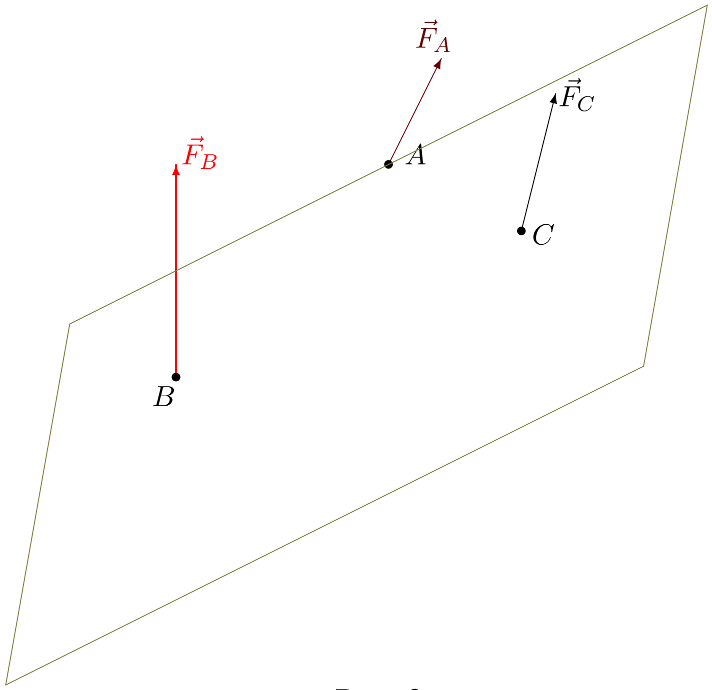


Рис. 9

(b) Через точку A и вектор $\vec{F_B}$ проводим плоскость (рис. 10).

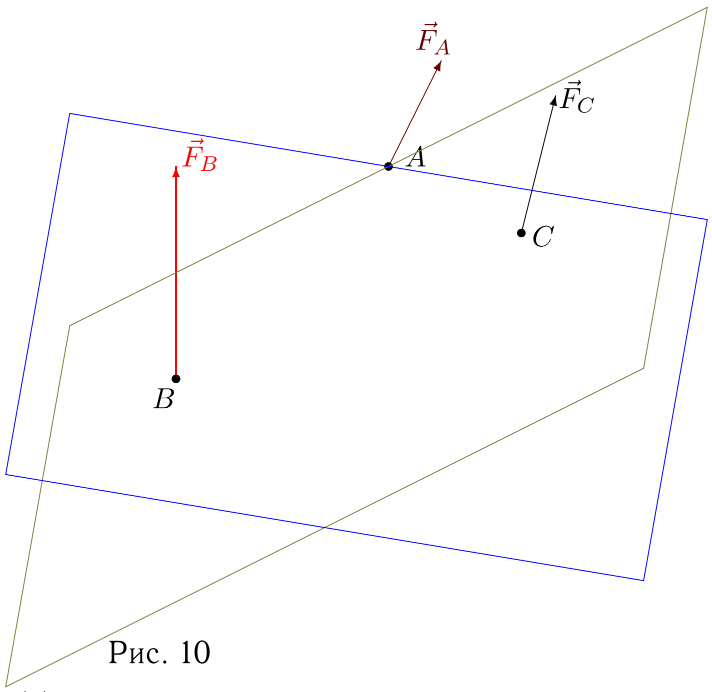


Рис. 10

(c) На линии пересечения плоскостей выберем произвольную точку D (рис. 11).

(d) Провести прямые AB, BD в одной плоскости и AC, DC в другой (рис. 11).

(e) Разложить вектор $\vec{F_B}$ на направляющие AB, BD по правилу параллелограмма. $\vec{F_B} = \vec{F_B'} + \vec{F_B''}$. Разложить вектор $\vec{F_C}$ на направляющие AC, DC по правилу параллелограмма. $\vec{F_C} = \vec{F_C'} + \vec{F_C''}$.

(f) Переместить составляющие векторов $\vec{F_B}$ и $\vec{F_C}$ вдоль направляющих к точкам A и D (рис. 12).

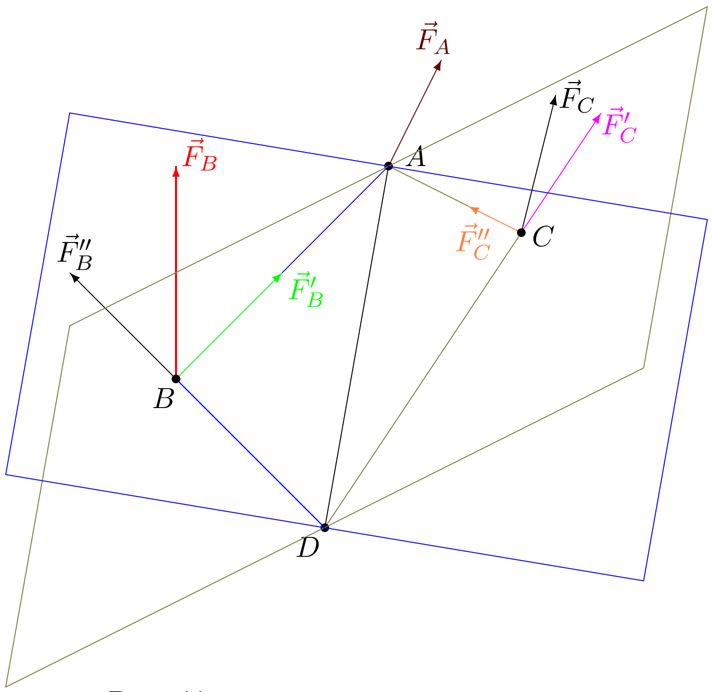


Рис. 11

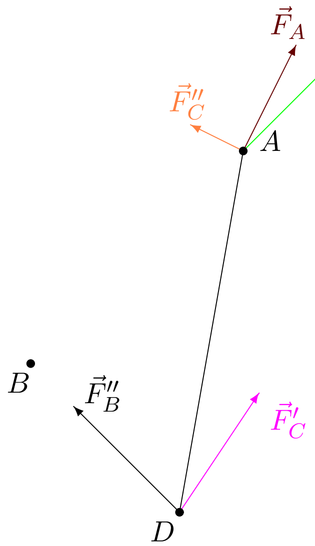


Рис. 12

(g) В точках A и D сложить силы по правилу параллелограмма.

Понятно, что систему, состоящую из большего (чем три) количества сил, можно привести к двум силам, последовательно работая с каждыми тремя силами.

Теорема. Произвольную систему сил только с помощью элементарных операций можно привести к двум силам, одна из которых будет приложена в заранее указанной точке.

Доказательство.

Сначала система приводится к двум силам по алгоритму предыдущей теоремы. Далее необходимо провести (две) плоскости через заданную точку и полученные векторы сил. Заданная точка будет находиться на пересечении плоскостей. Остается выбрать произвольную точку на линии пересечения плоскостей и повторить пункты 4-7 доказательства предыдущей теоремы.

5 Момент силы относительно точки

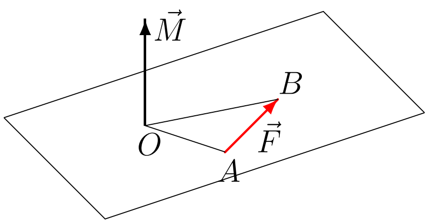


Рис. 13

Определение. **Моментом силы относительно точки** называется вектор, численно равный произведению модуля силы на плечо, т.е. на кратчайшее расстояние от указанной точки до линии действия силы, и направленный перпендикулярно плоскости, проходящей через выбранную точку и линию действия силы, в ту сторону, откуда последовательный обход точек: выбранной, начала вектора силы, конца вектора силы и снова выбранной точки виден происходящим против часовой стрелки.

Если O — точка, относительно которой определяется момент силы $\vec{F}$, то момент силы обозначается обычно, как $M_O(F)$. Можно показать, что, если точка приложения силы $\vec{F}$ определяется радиусом-вектором $\vec{r}$ относительно точки O, то справедливо соотношение

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F} \tag{5}$$

т.е. момент силы относительно точки равен векторному произведению вектора $\vec{r}$ на вектор $\vec{F}$.

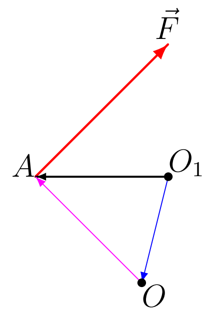
Пусть x, y, z — координаты точки приложения силы F, а F_x, F_y, F_z — проекции силы на координатные оси. Тогда момент силы F относительно начала координат имеет вид:

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = (yF_z - zF_y)\vec{i} + (zF_x - xF_z)\vec{j} + (xF_y - yF_x)\vec{k} \tag{6}$$

Отсюда следует, что проекции момента силы относительно начала координат на координатные оси задаются формулами:

$$\begin{cases} M_{Ox}(\vec{F}) & = & yF_z - zF_y \\ M_{Oy}(\vec{F}) & = & zF_x - xF_z \\ M_{Oz}(\vec{F}) & = & xF_y - yF_x \end{cases}$$

6 Связь моментов одной и той же силы относительно разных точек



По определению момент силы относительно центра O:

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{OA} \times \vec{F}; \quad \vec{M}_{O_1}(\vec{F}) = \vec{O_1A} \times \vec{F}.$$

Вектор $\vec{O_1A}$ можно представить как сумму $\vec{O_1A} = \vec{O_1O} + \vec{OA}$, поэтому

$$\vec{M}_{O_1}(\vec{F}) = \vec{O_1A} \times \vec{F} = \vec{O_1O} \times \vec{F} + \vec{OA} \times \vec{F} = \vec{O_1O} \times \vec{F} + \vec{M}_O(\vec{F}) \tag{7}$$

Рис. 14

Отсюда получаем связь моментов относительно разных центров

$$\vec{M}_{O_1}(\vec{F}) = \vec{M}_O(\vec{F}) + \vec{O_1O} \times \vec{F}$$

7 Теорема о проекциях векторов моментов силы относительно разных точек

Теорема. Проекции векторов моментов одной и той же силы относительно двух разных точек на прямую, проходящую через эти точки, равны между собой.

Доказательство.

Используем формулу связи моментов одной и той же силы относительно разных точек:

$$\vec{M}_{O_1}(\vec{F}) - \vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{O_1O} \times \vec{F} \tag{8}$$

Для проекций левой и правой частей этого равенства на ось O_1O можно записать:

$$\text{Пр}\{\vec{M}_{O_1}(\vec{F})\} - \text{Пр}\{\vec{M}_O(\vec{F})\} = \text{Пр}\{\vec{O_1O} \times \vec{F}\} \tag{9}$$

Но $\text{Пр}\{\vec{O_1O} \times \vec{F}\} = 0$, так как вектор $\vec{O_1O} \times \vec{F}$ перпендикулярен плоскости, в которой находится ось O_1O. Следовательно, $\text{Пр}\{\vec{M}_{O_1}(\vec{F})\} = \text{Пр}\{\vec{M}_O(\vec{F})\}$

8 Момент силы относительно оси

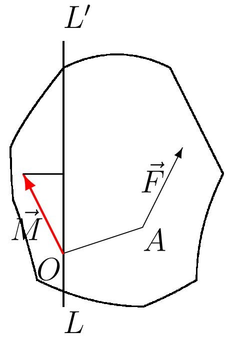


Рис. 15

Определение. **Моментом силы относительно оси** называется скалярная величина, равная проекции вектора момента силы относительно любой точки оси на саму ось.

Один из способов вычисления момента силы относительно оси:

1. Выбрать на оси произвольную точку и построить через эту точку плоскость, перпендикулярную оси.
2. Спроектировать на плоскость силу.
3. Определить момент полученной проекции силы относительно выбранной точки.

9 Главный вектор, главный момент системы сил

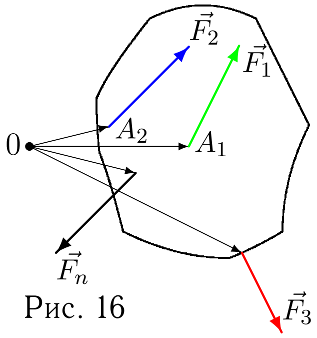


Рис. 16

Пусть дана произвольная система сил $\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n\}$. Сумму этих сил $\vec{R} = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k$ называют **главным вектором**. Сумму моментов сил относительно какого-либо полюса (центра приведения) $\vec{M}_O = \sum_{k=1}^{n} \vec{M}_O(\vec{F}_k) = \sum_{k=1}^{n} O\vec{A}_k \times \vec{F}_k$ называют **главным моментом** рассматриваемой системы сил.

10 Связь главных моментов системы сил относительно разных точек

$$\vec{M}_O = \sum_{k=1}^{n} \vec{M}_O(\vec{F}_k) = \sum_{k=1}^{n} O\vec{A}_k \times \vec{F}_k$$

$$\vec{M}_{O_1} = \sum_{k=1}^{n} \vec{M}_{O_1}(\vec{F}_k) = \sum_{k=1}^{n} (O_1\vec{A}_k \times \vec{F}_k) = \sum_{k=1}^{n} [O_1\vec{O} \times \vec{F}_k + O\vec{A}_k \times \vec{F}_k]$$

$$\vec{M}_{O_1} = \sum_{k=1}^{n} O_1\vec{O} \times \vec{F}_k + \sum_{k=1}^{n} O\vec{A}_k \times \vec{F}_k = O_1\vec{O} \times \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k + \sum_{k=1}^{n} O\vec{A}_k \times \vec{F}_k$$

Здесь $\sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k$ — главный вектор системы, а $\sum_{k=1}^{n} O\vec{A}_k \times \vec{F}_k$ — главный момент относительно точки O. Следовательно, $\vec{M}_{O_1} - \vec{M}_O = O_1\vec{O} \times \vec{R}$.

11 Условия равновесия системы сил

Для равновесия системы сил, приложенных к твердому телу, необходимо и достаточно, чтобы главный вектор и главный момент системы относительно любого центра приведения были равны нулю: $R = 0$; $M_O = 0$.

Для проекций векторов R и M_O на координатные оси уравнения равновесия имеют вид:

$$R_x = 0;\ R_y = 0;\ R_z = 0; \quad M_x = 0;\ M_y = 0;\ M_z = 0. \tag{10}$$

или

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0; \quad \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0; \quad \sum_{k=1}^{n} F_{kz} = 0 \tag{11}$$

(суммы проекций сил на оси координат)

$$\sum_{k=1}^{n} M_x(\vec{F}_k) = 0;\ \sum_{k=1}^{n} M_y(\vec{F}_k) = 0;\ \sum_{k=1}^{n} M_z(\vec{F}_k) = 0 \tag{12}$$

(суммы моментов сил относительно осей координат)

12 Пара сил

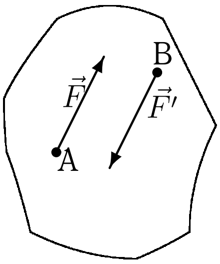


Рис. 17

Определение. **Парой сил** называется система из двух сил, равных по величине и противоположно направленных. Пара сил полностью определяется своим моментом, так как главный вектор пары всегда равен нулю.

$$\vec{R} = \vec{F} + \vec{F'}; \quad \vec{M}_O = \vec{M}_O(\vec{F}) + \vec{M}_O(\vec{F'}) = \vec{OA} \times \vec{F} + \vec{OB} \times \vec{F'} = \vec{OB} \times \vec{F'} - \vec{OA} \times \vec{F'}, \tag{13}$$

но

$$\vec{OB} = \vec{OA} + \vec{AB} \Rightarrow \vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} \Rightarrow \vec{M}_O = (\vec{OB} - \vec{OA}) \times \vec{F'} = \vec{AB} \times \vec{F'}, \tag{14}$$

т.е. $\vec{M}_O = \vec{AB} \times \vec{F'}$. Момент пары не зависит от выбора центра приведения.

Пары сил с одинаковыми моментами действуют на твердое тело одинаково, поэтому пару сил можно видоизменять, как угодно, сохраняя момент.

Момент пары перпендикулярен плоскости пары. Абсолютное значение вектора момента пары равно произведению абсолютного значения силы пары на плечо пары.

Теорема. Произвольную систему сил всегда можно привести к одной силе и одной паре.

13 Теорема об эквивалентности нулю системы сил

Теорема. Система сил, приложенных к твердому телу, эквивалентна нулю тогда и только, когда у этой системы равны нулю главный вектор и главный момент.

13.1 Доказательство необходимости

Дано: $\{\vec{P}_1, \vec{P}_2, \ldots, \vec{P}_n\} \sim \{0\}$. Доказать: $\vec{R} = 0$, $\vec{M}_O = 0$.

По теореме о приведении произвольной системы сил к двум силам данную систему сил можно привести к двум силам. Поэтому можно рассматривать новую систему сил: $\{\vec{F}_1, \vec{F}_2\}$ вместо исходной.

Согласно аксиоме о двух силах, приложенных к абсолютно твердому телу, эти силы эквивалентны нулю тогда и только тогда, когда они равны по модулю, действуют по одной прямой и направлены в противоположные стороны.

Следовательно, $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ и $\vec{M}_O = 0$ (O — произвольная точка).

13.2 Доказательство достаточности

Дано: $\vec{R} = 0$, $\vec{M}_O = 0$.

Доказать: $\{\vec{P}_1, \vec{P}_2, \ldots, \vec{P}_n\} \sim \{0\}$

Систему $\{\vec{P}_1, \vec{P}_2, \ldots, \vec{P}_n\}$ можно привести к $\{\vec{F}_1, \vec{F}_2\}$. Так как $\vec{R} = 0$, $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$ или $\vec{F}_1 = -\vec{F}2$. Но тогда возможны два случая.

1. Силы лежат на одной прямой

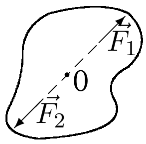


Рис. 18

Но тогда $\{\vec{F}_1, \vec{F}_2\} \sim \{0\}$ и, следовательно, $\{\vec{P}_1, \vec{P}_2, \ldots, \vec{P}_n\} \sim \{0\}$

2. Силы лежат на параллельных прямых

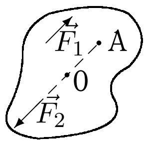


Рис. 19

Покажем, что $\vec{M}_A = 0$. По теореме о связи главных моментов системы сил относительно разных точек $\vec{M}_A - \vec{M}_O = \vec{AO} \times \vec{R}$. Но $\vec{R} = 0$ и $\vec{M}_O = 0$ по условию. Следовательно, $\vec{M}_A = 0$.

14 Теорема об эквивалентности систем сил

Теорема. Две системы сил, действующие на твердое тело, эквивалентны тогда и только тогда, когда у них равны между собой главные векторы и главные моменты.

14.1 Доказательство необходимости

Дано: $\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n\} \sim \{\vec{G}_1, \vec{G}_2, \ldots, \vec{G}_m\}$.

Доказать: $\vec{R}(\vec{F}) = \vec{R}(\vec{G}), \quad \vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{M}_O(\vec{G})$

По теореме о приведении произвольной системы сил к двум силам любую систему сил можно привести к двум силам. Поэтому можно вместо исходных рассматривать новые системы сил: $\{\vec{F}_1, \vec{F}_2\}$ и $\{\vec{G}_1, \vec{G}_2\}$ (здесь $\vec{F}_1, \vec{F}_2$, $\vec{G}_1, \vec{G}_2$ — не те же самые, что в исходных системах).

Рассмотрим три рисунка одного тела, на которое действуют системы сил.

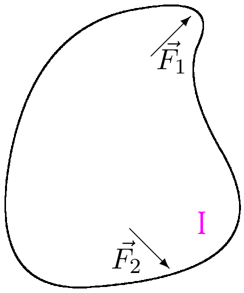


Рис. 20

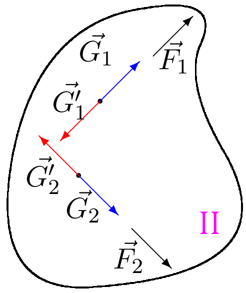


Рис. 21

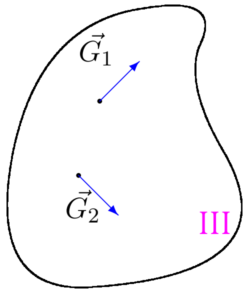


Рис. 22

Имеем I $\sim$ III (по условию), I $\sim$ II (по построению), следовательно, II $\sim$ III и $\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{G}'_1, \vec{G}'_2\} \sim \{0\}$.

Тогда $\vec{R}(\vec{F} + \vec{G}') = 0$ и $\vec{M}_O(\vec{F} + \vec{G}') = 0$ по теореме об эквивалентности нулю системы сил.

Отсюда 1) $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{G}'_1 + \vec{G}'_2 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 - \vec{G}_1 - \vec{G}_2 = 0$, следовательно, $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{G}_1 + \vec{G}_2$ и $\vec{R}(\vec{F}) = \vec{R}(\vec{G})$.

2) $\vec{M}_O(\vec{F}) + \vec{M}_O(\vec{G}') = 0$, $\vec{M}_O(\vec{F}) - \vec{M}_O(\vec{G}) = 0$ и $\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{M}_O(\vec{G})$. Что и требовалось доказать.

14.2 Доказательство достаточности

Дано: $\vec{R}(\vec{F}) = \vec{R}(\vec{G})$, $\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{M}_O(\vec{G})$. Доказать: $\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n\} \sim \{\vec{G}_1, \vec{G}_2, \ldots, \vec{G}_m\}$.

Рассмотрим те же самые рисунки (20-22). Здесь I $\sim$ II (по построению).

Покажем, что $\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{G}'_1, \vec{G}'_2\} \sim 0$.

По условию $\vec{R}(\vec{F}) = \vec{R}(\vec{G})$, $\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{M}_O(\vec{G})$, следовательно, $\vec{R}(\vec{F}) = -\vec{R}(\vec{G}')$, $\vec{M}_O(\vec{F}) = -\vec{M}_O(\vec{G}')$ или $\vec{R}(\vec{F}) + \vec{R}(\vec{G}') = 0$ и $\vec{M}_O(\vec{F}) + \vec{M}_O(\vec{G}') = 0$. И по теореме об эквивалентности нулю системы сил $\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{G}'_1, \vec{G}'_2\} \sim 0$.

Но если $\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{G}'_1, \vec{G}'_2\} \sim 0$, то II $\sim$ III. Значит, и I $\sim$ III. Что и требовалось доказать.

15 Приведение системы сил к простейшей системе

15.1 Инварианты

Определение. Главный вектор $\vec{R}$ системы сил не зависит от выбора центра приведения и называется **первым статическим инвариантом** I_1.

Определение. Скалярное произведение главного вектора и главного момента $I_2 = \vec{R} \cdot \vec{M}_O$ системы сил не зависит от выбора центра приведения и называется **вторым статическим инвариантом**.

Так как $I_2(O') = \vec{R} \cdot \vec{M}_{O'} = \vec{R} \cdot \vec{M}_O + \vec{R} \cdot \vec{O'O} \times \vec{R}$, но $\vec{R} \cdot \vec{O'O} \times \vec{R} = 0$, поскольку вектор $\vec{R}$ перпендикулярен векторному произведению $\vec{O'O} \times \vec{R}$.

15.2 Классификация пространственных систем сил

I	$\vec{R}=0, \vec{M}_O=0$	Система эквивалентна нулю
II	$\vec{R}=0, \vec{M}_O\neq 0$	Система приводится к паре сил с моментом $\vec{M}_O$
III	a) $\vec{R}\neq 0, \vec{M}_O=0$	Система приводится к единственной силе в точке O (система имеет равнодействующую $\vec{R}$). Примерами таких систем являются: система сходящихся сил, плоская система сил, не сводящаяся к паре, система параллельных сил.
	b) $\substack{\vec{R}\neq 0, \vec{M}_O\neq 0 \\ \vec{R}\cdot\vec{M}_O=0}$	Система приводится к единственной силе в новой точке .
IV	$\substack{\vec{R}\neq 0, \vec{M}_O\neq 0 \\ \vec{R}\cdot\vec{M}_O\neq 0}$	Система приводится к моменту и силе в новой точке C, что называется **динамическим винтом**.

16 Виды связей

Определение. Все то, что ограничивает перемещения данного тела в пространстве, называют **связью**.

Определение. Сила, с которой данная связь действует на тело, препятствуя тем или иным его перемещениям, называется **силой реакции связи** или просто реакцией связи. Направлена реакция связи в сторону, противоположную той, куда связь не дает перемещаться телу.

Виды связей:

1. *Гладкая плоскость (поверхность) или опора.*

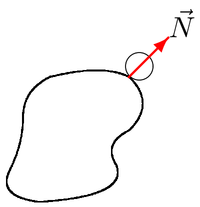


Рис. 23

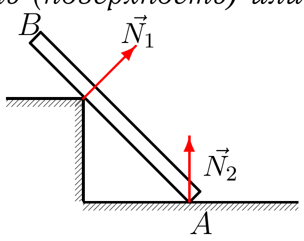


Рис. 24

Реакция $\vec{N}$ гладкой поверхности или опоры направлена по общей нормали к поверхностям соприкасающихся тел в точке их касания и приложена в этой точке. $\vec{N}_1 \perp AB$.

2. *Нить.* Реакция натянутой нити направлена вдоль нити к точке ее подвеса.

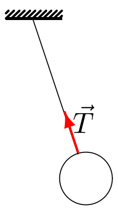


Рис. 25

3. *Цилиндрический шарнир.* Реакция цилиндрического шарнира может иметь любое направление в плоскости, перпендикулярной оси шарнира.

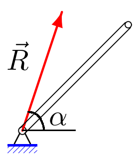
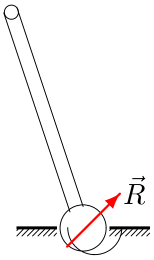


Рис. 26

4. *Сферический шарнир и подпятник.* Реакция сферического шарнира может иметь любое направление в пространстве.



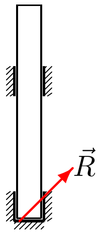
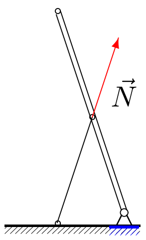


Рис. 27 Рис. 28

5. *Невесомый стержень.*



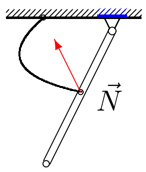


Рис. 29 Рис. 30

Реакция невесомого шарнирно прикрепленного стержня направлена вдоль оси стержня или вдоль прямой, соединяющей шарниры (рис. 30).

17 Система сходящихся сил

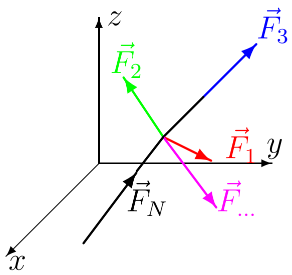


Рис. 31

Определение. Система сил, все линии действия которых пересекаются в одной точке, называется **сходящейся**.
Система сходящихся сил имеет равнодействующую, вектор силы которой определяется сложением векторов сил по правилу параллелограмма и проходит через точку, в которой сходятся линии действия системы сил.

Теорема. (Вариньон) Момент равнодействующей силы для системы сходящихся сил относительно произвольной точки равен сумме моментов всех составляющих сил относительно той же точки.

18 Система параллельных сил

Определение. Система сил, в которой векторы сил имеют параллельные линии действия, является **параллельной системой сил**.

18.1 Случай двух параллельных сил, направленных в одну сторону

Рис. 32

Дана система двух параллельных сил (рис. 32). Проведем через точки и прямую и добавим к системе эквивалентную нулю систему из двух равных по величине и противоположно направленных сил $\vec{G}$ и $\vec{G}'$ (рис. 33). Новая система из четырех сил $\vec{G}$, $\vec{G}'$, $\vec{F}_A$, $\vec{F}_B$ эквивалентна системе из двух исходных сил. Но новую систему можно заменить системой из двух сил (рис. 34) $\vec{R}$ и $\vec{R}'$, которые можно перенести по линиям действия в точку пересечения S и сложить по правилу параллелограмма (рис. 35).

Рис. 33

Рис. 34

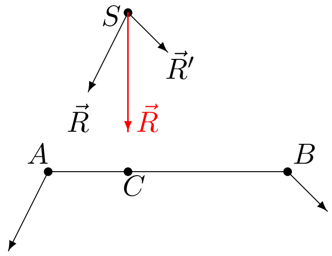


Рис. 35

Результирующая сила $\vec{R} = \vec{F}_A + \vec{F}_B$ эквивалентна исходной системе сил (рис. 35). Модуль результирующей $R = F_A + F_B$.

Сила параллельна исходной системе сил и равна по величине сумме их значений. Из геометрии следует, что

$$\frac{AC}{BC} = \frac{F_B}{F_A}.$$

Таким образом, система двух параллельных сил, направленных в одну сторону, приводится к одной силе, эквивалентной системе из этих параллельных сил; причем линия действия новой силы параллельна линиям исходных сил и делит расстояние между ними в отношении, обратно пропорциональном их величинам, а величина силы равна сумме величин исходных сил.

18.2 Случай двух параллельных сил, направленных в противоположные стороны

Аналогично можно показать, что система двух параллельных сил, не равных по величине и направленных в противоположные стороны, эквивалентна одной силе $\vec{R}$, направленной параллельно исходным силам в сторону большей силы, причем линия действия эквивалентной силы делит отрезок, соединяющий точки приложения исходных сил внешним образом (рис. 36) в соотношении:

$$\frac{AC}{BC} = \frac{F_B}{F_A}.$$

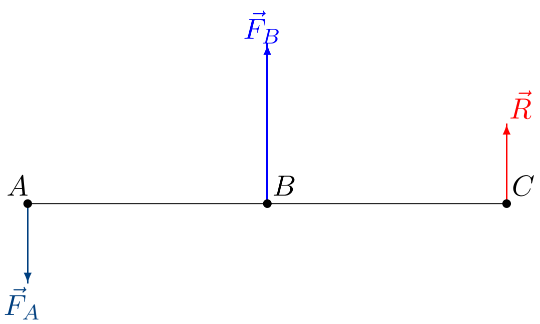


Рис. 36

Модуль результирующей $R = F_B - F_A$.

19 Трение

19.1 Сила трения скольжения

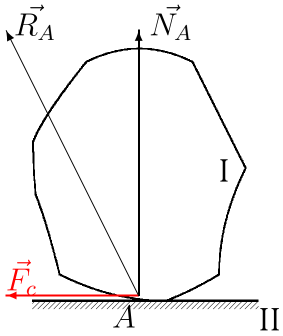


Рис. 37

Если два тела I и II взаимодействуют друг с другом, соприкасаясь в точке A, то всегда реакцию R_A, действующую, например со стороны тела II и приложенную к телу I, можно разложить на две составляющие: N_A, направленную по общей нормали к поверхности соприкосновении тел в точке A, и F_c, лежащую в касательной плоскости. Составляющая N_A называется **нормальной реакцией**, сила F_c называется **силой трения скольжения** — она препятствует скольжению тела I по телу II. В соответствии с третьим законом Ньютона на тело II со стороны тела I действует равная по модулю и противоположно направленная сила реакции.

Ее составляющая, перпендикулярная касательной плоскости, называется **силой нормального давления**.

Сила трения $F_c = 0$, если соприкасающиеся поверхности идеально гладкие.

Сила трения всегда лежит на общей касательной плоскости к поверхностям соприкосновения. Величину силы трения, как и всякой другой реакции опоры, можно найти из условия равновесия покоящегося тела. Предельное же значение силы трения определяется из закона экспериментально установленного Ш.Кулоном в 1781 г.

$$F_{tr} = fN.$$

Величина предельной силы трения зависит от материала соприкасающихся тел и нормальной реакции. При трении дерева о дерево $0.4 < f < 0.7$, металл о металл $0.15 < f < 0.25$. Все сказанное относится к так называемому "сухому трению", т.е. трению, не зависящему от скорости движения. Для сил трения в самом общем случае существует большое число экспериментальных и теоретических зависимостей.

19.2 Трение качения

Рассмотрим цилиндр, покоящийся на горизонтальной плоскости, когда на него действует горизонтальная сила Q; кроме неё действуют сила тяжести P, а также нормальная реакция N и горизонтальная реакция плоскости (сила сцепления с плоскостью) F_c. Заметим, гладкая плоскость не имеет силы F_c, а N имеется всегда при наличии контакта.

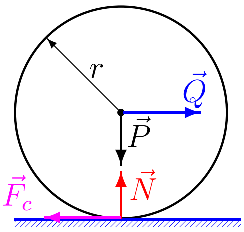


Рис. 38

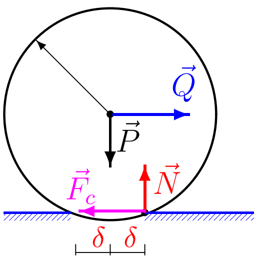


Рис. 39

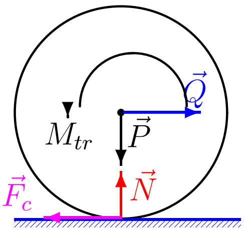


Рис. 40

Как показывает опыт, при достаточно малом модуле силы Q цилиндр остаётся в покое. Но этот факт нельзя объяснить, если удовлетвориться введением сил, изображенных на рис. 38. Согласно этой схеме равновесие невозможно, так как величина главного момента всех сил, действующих на цилиндр равна $-Qr$, т.е. отлична от нуля. Для устранения отмеченного несоответствия с опытом необходимо отказаться от гипотезы абсолютно твердого тела и учесть, что в действительности цилиндр и плоскость вблизи точки контакта деформируется и существует некоторая *площадка контакта* конечной ширины 2δ. Если под действием внешних сил цилиндр будет катится направо, то реакция опоры будет также смещена направо. Цилиндр будет катиться направо, поворачиваясь в каждый момент вокруг некоторой точки плоскости, к которой приложены реакции N и F_c (рис. 39). Считая деформацию малой, заменим эту систему сил системой, изображенной на рис. 40. К цилиндру приложена пара сил с моментом $M_{tr} = N\delta$. Этот момент называется **моментом силы трения качения**. Коэффициент трения δ качения имеет размерность длины.

20 Центры тяжести простейших фигур

20.1 Центр тяжести треугольника

Центр тяжести треугольника с вершинами A, B, C находится в точке пересечения его медиан.

$$x_o = (x_A + x_B + x_C)/3, \quad y_o = (y_A + y_B + y_C)/3.$$

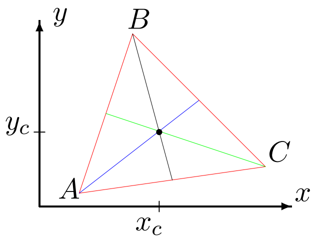
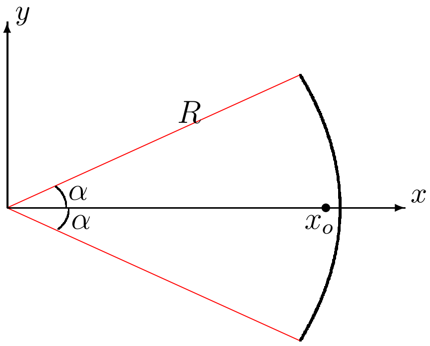


Рис. 41

20.2 Центр тяжести дуги окружности

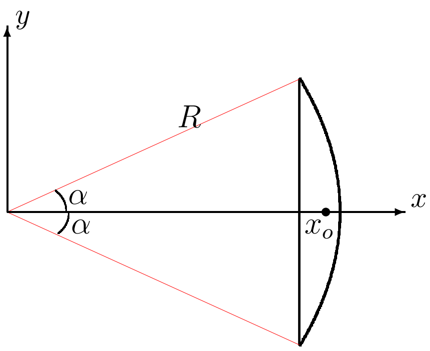


$$x_c = \frac{R \sin \alpha}{\alpha}$$

Рис. 42

В частности, для дуги полуокружности будем иметь $x_c = \frac{2R}{\pi}$

20.3 Центр тяжести кругового сектора



$$x_c = \frac{2R \sin \alpha}{3\alpha}$$

Рис. 43

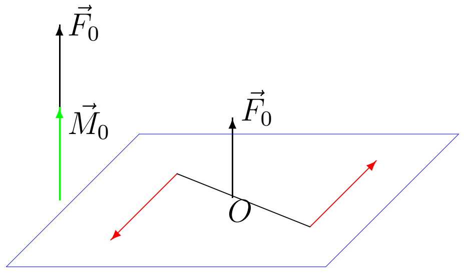
В частности, для сектора в виде полукруга получим $x_c = \frac{4R}{3\pi}$

21 Динама

Второй статистический инвариант:

$$I_2 = \vec{F_O} \cdot \vec{M_O} = F_x M_x + F_y M_y + F_z M_z \tag{15}$$

Определение. Совокупность силы и пары сил с моментом, коллинеарным силе, называется динамическим винтом или динамой. Динамический винт представляет собой совокупность силы и пары сил, действующей в плоскости, перпендикулярной силе.



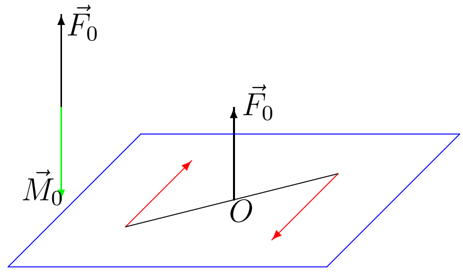


Рис. 44 Рис. 45

Если второй статический инвариант не равен нулю, то систему можно привести к динаме.

Условие коллинеарности главного вектора и главного момента записывается следующим образом:

$$pF_O = M^*$$

где p — параметр (шаг) винта, имеющий размерность длины. Таким образом,

$$p\vec{F_O} = \vec{M_O} - O\vec{O^*} \times \vec{F_O} \tag{16}$$

Пусть $F_x, F_y, F_z, M_{Ox}, M_{Oy}, M_{Oz}$ — проекции главного вектора и главного момента на оси x, y, z

$$\frac{M_{Ox} - (yF_z - zF_y)}{F_x} = \frac{M_{Oy} - (zF_x - xF_z)}{F_y} = \frac{M_{Oz} - (xF_y - yF_x)}{F_z} = p. \tag{17}$$

Это и есть уравнение центральной оси.

22 Кинематика. Введение

Кинематика — наука о движении геометрических тел. В ней рассматривается само движение без изучения причин, вызывающих это движение. Впервые термин “кинематика"ввел А.Ампер (1775–1836), взяв за основу греческое [1] слово $\kappa\iota\nu\eta\mu\alpha$, означающее движение.

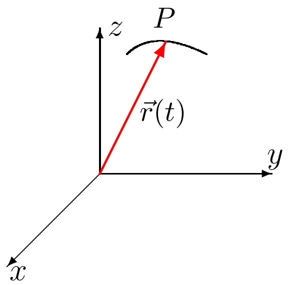
Простейшим объектом в кинематике является точка. В кинематике точки рассматриваются следующие функции времени t: радиус-вектор $\vec{r}(t)$, скорость $\vec{v}(t)$ и ускорение $\vec{a}(t)$:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}, \quad \vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2}.$$

[1] *Андре Мари Ампер* — французский физик, механик, математик.

23 Способы задания движения

23.1 Векторный способ задания движения



Положение движущейся материальной точки можно задать вектором $\vec{r} = \vec{OP}$, изменяющимся с течением времени по величине и по направлению относительно некоторой системы осей Ox, y, z. Этот вектор называется **радиус-вектором точки**.

Рис. 46

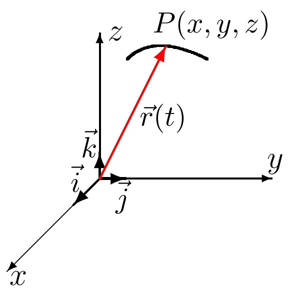
Уравнение $\vec{r} = \vec{r}(t)$ называется *уравнением движения точки*.

Геометрическое место концов радиус-векторов $\vec{r}(t)$ называется *траекторией точки* P. Скорость $\vec{V}$ и ускорение $\vec{a}$ точки P определяются как первая и вторая производные радиуса-вектора точки P по времени:

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} \tag{18}$$

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d\vec{V}}{dt} \tag{19}$$

23.2 Координатный способ задания движения



Координаты движущейся точки в выбранной системе выражаются как функции времени. Система координат может быть произвольной. Наиболее часто используются декартовы прямоугольные координаты, полярные координаты, сферические, цилиндрические. Для декартовых прямоугольных координат задают три независимые функции времени

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t).$$

Эти уравнения называются уравнениями движения точки в декартовой системе координат.

Рис. 47

Скорость и ускорение точки P при таком способе задания движения определяются следующими выражениями:

$$\vec{V} = V_x\vec{i} + V_y\vec{j} + V_z\vec{k} \tag{20}$$

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} \tag{21}$$

$$V_x = \frac{dx}{dt}; V_y = \frac{dy}{dt}; V_z = \frac{dz}{dt} \tag{22}$$

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dV_x}{dt};\ a_y = \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dV_y}{dt};\ a_z = \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{dV_z}{dt}. \tag{23}$$

Модули скорости и ускорения точки P равны:

$$V = |\vec{V}| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}, \quad a = |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \tag{24}$$

23.3 Естественный способ задания движения

Движение точки определяется заданием ее *траектории и уравнения движения* по этой траектории. (Пример: расписание движения поездов по железной дороге.) Уравнение движения точки по траектории при естественном способе движения имеет вид: $s = s(t)$. Здесь s — взятая с соответствующим знаком длина дуги, отсчитываемая вдоль траектории от начала отсчета O на траектории до точки M.

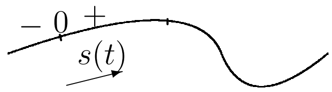


Рис. 48

Рис. 49

Рассмотрим на траектории движения точки три последовательных ее положения: точки M, M_1 и M_2.

Если точка M_1 занимает бесконечно близкое положение по отношению к точке M, то отрезок MM_1 в пределе определит положение **касательной** к кривой в точке M.

Если траектория не является прямой линией, то три точки M, M_1 и M_2 определяют некоторую плоскость. Плоскость, занимающая предельное положение, когда точки M_1 и M_2 стремятся к точке M, называется **соприкасающейся плоскостью**. Касательная к кривой, построенная в точке M, лежит в этой плоскости.

В общем случае три точки M, M_1 и M_2 (при стремлении M_1 и M_2 к точке M) однозначно определяют окружность в соприкасающейся плоскости, называемую **окружностью кривизны** или **кругом кривизны**. Радиус этой окружности называется **радиусом кривизны**.

Хорды MM_1 и M_1M_2 при неограниченном приближении точек M_1 к M и M_2 к M_1 определят касательные к кривой в точках M и M_1, соответственно, а следовательно, и направление скоростей в этих точках ($\vec{v}$ и $\vec{v}_1$).

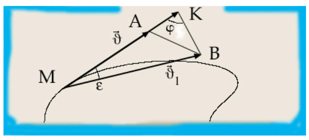


Рис. 50

Перенесем вектор скорости $\vec{v}_1$ в точку M. Два вектора определят плоскость. При неограниченном стремлении точки $_1$ к M эта плоскость будет *соприкасающейся*.

Геометрическая величина вектора $\overline{AB}$ определяется из равенства:

$$\overline{AB} = \overline{AK} + \overline{KB} \tag{25}$$

Точки K и B находятся на одной и той же окружности с центром в точке M. Разделим это равенство на Δt:

$$\frac{\overline{AB}}{\Delta t} = \frac{\overline{AK}}{\Delta t} + \frac{\overline{KB}}{\Delta t} \tag{26}$$

Отношение $\dfrac{\overline{AB}}{\Delta t}$ равно среднему ускорению точки M за время Δt. Ускорение точки M является предельным значением среднего ускорения, когда Δt стремится к нулю.

Рассмотрим вектор $\dfrac{\overline{AK}}{\Delta t}$, который направлен по касательной к траектории. Предельное значение модуля этого вектора называется **касательной** или **тангенциальной составляющей ускорения** точки и имеет вид:

$$a_\tau = \lim_{\Delta t \to \infty} \left| \frac{\overline{AK}}{\Delta t} \right| = \lim_{\Delta t \to \infty} \frac{||\vec{v_1}| - |\vec{v}||}{\Delta t} = \frac{d|\vec{v}|}{dt} \tag{27}$$

Можно также рассматривать вектор касательного ускорения $\vec{a_\tau}$, направление которого совпадает с направлением скорости точки, а величина равна производной от модуля скорости точки.

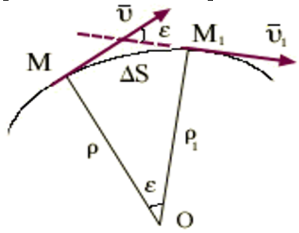


Рис. 51

Обозначим через ε угол между векторами $\vec{v}$ и $\vec{v_1}$. Тогда для предельного значения модуля вектора $\left|\frac{\overline{AB}}{\Delta t}\right|$ получим:

$$\lim_{\Delta t \to \infty} \left| \frac{\overline{KB}}{\Delta t} \right| = \lim_{\Delta t \to \infty} \frac{v_1 \varepsilon}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to \infty} \frac{v_1}{\Delta t} \frac{\Delta S}{\rho} = \lim_{\Delta t \to \infty} \frac{v_1}{\rho} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{v^2}{\rho} \tag{28}$$

Здесь ΔS — длина дуги MM_1. Предельное значение отрезка MO, когда точка M_1 неограниченно приближается к M, называется радиусом кривизны траектории в точке M.

$$\rho = \lim_{M_1 \to M} \left| \frac{\Delta S}{\varepsilon} \right| \tag{29}$$

Угол φ определяется выражением $\varphi = \dfrac{\varepsilon - \pi}{2}$. Предельное значение этого угла при $\Delta t \to 0$ равно $\dfrac{\pi}{2}$. Предельное значение вектора $\dfrac{\overline{KB}}{\Delta t}$обозначим через $\vec{a_n}$:

$$\vec{a_n} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overline{KB}}{\Delta t} \tag{30}$$

Модуль этого вектора равен $\dfrac{v^2}{\rho}$, а сам вектор находится в соприкасающейся плоскости и направлен ортогонально к скорости точки в сторону вогнутости траектории по **главной нормали**. Поэтому вектор $\vec{a_n}$ называют нормальным ускорением точки.

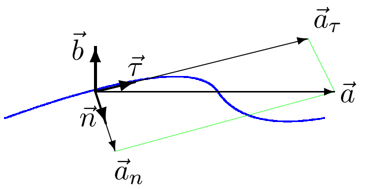


Рис. 52

Рассмотрим систему осей координат с началом в точке M. Ось $\vec{\tau}$ направим по касательной к траектории точки, ось $\vec{n}$ — по направлению главной нормали, а третью ось $\vec{\beta}$ — так, чтобы тройка этих векторов образовала правую систему. Выбранные так оси представляют собой сопровождающий трехгранник, который называют также **естественным трехгранником**.

Проекции ускорения на оси естественного трехгранника равны:

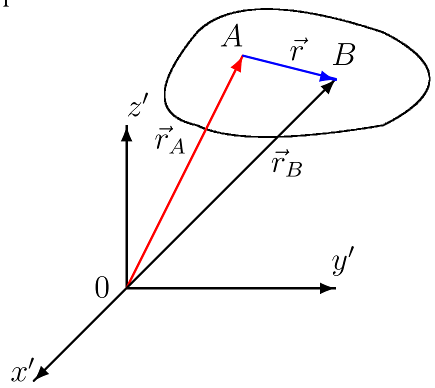
$$a_\tau = \frac{dv}{dt};\ a_n = \frac{v^2}{\rho};\ a_\beta = 0 \tag{31}$$

24 Кинематика абсолютно твердого тела

24.1 Распределение скоростей в абсолютно твердом теле

Определение. *Абсолютно твердым телом (А.Т.Т.) называют такую систему материальных точек, расстояния между двумя любыми точками которой остаются всегда неизменными.*

Движение тела в кинематике начинают изучать с поступательного и вращательного движения. Во вращательном движении вводятся понятия угла поворота тела $\varphi(t)$, угловой скорости и углового ускорения.



Последние две величины векторные, но для вращательного движения их направление всегда постоянно — по оси вращения. Поэтому в решении часто используются скалярные величины $\omega_z(t) = \dot{\varphi}(t)$, $\varepsilon_z(t) = \dot{\omega}_z(t)$, имеющие смысл проекций этих векторов на ось вращения z. Точкой будем обозначать производную по времени. Рассмотрим, как распределяются скорости точек движущегося произвольно А.Т.Т

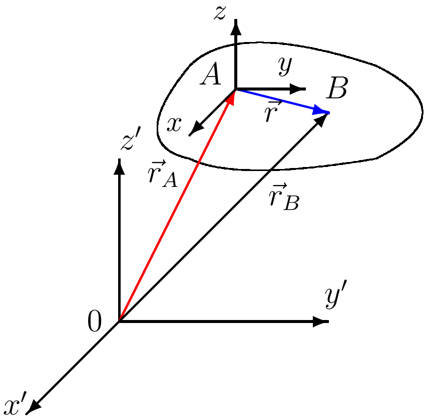
Рис. 53

Скорости точек A и B твердого тела можно записать как $\vec{V}_A = \dfrac{d\vec{r}_A}{dt}$ и $\vec{V}_B = \dfrac{d\vec{r}_B}{dt}$

Но $\vec{OB} = \vec{OA} + \vec{AB}$ и $\dfrac{d(\vec{OB})}{dt} = \dfrac{d(\vec{OA})}{dt} + \dfrac{d(\vec{AB})}{dt}$, следовательно $\vec{V}_B = \vec{V}_A + \dfrac{d(\vec{AB})}{dt}$.

Назовем $\dfrac{d(\vec{AB})}{dt} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$ скоростью точки относительно точки A: $\vec{V}_{A/B}$

$$\vec{V}_{A/B} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})$$



$Axyz$ — система координат, жестко связанная с твердым телом; xyz — проекции вектора $\vec{r}$ на оси связанной системы. Так как x, y, z — константы,

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = x\frac{d\vec{i}}{dt} + y\frac{d\vec{j}}{dt} + z\frac{d\vec{k}}{dt}$$

Рис. 54

Найдем проекции $\dfrac{d\vec{r}}{dt}$ на подвижные оси $Axyz$. *Проекция на ось x:*

$$\frac{d\vec{r}}{dt}|_x = \frac{d\vec{r}}{dt}\cdot\vec{i} = x\frac{d\vec{i}}{dt}\cdot\vec{i} + y\frac{d\vec{j}}{dt}\cdot\vec{i} + z\frac{d\vec{k}}{dt}\cdot\vec{i} = y\frac{d\vec{j}}{dt}\cdot\vec{i} + z\frac{d\vec{k}}{dt}\cdot\vec{i} \tag{32}$$

Проекция на ось y:

$$\frac{d\vec{r}}{dt}|_y = \frac{d\vec{r}}{dt}\cdot\vec{j} = x\frac{d\vec{i}}{dt}\cdot\vec{j} + y\frac{d\vec{j}}{dt}\cdot\vec{j} + z\frac{d\vec{k}}{dt}\cdot\vec{j} = x\frac{d\vec{i}}{dt}\cdot\vec{j} + z\frac{d\vec{k}}{dt}\cdot\vec{j} \tag{33}$$

Проекция на ось z:

$$\frac{d\vec{r}}{dt}|_z = \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \vec{k} = x\frac{d\vec{i}}{dt} \cdot \vec{k} + y\frac{d\vec{j}}{dt} \cdot \vec{k} + z\frac{d\vec{k}}{dt} \cdot \vec{k} = x\frac{d\vec{i}}{dt} \cdot \vec{k} + y\frac{d\vec{j}}{dt} \cdot \vec{k} \tag{34}$$

В выражениях было учтено, что скалярное произведение $\frac{d\vec{q}}{dt} \cdot \vec{q}$ равно 0 , так как

$$\vec{q} \cdot \vec{q} = 1 \Longrightarrow \frac{d\vec{q}}{dt} \cdot \vec{q} + \vec{q} \cdot \frac{d\vec{q}}{dt} = 0 \Longrightarrow 2\frac{d\vec{q}}{dt} \cdot \vec{q} = 0 \Longrightarrow \frac{d\vec{q}}{dt} \cdot \vec{q} = 0$$

Далее отметим, что

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = 0 \Longrightarrow \frac{d\vec{i}}{dt} \cdot \vec{j} + \vec{i} \cdot \frac{d\vec{j}}{dt} = 0 \Longrightarrow \frac{d\vec{i}}{dt} \cdot \vec{j} = -\vec{i} \cdot \frac{d\vec{j}}{dt} \tag{35}$$

С учетом (35) введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \omega_x &= \frac{d\vec{j}}{dt} \times \vec{k} = -\frac{d\vec{k}}{dt} \times \vec{j}; \\ \omega_y &= \frac{d\vec{k}}{dt} \times \vec{i} = -\frac{d\vec{i}}{dt} \times \vec{k}, \\ \omega_z &= \frac{d\vec{i}}{dt} \times \vec{j} = -\frac{d\vec{j}}{dt} \times \vec{i} \end{aligned} \tag{36}$$

Тогда выражения (32-33) можно переписать:

Проекция на ось x:

$$\frac{d\vec{r}}{dt}|_x = \omega_y z - \omega_z y$$

Проекция на ось y:

$$\frac{d\vec{r}}{dt}|_y = \omega_z x - \omega_x z; \tag{37}$$

Проекция на ось z:

$$\frac{d\vec{r}}{dt}|_z = \omega_x y - \omega_y x$$

Рассмотрим векторное произведение $\vec{\omega} \times \vec{r}$, где в качестве компонент вектора $\vec{\omega}$ возьмем $\omega_x, \omega_y, \omega_z$:

$$\vec{\omega} \times \vec{r} = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{pmatrix} = \vec{i}(\omega_y z - \omega_z y) + \vec{j}(\omega_z x - \omega_x z) + \vec{k}(\omega_x y - \omega_y x) \tag{38}$$

Сравнивая (37) и (38), получаем $\dfrac{d\vec{r}}{dt} = \vec{V}_{A/B} = \vec{\omega} \times \vec{r}$. Построенный таким образом вектор $\vec{\omega}$ является единственным и не зависит от выбора точки A, называемой полюсом.

Определение. *Вектор $\vec{\omega}$, проекции которого определяются формулами (36) называется вектором угловой скорости твердого тела.*

В итоге получаем $\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{\omega} \times \vec{AB}$. Эта формула называется основной формулой кинематики А.Т.Т. и выражает **Теорему о распределении скоростей при движении абсолютно твердого тела.**

Скорость произвольной точки А.Т.Т. равняется геометрической сумме вектора скорости полюса и скорости точки во вращении вокруг полюса.

24.2 Теорема о независимости угловой скорости от выбора полюса

Теорема. Угловая скорость абсолютно твердого тела не зависит от выбора полюса.

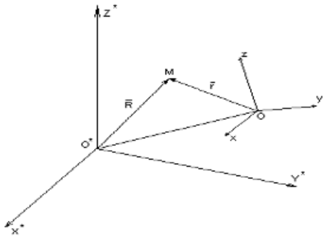


Рис. 55

Доказательство.

Предположим, что это не так, т.е. $\vec{\omega}_A \neq \vec{\omega}_B$.
По теореме о распределении скоростей в твердом теле (с. 24)

$$\vec{V}_M = \vec{V}_A + \vec{\omega}_A \times \vec{AM} \tag{39}$$
$$\vec{V}_M = \vec{V}_B + \vec{\omega}_B \times \vec{BM} \tag{40}$$

Но $\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{\omega}_A \times \vec{AB}$. Подставим это выражение в (40) :

$$\vec{V}_M = \vec{V}_A + \vec{\omega}_A \times \vec{AB} + \vec{\omega}_B \times \vec{BM} \tag{41}$$

Из (39) и (41) следует $\vec{\omega}_A \times \vec{AM} = \vec{\omega}_A \times \vec{AB} + \vec{\omega}_B \times \vec{BM}$ или $\vec{\omega}_A \times (\vec{AM} - \vec{AB}) - \vec{\omega}_B \times \vec{BM} = 0$. Но $\vec{AM} = \vec{AB} + \vec{BM}$, следовательно $\vec{\omega}_A \times \vec{BM} - \vec{\omega}_B \times \vec{BM} = 0$ или $(\vec{\omega}_A - \vec{\omega}_B) \times \vec{BM} = 0$.
Поэтому $\vec{\omega}_A = \vec{\omega}_B$. *Что и требовалось доказать.*

24.3 Поступательное движение

Определение. Движение А.Т.Т. называется поступательным если любой отрезок проведенный в теле движется параллельно своему первоначальному положению.
Теорема. (о поступательном движении тела) При поступательном движении А.Т.Т. траектории всех его точек при наложении совпадают, а скорость и ускорение всех точек А.Т.Т. равны между собой.

Доказательство.

Проведем в теле произвольный отрезок AB. Точки A и B произвольные.

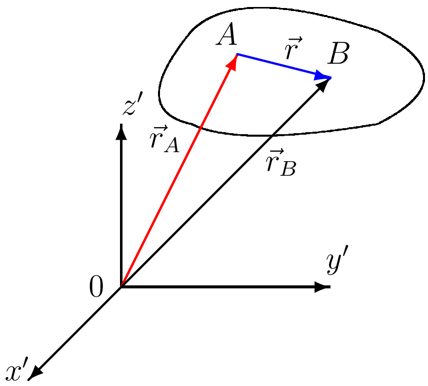


Рис. 56

Согласно определению траектория точки B получается из траектории точки смещением на постоянный вектор $\vec{AB}$. Следовательно траектории точек и совпадают при наложении. *Найдем скорости и ускорения.*

$$\vec{V}_A = \frac{d\vec{r}_A}{dt}; \vec{V}_B = \frac{d\vec{r}_B}{dt} \vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{AB} \Longrightarrow \frac{d\vec{r}_B}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} + \frac{d\vec{AB}}{dt}$$

По определению поступательного движения $\dfrac{d(\vec{AB})}{dt} = 0$
Следовательно

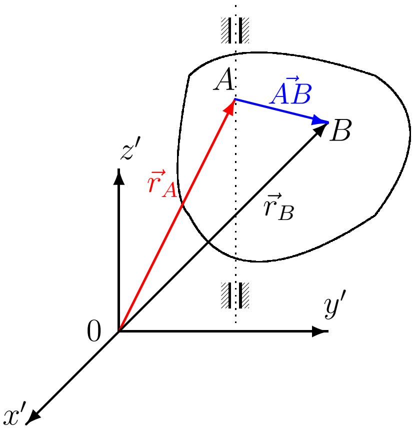
$$\vec{V}_B = \vec{V}_A \tag{42}$$

Дифференцируя (42) по времени, находим

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A \tag{43}$$

Что и требовалось доказать.
При поступательном движении A.Т.Т. достаточно знать (или задать) движение одной точки этого тела. Примером поступательного движения может служить движение кабины "Чертова колеса".

24.4 Вращение абсолютно твердого тела вокруг неподвижной оси



Определение. Вращением тела вокруг неподвижной оси называется такое движение, при котором какие-либо две точки тела остаются неподвижными. Можно показать, что при этом все точки на оси, проходящей через две закрепленные точки, остаются неподвижными. Пусть твердое тело вращается вокруг неподвижной оси. Выберем произвольную точку A на неподвижной оси. Для любой точки B, находящейся не на оси, имеем (см. Распределение скоростей в абсолютно твердом теле)

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{\omega} \times \vec{AB} \tag{44}$$

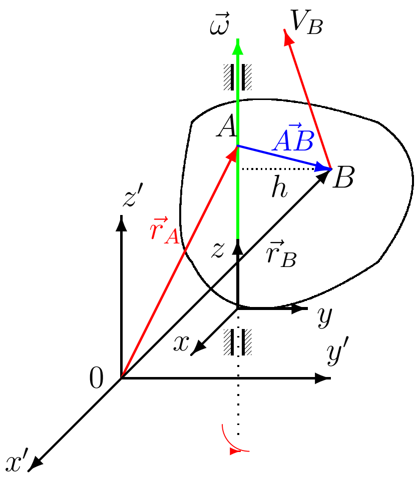
Рис. 57
Но $V_A = 0$ по построению. Следовательно,

$$\vec{V}_B = \vec{\omega} \times \vec{AB} \tag{45}$$

(формула Эйлера). Построим связанную с телом систему координат в точке A. Ось Az неподвижна и направлена по неподвижной оси; $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ — единичные векторы, направленные вдоль осей связанной системы.

Тогда согласно раздела (см. Распределение скоростей в абсолютно твердом теле имеем следующие значения составляющих угловой скорости:

$$\omega_x = -\frac{d\vec{k}}{dt} \cdot \vec{j} = 0; \quad \omega_y = \frac{d\vec{k}}{dt} \cdot \vec{i} = 0; \quad \omega_z = \frac{d\vec{i}}{dt} \cdot \vec{j} = -\frac{d\vec{j}}{dt} \cdot \vec{i} \quad \text{т.е. ,} \quad \vec{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_z \end{pmatrix} \tag{46}$$



Следовательно, вектор угловой скорости вращения направлен по оси вращения. Скорость точки B направлена перпендикулярно плоскости, проходящей через векторы $\vec{\omega}$ и $\vec{AB}$. Значение этой скорости (согласно определению векторного произведения) равно:

$$|\vec{V}_B| = |\vec{\omega}| \cdot |\vec{AB}| \cdot \sin(\widehat{\vec{\omega}, \vec{AB}}) = \omega_z \cdot h \qquad (47)$$

т.е., произведению модуля угловой скорости вращения на расстояние от точки B до оси вращения.

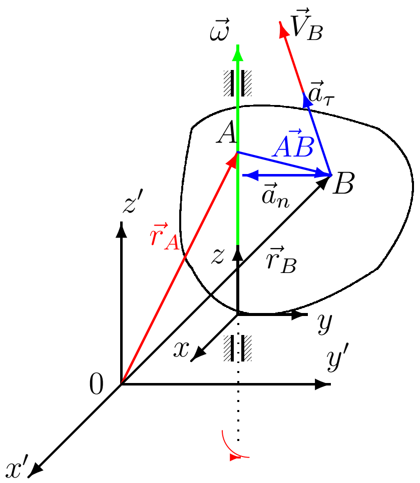
Рис. 58

С учетом того, что точка A находится на неподвижной оси, ускорение точки B определяется выражением:

$$\frac{d\vec{V}_B}{dt} = \frac{d}{dt}\vec{\omega} \times \vec{AB} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{AB} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{AB}}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{AB} + \vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times \vec{AB}] \qquad (48)$$

Вектор $\vec{\varepsilon} = \dfrac{d\vec{\omega}}{dt}$ называется вектором углового ускорения. Окончательно имеем:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}_B}{dt} = \vec{\varepsilon} \times \vec{AB} + \vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times \vec{AB}] = \vec{a_\tau} + \vec{a_n} \qquad (49)$$



В выражении (49) a_τ называется *вращательным* ускорением в точке B, направление которого совпадает с направлением скорости точки B, a_n называется *осестремительным* ускорением в точке B и направлен к оси вращения.

Рис. 59

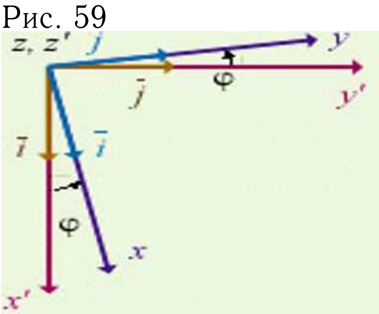


Рис. 60

Вычислим значение $\omega_z = \dfrac{d\vec{i}}{dt} \cdot \vec{j}$ как функцию угла поворота осей x и y вокруг неподвижной оси z. Так как

$$\vec{i} = \cos\varphi \cdot \vec{i'} + \sin\varphi \cdot \vec{j'} \qquad (50)$$

$$\vec{j} = -\sin\varphi \cdot \vec{i'} + \cos\varphi \cdot \vec{j'} \qquad (51)$$

$$\omega_x = [-\sin\varphi \cdot \dot{\varphi} \cdot \vec{i'} + \cos\varphi \cdot \dot{\varphi} \cdot \vec{j'}] \times [-\sin\varphi \cdot \vec{i'} + \cos\varphi \cdot \vec{j}] = \dot{\varphi} \qquad (52)$$

т.е. $\omega_z = \dot{\varphi}$, тогда модуль вектора углового ускорения равен $\varepsilon = \varphi''$

24.5 Плоское движение. Мгновенный центр скоростей

Определение. Плоским движением абсолютно твердого тела называется такое движение, при котором любая точка тела остается в плоскости, параллельной некоторой заданной плоскости. При этом достаточно рассматривать движение сечения твердого тела, которое параллельно некоторой плоскости: все остальные сечения движутся так же. Само тело вовсе не обязательно должно быть плоским. Говорить о скорости тела или его ускорении в общем случае не имеет смысла: тело состоит из множества точек, каждая из которых может иметь свою скорость и ускорение. Исключение составляет поступательное движение тела, при котором равны скорости и ускорения всех точек. Кроме того, в некоторых задачах иногда говорят, например, о скорости катящегося цилиндра или о скорости автомобиля, подразумевая при этом скорость точек центральной оси цилиндра или скорость кузова автомобиля, принимая его за точку.

Угловая скорость и ускорение для плоского движения — векторные величины, но их направления всегда перпендикулярны плоскости движения. Введем декартову систему координат, в которой плоскость xy совпадает с плоскостью движения. Тогда угловая скорость $\vec{\omega}$ и ускорение $\vec{\varepsilon}$ направлены вдоль оси z. В решении задач удобно использовать скалярные величины — проекции этих векторов на ось z: ω_z и ε_z. Индекс z иногда будем опускать.

Рассмотрим движение некоторого сечения абсолютно твердого тела (плоской фигуры), которое параллельно плоскости экрана (предполагается, что Вы работаете с плоским экраном!).

Для любой точки B рассматриваемого сечения имеет место

$$\vec{V_B} = \vec{V_A} + \vec{\omega} \times \vec{AB}$$

При этом вектор угловой скорости направлен перпендикулярно плоскости экрана:

$$\vec{\omega} = 0 \cdot \vec{i} + 0 \cdot \vec{j} + \omega_z \cdot \vec{k}$$

Определение. *Мгновенным центром скоростей* плоской фигуры называется точка на плоскости, связанной с этой фигурой, скорость которой в данный момент времени равняется нулю.

Теорема. Если угловая скорость плоской фигуры не равна нулю, то мгновенный центр скоростей всегда существует и определяется единственным образом.

24.5.1 Доказательство существования МЦС

А.

1. Если скорость произвольной точки A в данный момент времени равна нулю, то эта точка — мгновенный центр скоростей.

2. Если $\vec{V_A} \neq 0$, рассмотрим некоторую точку P. Для скорости точки имеем $\vec{V_P} = \vec{V_A} + \vec{\omega} \times \vec{AP}$ Выберем $\vec{AP} = \dfrac{\vec{\omega} \times \vec{V_A}}{\omega^2}$ тогда:

$$\vec{V_P} = \vec{V_A} + \vec{\omega} \times \frac{\vec{\omega} \times \vec{V_A}}{\omega^2} = \vec{V_A} + \frac{1}{\omega_z^2}[\vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times \vec{V_A}]] \qquad (53)$$

Используя свойство двойного векторного умножения перепишем (53) как:

$$\vec{V_P} = \vec{V_A} + \frac{1}{\omega_z^2}(\vec{\omega} \cdot (\vec{\omega} \cdot \vec{V_A})) - \vec{V_A} \cdot (\vec{\omega} \cdot \vec{\omega}) \qquad (54)$$

И поскольку вектор $\vec{\omega}$ перпендикулярен вектору $\vec{V_A}$, последнее выражение примет вид:

$$\vec{V_P} = \vec{V_A} + \frac{1}{\omega_z^2}(-\vec{V_A} \cdot \omega_z^2) = \vec{V_A} - \vec{V_A} = 0$$

Таким образом, $\vec{V_P} = 0$, а точка P — мгновенный центр скоростей. Модуль вектора $\vec{AP}$ можно вычислить:

$$AP = \frac{1}{\omega_z^2}|\vec{\omega}| \cdot |\vec{V_A}| \cdot \sin\frac{\pi}{2} = \frac{|\vec{V_A}|}{\omega_z} \quad (55)$$

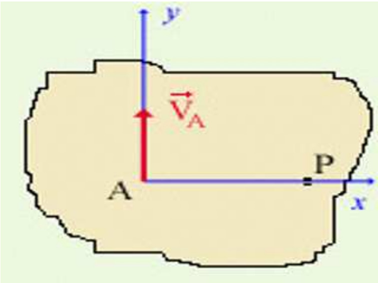


Рис. 61

В.

Для некоторой точки A, скорость которой не равна нулю, введем систему координат так, что ось Ay направлена по вектору $\vec{V_A}$. Тогда имеем: $V_{Ax} = 0$ и $V_{Ay} = |\vec{A}| > 0$ Выберем на оси Ax точку P. Ее координаты: $(x, 0)$. Скорость точки P:

$$\vec{V_P} = \vec{V_A} + \vec{\omega} \times \vec{AP} = V_A \cdot \vec{j} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega_z \\ x & 0 & 0 \end{vmatrix} = V_A \cdot \vec{j} + \omega_z \cdot x \cdot \vec{j} = (V_A + \omega_z \cdot x) \cdot \vec{j} \quad (56)$$

Если $x = -\dfrac{V_{Ax}}{\omega_z}$, то $V_p = 0$ что и требовалось доказать.

Для нахождения мгновенного центра скоростей нужно повернуть вектор скорости точки на 90 градусов по направлению вращения тела и на полученном луче отложить отрезок $AP = \left|\dfrac{V_A}{\omega_z}\right|$.

24.5.2 Доказательство единственности МЦС

Предположим, что мгновенных центров скоростей у тела — два, т.е., имеем $\vec{V_P} = 0$ и $\vec{V_k} = 0$. Тогда для любой точки будем иметь $\vec{V_C} = \vec{V_P} + \vec{\omega} \times \vec{PC} = \vec{V_K} + \vec{\omega} \times \vec{KC}$, следовательно $\vec{\omega} \times \vec{PC} = \vec{\omega} \times \vec{KC}$. Тогда $\vec{\omega} \times (\vec{PC} - \vec{KC}) = 0$ и $\vec{PC} - \vec{KC} = 0$. Значит $\vec{PC} = \vec{KC}$, что и требовалось доказать.

24.6 Распределение скоростей при плоском движении

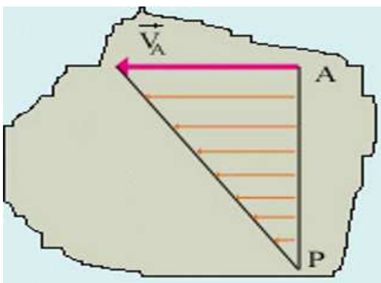


Рис. 62

Если точка — мгновенный центр скоростей, то для некоторой точки имеем:

$$\vec{V_A} = \vec{V_P} + \vec{\omega} \times \vec{PM} \quad (57)$$

И с учетом того, что $\vec{V_P} = 0$ скорость точки определяется выражением:

$$\vec{V_A} = \vec{\omega} \times P\vec{M} \tag{58}$$

Если $\vec{\omega} \neq 0$, то в каждый момент времени распределение скоростей плоской фигуры такое же, как и при вращательном движении вокруг оси, проходящей через мгновенный центр скоростей: скорости точек плоской фигуры перпендикулярны отрезкам, соединяющим эти точки с мгновенным центром скоростей, а величины скоростей пропорциональны расстояниям от этих точек до мгновенного центра скоростей:

$$V_A = \omega_z \cdot AP \tag{59}$$

24.7 Методы расчета кинематики плоского движения

Скорость точки B тела при плоском движении вычисляют через известную скорость какой-либо точки A того же тела, принимаемой за полюс (рис. 71):

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}, \quad \vec{v}_{BA} = \vec{\omega}_1 \times \vec{AB}. \tag{60}$$

Ускорения точек тела при плоском движении связаны формулой[2]

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\varepsilon} \times \vec{AB} + \vec{\omega} \times \vec{v}_{BA}. \tag{61}$$

1. Метод графов. Для расчета скоростей точек многозвенного механизма, каждое звено которого совершает плоское движение, формулу (72) применяют последовательно для всех точек, переходя от одной точки, принимаемой за полюс, к другой. Схему вычислений в этом случае удобно записывать в виде структурных формул (графов [9]):

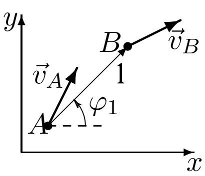


Рис. 63

$$A \xrightarrow[\varphi_1]{1} B, \tag{62}$$

где над стрелкой указан номер тела или наименование стержня, которому принадлежат точки, а снизу — угол φ между осью x и вектором $\vec{AB}$. В проекциях на оси x, y граф (62) дает уравнения

$$\begin{aligned} v_{Bx} &= v_{Ax} - AB\,\omega_{1z} \sin\varphi_1, \\ v_{By} &= v_{Ay} + AB\,\omega_{1z} \cos\varphi_1, \end{aligned} \tag{63}$$

где ω_{1z} — проекция угловой скорости тела 1 на ось z, перпендикулярную плоскости движения. Если вращение происходит против часовой стрелки, то $\omega_{1z} = |\omega_1|$, а если по часовой стрелке, то $\omega_{1z} = -|\omega_1|$.

В качестве вершин графа удобно брать точки механизма с заданными или искомыми скоростями. При этом скорость может быть задана частично, например только по направлению. Если в задаче имеется тело (обычно диск или цилиндр), катящееся без проскальзывания по какой-либо поверхности, то точка касания тела может быть вершиной графа, так как скорость ее равна нулю.

Для многозвенного механизма (рис. 64) из графов вида (62) можно образовать цепочку

$$A \xrightarrow[\varphi_1]{1} B \quad \xrightarrow[\varphi_2]{2} C \quad \xrightarrow[\varphi_3]{3} D,$$

особенно удобную для связи скоростей $\vec{v}_A$ и $\vec{v}_D$, в тех случаях, когда скорости промежуточных точек B и C в задачу не входят.

[2]Формула Ривальса.

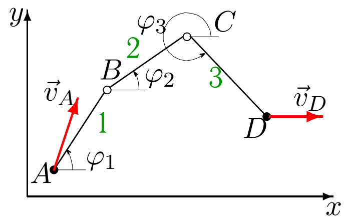


Рис. 64

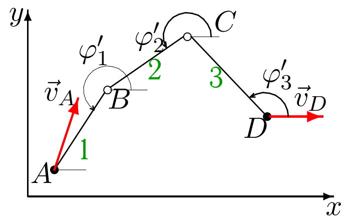


Рис. 65

В проекциях на оси этот граф дает соотношения:

$$v_{Dx} = v_{Ax} - AB\,\omega_{1z} \sin\varphi_1 - BC\,\omega_{2z} \sin\varphi_2 - CD\,\omega_{3z} \sin\varphi_3,$$
$$v_{Dy} = v_{Ay} + AB\,\omega_{1z} \cos\varphi_1 + BC\,\omega_{2z} \cos\varphi_2 + CD\,\omega_{3z} \cos\varphi_3.$$

Многозвенный механизм можно пройти и в обратном направлении (рис. 65). Углы к направлениям стержней будут, как и ранее, отсчитываться от положительного направления оси x в начале стержня:

$$D \xrightarrow[\varphi'_3]{3} C \quad \xrightarrow[\varphi'_2]{2} B \quad \xrightarrow[\varphi'_1]{1} A,$$

где $\varphi'_k = \varphi_k + \pi$. Соотношение между скоростями точек при этом не изменится.

Вычислять *проекции* скоростей удобно с помощью *координатного* метода. Рассмотрим кривошипно-шатунный механизм (рис. **??**). Кривошип AB, вращаясь вокруг оси в подшипнике A, посредством шатуна BC сообщает возвратно-поступательное движение ползуну C. Дано: $AB = BC = l$. Силы, действующие на механизм, не указаны, для кинематического анализа они не требуются.

Пусть φ — обобщенная координата. Найдем скорость ползуна. Для этого определим его координату: $x_C = x_A + 2l\cos\varphi$. Дифференцируя это равенство, получаем $v_{xC} = -2l\dot\varphi\sin\varphi$.

Легко проверить, что этот же результат получается методом графов. Строим граф $A \xrightarrow[\varphi]{l} B \xrightarrow[-\varphi]{l} C$. Записываем оба уравнения графа в проекции на оси x и y. Вычисляем из второго уравнения графа (в проекции на y) скорость $v_{Cy} = v_{Ay} + l\dot\varphi\cos\varphi + l\omega_{3z}\cos(-\varphi)$. При $v_{Cy} = v_{Ay} = 0$ получаем отсюда интуитивно ясный результат: $\omega_{3z} = -\dot\varphi$. Стержни одинаковой длины вращаются с одинаковой угловой скоростью, но в разные стороны. Подставляем угловую скорость в первое уравнение графа,

$$v_{Cx} = v_{Ax} - l\dot\varphi\sin\varphi - l\omega_{3z}\sin(-\varphi),$$

и получаем тот же результат, но более сложным способом.

Заметим, что обычно в задачах зависимость координат от времени получается такой сложной, что продифференцировать ее можно только в системах компьютерной математики, в том числе Maple (оператор `diff`). Метод графов более универсальный — он применим для большинства задач.

3. Уравнение трех угловых скоростей. Одним из самых распространенных элементов стержневых механизмов является четырехзвенник, состоящий из трех шарнирно соединенных стержней на двух неподвижных опорах. Четвертым элементом механизма является основание, на котором он закреплен (рис. 66). Механизм приводится в движение вращеньем одного из звеньев. Найдем связь угловых скоростей звеньев. Составляем кинематический граф $A_1 \xrightarrow[\varphi_1]{1} A_2 \quad \xrightarrow[\varphi_2]{2} A_3 \quad \xrightarrow[\varphi_3]{3} A_4$.

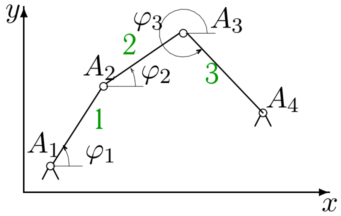


Рис. 66

Записываем уравнения графа:

$$v_{A_4x} = v_{A_1x} - l_1\,\omega_{1z}\sin\varphi_1 - l_2\,\omega_{2z}\sin\varphi_2 - l_3\,\omega_{3z}\sin\varphi_3,$$
$$v_{A_4y} = v_{A_1y} + l_1\,\omega_{1z}\cos\varphi_1 + l_2\,\omega_{2z}\cos\varphi_2 + l_3\,\omega_{3z}\cos\varphi_3.$$

Координатная форма записи этих уравнений дает уравнения трех угловых скоростей

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{3}\omega_{m_{iz}}(x_{n_i} - x_{n_{i+1}}) = 0,\\ \sum_{i=1}^{3}\omega_{m_{iz}}(y_{n_i} - y_{n_{i+1}}) = 0,\end{aligned} \tag{64}$$

где $\omega_{m_{iz}}$ — угловая скорость m_i-го звена, x_{n_i}, y_{n_i}, $x_{n_{i+1}}, y_{n_{i+1}}$ — координаты его концов.

Номера шарниров n_i, $i = 1, ..., 4$, как и номера звеньев m_i, $i = 1, ..., 3$, не обязательно должны быть последовательными числами. Если угловая скорость одного из звеньев задана, то угловые скорости двух других легко найти из полученной системы уравнений. В некоторых задачах [5] заданы все три угловые скорости, а определяется конфигурация механизма — положение звеньев, соответствующее этим угловым скоростям. В таких задачах метод МЦС не применим, метод графов в тригонометрической форме неэффективен, а уравнения трех угловых скоростей позволяют просто решить задачу.

Интересен один простой и наглядный частный случай.

Пусть $y_1 = y_4$, $y_2 = y_3$. Это означает, что четырехзвенник принимает форму трапеции (рис. 67). Из второго уравнения (64) имеем теорему трапеции, утверждающую, что *угловые скорости боковых звеньев четырехзвенника, имеющего в данный момент форму трапеции, равны:* $\omega_{1z} = \omega_{3z}$.

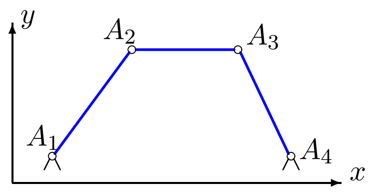


Рис. 67

Уравнения трех угловых ускорений четырехзвенника следуют непосредственно из формулы Ривальса и имеют вид

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{3}\varepsilon_{m_{iz}}(x_{n_i} - x_{n_{i+1}}) - \sum_{i=1}^{3}\omega^2_{m_{iz}}(y_{n_i} - y_{n_{i+1}}) = 0,\\ \sum_{i=1}^{3}\varepsilon_{m_{iz}}(y_{n_i} - y_{n_{i+1}}) + \sum_{i=1}^{3}\omega^2_{m_{iz}}(x_{n_i} - x_{n_{i+1}}) = 0,\end{aligned} \tag{65}$$

где $\varepsilon_{m_{iz}}$ — угловое ускорение m_i-го звена. Если угловые скорости известны, то система уравнений (65) позволяет найти угловые ускорения двух звеньев по ускорению третьего, которое часто просто равно нулю, если ведущее звено вращается равномерно. При решении имеет смысл воспользоваться совпадением определителей систем (64) и (65).

Очевидно простое обобщение уравнений трех угловых скоростей и уравнений трех угловых ускорений на большее число звеньев. Для этого достаточно изменить предел суммирования с 3 на число звеньев.

Сравнивая методы, заметим, что аналитический метод, как универсальный, имеющий простую формализацию в виде графов и дающий результат в проекциях, безусловно наиболее предпочтителен при решении задач теоретической механики.

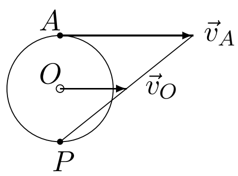


Рис. 68

Однако в некоторых очевидных случаях метод кинематических графов применять нецелесообразно. Например, при определении скорости точки A цилиндра, катящегося по неподвижной поверхности, по заданной скорости центра O (рис. 68) проще использовать понятие мгновенного центра скоростей (МЦС). Цилиндр катится без проскальзывания, поэтому точка P касания плоскости неподвижна. Следовательно, учитывая линейное распределение скоростей, получаем $v_{Ox} = v_{Ax}/2$.

24.8 Распределение ускорений при плоском движении

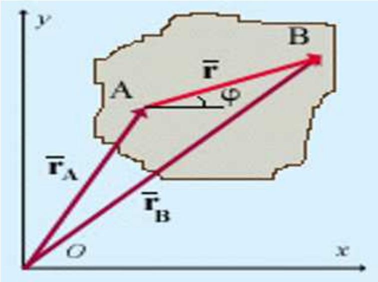


Рис. 69

Скорость точки B определяется выражением:

$$\vec{V_B} = \vec{V_A} + \vec{\omega} \times \vec{AB} \tag{66}$$

Продифференцируем по времени:

$$\frac{d\vec{V_B}}{dt} = \frac{d\vec{V_A}}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{AB} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{AB}}{dt} \tag{67}$$

В выражении $\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\varepsilon}$ — вектор углового ускорения тела. Так как $\vec{\omega} = \frac{d\varphi}{dt}\vec{k}$, то $\vec{\varepsilon} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}\vec{k} = \frac{d\omega}{dt}\vec{k}$
Размерность: $[\varepsilon] = \frac{1}{\text{с}^2}$

При плоском движении вектор углового ускорения перпендикулярен плоскости движения, а его величина равна второй производной по времени угла поворота тела вокруг полюса.

$$\frac{d\vec{AB}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{AB} \tag{68}$$

Поэтому выражение можно переписать:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\varepsilon} \times \vec{AB} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{AB}) \tag{69}$$

Учитывая, что $\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{AB}) = \vec{\omega} \cdot (\vec{\omega} \cdot \vec{AB}) - \vec{AB} \cdot (\vec{\omega} \cdot \vec{\omega}) = -\vec{AB}\omega^2$, выражение можно переписать в виде:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\varepsilon} \times \vec{AB} - \omega^2 \vec{AB} \tag{70}$$

В выражении $\vec{\varepsilon} \times \vec{AB} = \vec{a}^{\tau}_{BA}$ — касательное (вращательное) ускорение точки B относительно полюса A; ($-\omega^2 \vec{AB}) = \vec{a}^{n}_{BA}$ — нормальное (осестремительное) ускорение точки B относительно полюса A.

С учетом последних замечаний имеем:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}^{\tau}_{BA} + \vec{a}^{n}_{BA} \tag{71}$$

Формула выражает теорему о распределении ускорений при плоском движении:

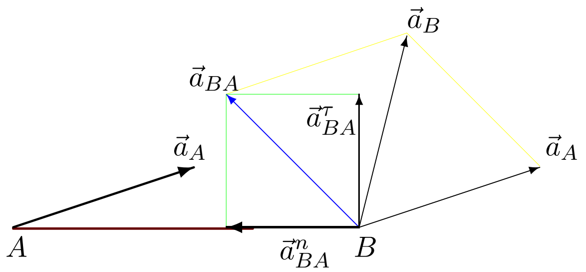


Рис. 70

Теорема. Ускорение произвольной точки тела при плоском движении равняется геометрической сумме векторов ускорения полюса, вращательного и осестремительного ускорений.

24.9 Теорема о проекциях скоростей двух точек на прямую, проходящую через эти точки

Теорема. Проекции скоростей двух точек абсолютно твердого тела на прямую, проходящую через эти точки, равны между собой.

Доказательство.

Для абсолютно твердого тела имеем:

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{\omega} \times \vec{AB}$$

Проектируем это равенство на прямую LM, проходящую через точки A и B.

$$\text{Пр}_{LM}(\vec{V}_B) = \text{Пр}_{LM}(\vec{V}_A) + \text{Пр}_{LM}(\vec{\omega} \times \vec{AB})$$

$\text{Пр}_{LM}(\vec{\omega} \times \vec{AB}) = 0$, так как вектор $\vec{\omega} \times \vec{AB}$ перпендикулярен прямой LM.

Следовательно, $\text{Пр}_{LM}(\vec{V}_B) = \text{Пр}_{LM}(\vec{V}_A)$, что и требовалось доказать.

24.10 Способы нахождения мгновенного центра скоростей

- Задан вектор скорости в точке A и прямая, вдоль которой направлен вектор скорости в точке B. Так как $\dfrac{V_A}{AP} = \dfrac{V_B}{BP} = ... = \dfrac{V_M}{MP} = \omega_z$

  а) проводим прямую перпендикулярно вектору скорости в точке A ;

  б) проводим прямую перпендикулярно направлению вектора скорости в точке B ; точка P - мгновенный центр скоростей.

  в) определяем направление вращения по направлению вектора скорости в точке A .

- Заданы векторы скоростей в точках A и B (векторы параллельны).

$$\frac{V_A}{AP} = \frac{V_B}{BP}$$

- Заданы векторы скоростей в точках A и B (векторы параллельны). Перпендикуляры к векторам скоростей в точках A и B не пересекаются, и по теореме о проекциях скоростей двух точек твердого тела на прямую, проходящую через эти точки, скорости точек равны. Т.е., движение тела поступательное.

24.11 Плоское движение. Расчет механизмов

Скорость точки B тела при плоском движении вычисляют через известную скорость какой-либо точки A того же тела, принимаемой за полюс (рис. 71):

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}, \quad \vec{v}_{BA} = \vec{\omega}_1 \times \vec{AB}. \tag{72}$$

Для расчета скоростей точек многозвенного механизма, каждое звено которого совершает плоское движение, формулу (72) применяют последовательно для всех точек, переходя

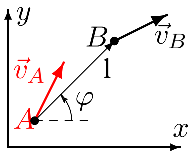


Рис. 71

от одной точки, принимаемой за полюс, к другой. Схему вычислений в этом случае удобно записывать в виде структурных формул

$$A \xrightarrow[\varphi_1]{1} B, \tag{73}$$

где над стрелкой указан номер тела или наименование стержня, которому принадлежат точки, а снизу — угол φ между осью x и вектором $\vec{AB}$. В проекциях на оси x, y граф (73) дает уравнения

$$\begin{aligned} v_{Bx} &= v_{Ax} - AB\,\omega_{1z}\sin\varphi_1, \\ v_{By} &= v_{Ay} + AB\,\omega_{1z}\cos\varphi_1, \end{aligned} \tag{3}$$

где ω_{1z} — проекция угловой скорости тела 1 на ось z, перпендикулярную плоскости движения. Если вращение происходит против часовой стрелки, то $\omega_{1z} = |\omega_1|$, а если — по часовой стрелке, то $\omega_{1z} = -|\omega_1|$.

Ускорения точек тела при плоском движении связаны формулой

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\varepsilon} \times \vec{AB} + \vec{\omega} \times \vec{v}_{BA}. \tag{74}$$

Расчет скоростей механизма с помощью МЦС

- Определяем положение мгновенного центра скоростей (МЦС) каждого звена. МЦС лежит на пересечении перпендикуляров, проведенных к скоростям точек, принадлежащих звену (рис. 72). У тех звеньев, у которых МЦС не существует (скорости двух точек параллельны и не перпендикулярны отрезку, их соединяющему), угловая скорость равна нулю, а скорости всех точек равны. Если векторы скоростей перпендикулярны отрезку их соединяющему, то имеют место два частных случая положения МЦС (рис. 73, 74).

  Если тело (колесо, диск, цилиндр) катится по поверхности без проскальзывания, то МЦС этого тела находится в точке касания.

- Для каждого звена определяем расстояния от его точек до МЦС этого звена.

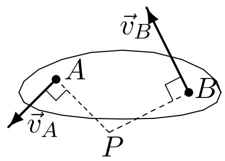


Рис. 72

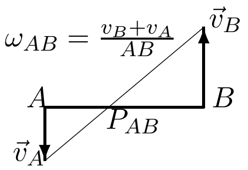


Рис. 73

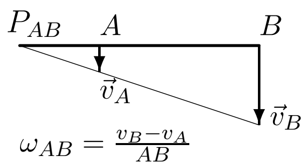


Рис. 74

- Записываем систему уравнений для скоростей N точек звена i, включая точку с известной скоростью:

  $$v_k = \omega_i R_{ik}, \quad k = 1...N.$$

  Здесь ω_i — угловая скорость звена i, R_{ik} — расстояние от МЦС звена i до точки k. Решаем систему, определяем угловую скорость звена, а затем скорости всех его точек.

  Этот пункт плана выполняем последовательно для всех звеньев механизма. Очередное звено должно иметь общую точку (шарнир) с предыдущим, для которого угловая скорость найдена или известна.

25 Сложное движение точки

25.1 Формула Бура

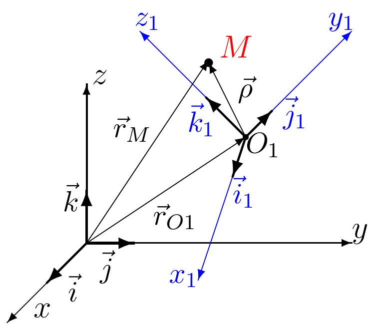


Рис. 75

Определение. Если точка M движется в некоторой системе координат $Ox_1y_1z_1$, а сама система координат движется относительно другой условно неподвижной системы координат, то такое движение точки называется сложным.

Определение. Относительное движение – движение точки M относительно подвижной системы координат $Ox_1y_1z_1$.

Определение. Переносное движение – движение подвижной системы координат $Ox_1y_1z_1$ движение относительно неподвижной $Oxyz$.

Определение. Абсолютное движение точки — движение точки M относительно неподвижной системы координат $Oxyz$.

Вектор ρ задает положение точки относительно подвижной системы координат, вектор r_M задает положение точки в неподвижной системе $Oxyz$.

Найдем производную $d\vec{\rho}/dt$. Разложим по ортам подвижных осей

$$\vec{\rho} = x_1\vec{i}_1 + y_1\vec{j}_1 + z_1\vec{k}_1. \tag{75}$$

Учитывая, что орты подвижной системы являются функциями времени, получим

$$\frac{d\vec{\rho}}{dt} = \frac{d}{dt}(x_1\vec{i}_1 + y_1\vec{j}_1 + z_1\vec{k}_1) = \frac{dx_1}{dt}\vec{i}_1 + \frac{dy_1}{dt}\vec{j}_1 + \frac{dz_1}{dt}\vec{k}_1 + \frac{d\vec{i}_1}{dt}x_1 + \frac{d\vec{j}_1}{dt}y_1 + \frac{d\vec{k}_1}{dt}z_1. \tag{76}$$

Первые три слагаемых представляют собой разложение некоторого вектора в подвижных осях. Назовем этот вектор локальной производной вектора и обозначим

$$\frac{\tilde{d}\vec{\rho}}{dt} = \frac{dx_1}{dt}\vec{i}_1 + \frac{dy_1}{dt}\vec{j}_1 + \frac{dz_1}{dt}\vec{k}_1. \tag{77}$$

По формулам Пуассона

$$\frac{d\vec{i}_1}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{i}_1,\ \ \frac{d\vec{j}_1}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{j}_1,\ \ \frac{d\vec{k}_1}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{k}_1.$$

В итоге получаем формулу Бура[14]

$$\frac{d\vec{\rho}}{dt} = \frac{\tilde{d}\vec{\rho}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{\rho}, \tag{78}$$

где $\vec{\omega}$ — вектор угловой скорости системы координат $Ox_1y_1z_1$ относительно неподвижной $Oxyz$.

25.2 Сложение скоростей

Определение. Абсолютной скоростью точки называется скорость точки относительно неподвижной системы координат.

Определение. Относительной скоростью точки называется скорость точки относительно неподвижной системы.

Определение. Переносной скоростью точки M называется скорость относительно неподвижной системы координат той точки в подвижной системе координат, с которой в данный момент совпадает рассматриваемая точка M. Продифференцируем векторное равенство (рис. 75)

$$\vec{r}_M = \vec{r}_{o1} + \vec{\rho}.$$

Используя понятие локальной производной, получим

$$\vec{V}_M = \frac{d}{dt}\vec{r}_{o1} + \frac{d}{dt}\vec{\rho} = V_{01} + \frac{\tilde{d}\vec{\rho}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{\rho} = \vec{V}_e + \vec{V}_r$$

где $\vec{V}_e = V_{01} + \vec{\omega} \times \vec{\rho}$ — переносная скорость, $\vec{V}_r = \dfrac{\tilde{d}\vec{\rho}}{dt}$ — относительная скорость.

Теорема. Абсолютная скорость точки в сложном движении равняется геометрической сумме переносной и относительной скорости.

$$\vec{V} = \vec{V}_r + \vec{V}_e. \tag{79}$$

25.3 Сложение ускорений

Продифференцируем

$$\vec{V}_M = V_{01} + \vec{\omega} \times \vec{\rho} + \vec{V}_r.$$

Получим

$$\vec{a}_M = \frac{d}{dt}(V_{01} + \vec{\omega} \times \vec{\rho} + \vec{V}_r) = \frac{dV_{01}}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{\rho}}{dt} + \frac{d\vec{V}_r}{dt} =$$

$$= \vec{a}_{01} + \vec{\varepsilon} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times \left(\frac{\tilde{d}\vec{\rho}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{\rho}\right) + \frac{\tilde{d}\vec{V}_r}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{V}_r = \vec{a}_{01} + \vec{\varepsilon} \times \vec{\rho} + 2\vec{\omega} \times \vec{V}_r + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}) + \vec{a}_r, \tag{80}$$

или

$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_k, \tag{81}$$

где

- $\vec{a}_k = 2\vec{\omega} \times \vec{V}_r$ — ускорение Кориолиса,
- $\vec{a}_e = \vec{a}_{01} + \vec{\varepsilon} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho})$ — переносное ускорение,
- $\vec{a}_r$ — относительное ускорение.

Теорема. (Кориолис) Абсолютное ускорение точки в сложном движении равняется геометрической сумме переносного, относительного и *кориолисова* ускорения.

26 Вращение твердого тела вокруг точки

26.1 Углы Эйлера

Рассмотрим движение по отношению к системе отсчета $Ox_1y_1z_1$ твердого тела, закрепленного так, что одна его точка O остается во все время движения неподвижной. Такое движение совершает, например, волчок, у которого неподвижна точка его опоры о плоскость, или любое другое тело, закрепленное в точке O шаровым шарниром. Найдем, какими параметрами определяется положение тела, имеющего неподвижную точку. Для этого свяжем жестко с телом трехгранник Oxyz, по положению которого можно судить о положении тела (рис. 76). Линия OK, вдоль которой пересекаются плоскости Oxy и Ox_1y_1, называется *линией узлов*. Тогда положение по отношению к осям $Ox_1y_1z_1$ трехгранника Oxyz, а с ним и самого тела можно определить углами:

$$\varphi = \angle KOx; \psi = \angle x_1OK; \theta = \angle z_1Oz \tag{82}$$

Эти углы, называемые углами Эйлера, имеют следующие, взятые из небесной механики наименования, φ — угол собственного вращения, ψ — угол прецессии, θ — угол нутации. Положительные направления отсчета углов показаны на рис. 76 стрелками. Чтобы знать движение тела, надо знать его положение по отношению к осям $Ox_1y_1z_1$ в любой момент времени, т.е. знать зависимости:

$$\varphi = f_1(t); \psi = f_2(t); \theta = f_3(t) \tag{83}$$

Эти уравнения, определяющие закон происходящего движения, называются *уравнениями движения твердого тела вокруг неподвижной точки.*

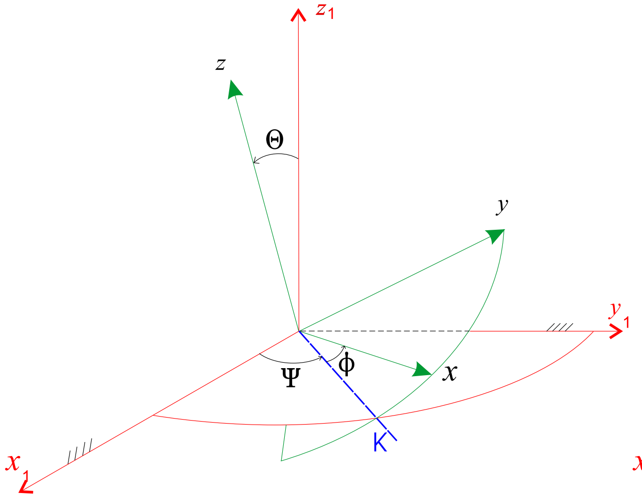


Рис. 76

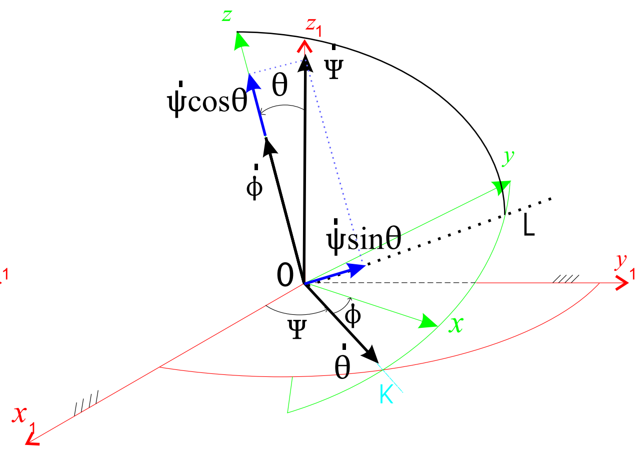


Рис. 77

26.2 Кинематические уравнения Эйлера

Найдем проекции угловой скорости на подвижные оси координат. Примем (без доказательства), что

$$\vec{\omega} = \dot{\vec{\psi}} + \dot{\vec{\theta}} + \dot{\vec{\varphi}}.$$

Выполним дополнительное построение. Проведем плоскость, проходящую через оси $0z$ и $0z_1$. Линию пересечения этой плоскости и подвижной плоскости $x0y$ обозначим $0L$. Разложим $\dot{\vec{\psi}}$ на компоненты $\dot{\vec{\psi}} \sin\varphi$ и $\dot{\vec{\psi}} \cos\varphi$ (рис. 77). Используя равенство углов со взаимно перпендикулярными сторонами ($0L \perp 0K$, $0x \perp 0y$), заметим, что угол между $0y$ и $0L$ равен φ. Отсюда, раскладывая компоненту $\dot{\vec{\psi}} \sin\varphi$ по осям $0x$ и $0y$, получим

$$\begin{aligned}
\omega_x &= \dot{\psi} \sin\varphi \sin\theta + \dot{\theta} \cos\varphi, \\
\omega_y &= \dot{\psi} \cos\varphi \sin\theta - \dot{\theta} \sin\varphi, \\
\omega_z &= \dot{\psi} \cos\theta + \dot{\varphi}.
\end{aligned}$$

Эти уравнения называются кинематическими уравнениями Эйлера для определения проекции угловой скорости на подвижные оси координат при сферическом движении.

27 Законы Ньютона

Первый закон Ньютона. Существуют такие системы отсчета, относительно которых, всякое тело сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения, если на него не действуют никакие силы или действие сил скомпенсировано. Такие системы отсчета называются инерциальными.

Второй закон Ньютона. Ускорение материальной точки пропорционально приложенной силе и направлено по прямой, по которой эта сила действует.

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \vec{F} \tag{84}$$

или

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} \tag{85}$$

Третий закон Ньютона. Всякому действию всегда есть равное и противоположно направленное противодействие. С большой степенью точности можно считать инерциальной систему координат с началом в центре масс Солнечной системы и осями, направленными на "неподвижные"звезды.
Принцип относительности Галилея. Всякая система координат, которая движется относительно инерциальной системы равномерно и прямолинейно, тоже является инерциальной.

Замечание 27.1 ***Пределы применимости законов Ньютона:***
$L > 10^{-8}$ *см (внутри атома законы не применимы)*
$v \ll c$ *(c — скорость света)*

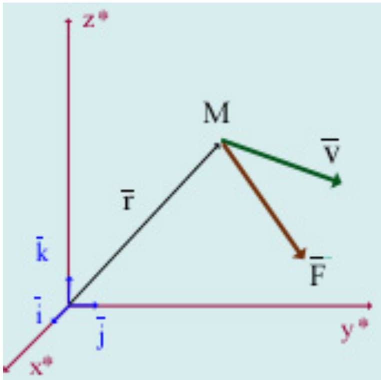


Рис. 78

Пусть материальная точка движется под действием силы $\vec{F}$. С учетом того, что $m = const$ и $v = \frac{d\vec{r}}{dt}$ выражение (85) можно переписать в виде

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F} \tag{86}$$

Здесь $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, x, y, z — координаты точки M в инерциальной системе. Поэтому $\vec{V} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$. Если $\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}$, то уравнение (85) можно переписать виде системы шести скалярных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\frac{dx}{dt} = v_x \quad \frac{dy}{dt} = v_y \quad \frac{dz}{dt} = v_z \quad m\frac{dv_x}{dt} = F_x \quad m\frac{dv_y}{dt} = F_y \quad m\frac{dv_z}{dt} = F_z \tag{87}$$

или системы трех скалярных дифференциальных уравнений второго порядка:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_x \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = F_y \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = F_z \tag{88}$$

28 Две основные задачи динамики материальной точки

Второй закон Ньютона, определяемый формулой $m\dfrac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$, позволяет сформулировать две основные задачи динамики материальной точки.

Первая задача Даны масса точки m и траектория движения $\vec{r} = \vec{r}(t)$ Найти силу $\vec{F}$, которая вызывает это движение.

Если требуется определить силу как функцию времени, то эта задача решается двукратным дифференцированием $\vec{F} = m\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}$

Вторая задача Даны масса точки и сила, действующая на точку, как функция положения, скорости и, быть может, времени: m, $\vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t)$. Определить траекторию движения $\vec{r} = \vec{r}(t)$ точки.

Для решения этой задачи необходимо интегрировать систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= F_x(x, y, z.v_v, v_y, v_z, t) \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= F_y(x, y, z.v_v, v_y, v_z, t) \\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= F_z(x, y, z.v_v, v_y, v_z, t) \end{aligned} \tag{89}$$

Систему (89)можно переписать в форме Коши:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} = v_x \qquad \frac{dy}{dt} &= v_y \qquad \frac{dz}{dt} = v_z \\ \frac{dv_x}{dt} &= \frac{1}{m}F_x(x, y, z.v_v, v_y, v_z, t) \\ \frac{dv_y}{dt} &= \frac{1}{m}F_y(x, y, z.v_v, v_y, v_z, t) \\ \frac{dv_z}{dt} &= \frac{1}{m}F_z(x, y, z.v_v, v_y, v_z, t) \end{aligned} \tag{90}$$

Система (90) однозначно не определяет траекторию движения точки, так как общее решение этой системы зависит от шести произвольных постоянных:

$$\begin{aligned} x &= x(c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, t) \\ y &= y(c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, t) \\ z &= z(c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, t) \\ v_x &= v_x(c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, t) \\ v_y &= v_y(c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, t) \\ v_z &= v_z(c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, t) \end{aligned} \tag{91}$$

Для определения произвольных постоянных необходимо задать шесть начальных условий:

$$\begin{aligned} x|_{t=0} = x^0 \quad y|_{t=0} = y^0 \quad z|_{t=0} = z^0 \\ v_x|_{t=0} = v_x^0 \quad v_y|_{t=0} = v_y^0 \quad v_z|_{t=0} = v_z^0 \end{aligned} \tag{92}$$

Полагая в общем решении t=0 (91), получаем систему алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} x^0 &= x(c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, 0) \\ y^0 &= y(c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, 0) \\ z^0 &= z(c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, 0) \\ v_x^0 &= v_x(c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, 0) \\ v_y^0 &= v_y(c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, 0) \\ v_z^0 &= v_z(c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, 0) \end{aligned} \tag{93}$$

С помощью системы (93) можно определить постоянные интегрирования:

$$\begin{aligned} c_1 &= c_1(x^0, y^0, z^0, v_x^0, v_y^0, v_z^0) \\ &\dots \\ c_6 &= c_6(x^0, y^0, z^0, v_x^0, v_y^0, v_z^0) \end{aligned} \tag{94}$$

Подставляя выражения (94) в (91) получим:

$$\begin{aligned} x &= x(t, x^0, y^0, z^0, v_x^0, v_y^0, v_z^0) \\ y &= y(t, x^0, y^0, z^0, v_x^0, v_y^0, v_z^0) \\ z &= z(t, x^0, y^0, z^0, v_x^0, v_y^0, v_z^0) \\ v_x &= v_x(t, x^0, y^0, z^0, v_x^0, v_y^0, v_z^0) \\ v_y &= v_y(t, x^0, y^0, z^0, v_x^0, v_y^0, v_z^0) \\ v_z &= v_z(t, x^0, y^0, z^0, v_x^0, v_y^0, v_z^0) \end{aligned} \tag{95}$$

Уравнения (95) определяют траекторию движения точки. Это и есть решение второй основной задачи динамики точки.

29 Свойства внутренних сил системы материальных точек

29.1 Общие определения

Рассмотрим систему n не связанных между собой материальных точек с массами $m_1, m_2, \ldots, m_n$ и радиусами-векторами $r_1, r_2, \ldots, r_n$ в инерциальной системе координат x^*, y^*, z^*.

Разделим условно силы, действующие на систему точек, на внутренние и внешние.

Определение. Внешние силы. Силы, действующие на точки системы со стороны тел, не входящих в состав рассматриваемой системы, называются внешними и обозначаются $\vec{F_v^{(b)}}$

Определение. Внутренние силы. Силы взаимодействия между точками системы называются внутренними и обозначаются $\vec{F_v^{(i)}}$.

Деление сил на внешние и внутренние не носит абсолютного характера, а зависит от рассматриваемой механической системы.

Например, в системе Земля, Луна силы взаимодействия между Землей и Луной могут рассматриваться как внутренние, а силы притяжения Земли и Луны к Солнцу - как внешние. Если же рассматривать систему Солнце, Земля, Луна, то все указанные выше силы - внутренние.

29.2 Свойства внутренних сил

Сумма внутренних сил, приложенных к точке с массой m_1 со стороны остальных точек системы:

$$\vec{F}_1^{(i)} = \vec{F}_{1/2}^{(i)} + \vec{F}_{1/3}^{(i)} + \ldots + \vec{F}_{1/n}^{(i)}, \tag{96}$$

где $\vec{F}_{1/\nu}^{(i)}$ - сила, которая действует на точку с массой m_1 со стороны точки с массой m_ν .

Для точки с массой m_2 и других можно записать:

$$\begin{array}{c} \vec{F}_2^{(i)} = \vec{F}_{2/1}^{(i)} + \vec{F}_{2/3}^{(i)} + \ldots + \vec{F}_{2/n}^{(i)} \\ \ldots \\ \vec{F}_n^{(i)} = \vec{F}_{n/1}^{(i)} + \vec{F}_{n/2}^{(i)} + \ldots + \vec{F}_{n/n-1}^{(i)} \end{array}. \tag{97}$$

Поскольку внутренние силы удовлетворяют третьему закону Ньютона, то

$$\vec{F}_{\nu/\mu}^{(i)} = -\vec{F}_{\mu/\nu}^{(i)}. \tag{98}$$

С учетом выражений (96), (97) и (98) имеем

$$\vec{R}^{(i)} = \sum \vec{F}_\nu^{(i)} = 0. \tag{99}$$

т.е **Главный вектор внутренних сил системы материальных точек тождественно равен нулю.**

Главный момент внутренних сил системы материальных точек относительно произвольного центра равен нулю.

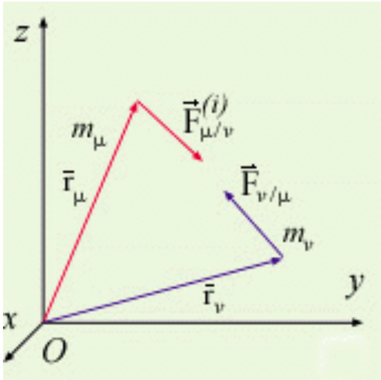


Рис. 79

$$\vec{L}_0^{(i)} = \sum \vec{r}_\nu \times \vec{F}_\nu^{(i)} = 0, \tag{100}$$

так как

$$\vec{r}_\mu \times \vec{F}_{\mu/\nu}^{(i)} = -\vec{r}_\nu \times \vec{F}_{\nu/\mu}^{(i)} \tag{101}$$

и векторные произведения в выражении для главного момента взаимно уничтожаются.

30 Количество движения системы материальных точек

30.1 Общие определения

Определение. Количеством движения (импульсом) материальной точки массы m_ν, движущейся со скоростью $\vec{V}_\nu$, называется произведение $\vec{Q}_\nu = m_\nu \cdot \vec{V}_\nu$.
Определение. Количеством движения системы материальных точек называется геометрическая сумма количеств движения всех точек системы $\vec{Q} = \sum \vec{Q}_\nu = \sum m_\nu \cdot \vec{V}_\nu$

30.2 Теорема об изменении количества движения системы

Производная по времени от вектора количества движения системы материальных точек равна главному вектору всех внешних сил, действующих на точки системы:

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{R}^{(b)}, \tag{102}$$

или в скалярной форме:

$$\frac{dQ_x}{dt} = R_x^{(b)}, \quad \frac{dQ_y}{dt} = R_y^{(b)}, \quad \frac{dQ_z}{dt} = R_z^{(b)}. \tag{103}$$

Докажем (102). Для каждой точки материальной системы запишем второй закон Ньютона

$$\begin{gathered} m_1 \frac{d\vec{v}_1}{dt} = \vec{F}_1^{(b)} + \vec{F}_1^{(i)}, \\ m_2 \frac{d\vec{v}_2}{dt} = \vec{F}_2^{(b)} + \vec{F}_2^{(i)}, \\ \dots \\ m_n \frac{d\vec{v}_n}{dt} = \vec{F}_n^{(b)} + \vec{F}_n^{(i)}. \end{gathered} \tag{104}$$

Здесь $\vec{V}_\nu$ — скорость точки массой m_ν, $\vec{F}_\nu^{(i)}$ — сумма внутренних сил, действующих на точку массы m_ν, $\vec{F}_\nu^{(b)}$ — сумма внешних сил, действующих на точку массы m_ν. Сложим уравнения (104):

$$\sum m_\nu \frac{d\vec{v}_\nu}{dt} = \sum \vec{F}_\nu^{(b)} + \sum \vec{F}_\nu^{(i)} \tag{105}$$

Здесь $\vec{Q}_\nu = m_\nu \vec{V}_\nu$, $\sum \vec{R}_\nu^{(b)} = \vec{R}^{(b)}$, $\sum \vec{R}_\nu^{(i)} = 0$. Поэтому: $\frac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{R}^{(b)}$ что и требовалось доказать.

Следствие из теоремы 30.1 *Если главный вектор внешних сил системы материальных точек равен нулю, то вектор количества движения этой системы остается постоянным по величине и направлению. Закон сохранения импульса*

Следствие из теоремы 30.2
Если проекция главного вектора внешних сил системы материальных точек на какую-либо ось равна нулю, то проекция вектора количества движения на эту ось остается постоянной.

Следствие из теоремы 30.3
Внутренние силы системы материальных точек непосредственно не влияют на изменение количества движения системы.

31 Центр масс системы материальных точек

Рассмотрим механическую систему, состоящую из n материальных точек с массами $m_1, m_2, ..., m_n$. Положение точки с массой m_ν определяется радиус-вектором $\vec{r_\nu} = x_\nu \vec{i} + y_\nu \vec{j} + z_\nu \vec{k}$, где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ — единичные векторы некоторой системы координат.

Определение. Центром масс системы материальных точек называется точка, радиус-вектор которой определяется следующим выражением:

$$\vec{r_c} = \frac{1}{m} \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \vec{r_\nu}, \qquad (106)$$

где $m = \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu$.

Для координат центра масс системы можно записать следующие выражения:

$$x_c = \frac{1}{m} \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu x_\nu; y_c = \frac{1}{m} \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu y_\nu; z_c = \frac{1}{m} \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu z_\nu;$$

Покажем что, в различных системах координат центром масс остается одна и та же точка.

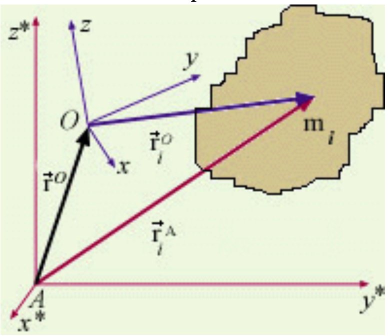


Рис. 80

$\vec{r_c^A} = \frac{\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \vec{r}_\nu^A}{m}$ — центр масс в системе $Ax^*y^*z^*$.
$\vec{r_c^O} = \frac{\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \vec{r}_\nu^O}{m}$ — центр масс в системе $Ox^*y^*z^*$.
$\vec{r_\nu^O} = \vec{r_\nu^A} - \vec{r^O}$
$\vec{r_c^O} = \frac{1}{m} \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \vec{r_\nu^A} - \vec{r^O} \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu = \vec{r_c^A} - \vec{r^O}$

Таким образом, $\vec{r_c^O} = \vec{r_c^A} - \vec{r^O}$, т.е., радиус-вектор центра масс в другой системе координат отличается только на радиус-вектор начала координат этой системы.

32 Количество движения системы материальных точек как функция скорости центра масс

Рассмотрим механическую систему, состоящую из n материальных точек с массами $m_1, m_2, ..., m_n$. Положение точки m_ν определяется радиус-вектором $\vec{r_\nu}$ в некоторой системе координат. Количество движения системы определяется как

$$\vec{Q} = \sum_{\nu=1}^{n} \vec{Q}_\nu = \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \vec{v_\nu} = \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \frac{d\vec{r}_\nu}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \vec{r_\nu}. \tag{107}$$

Но по определению центра масс системы материальных точек

$$\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \vec{r_\nu} = m\vec{r_c}. \tag{108}$$

Следовательно, выражение для количества движения системы можно переписать в виде:

$$\vec{Q} = \frac{d}{dt} m\vec{r_\nu} = m\frac{d\vec{r_\nu}}{dt} \tag{109}$$

И окончательно имеем выражение

$$\vec{Q} = m\vec{v_c}. \tag{110}$$

Количество движения системы материальных точек (механической системы) равно произведению массы всей системы на вектор скорости центра масс.

33 Теорема о движении центра масс механической системы

Центр масс механической системы движется, как материальная точка с массой, равной массе всей системы, к которой приложен главный вектор внешних сил, действующих на точки системы:

$$m\frac{d\vec{v_c}}{dt} = \vec{R^e}. \tag{111}$$

Здесь m — масса всей системы, $\vec{v_c}$ — скорость центра масс механической системы,
$\vec{R^e} = \sum_{\nu=1}^{n} \vec{F_\nu^e}$ — главный вектор внешних сил.
В проекциях на оси системы координат выражение (111) можно записать так:

$$m\frac{dv_{cx}}{dt} = R_x^e;\ m\frac{dv_{cy}}{dt} = R_y^e;\ m\frac{dv_{cz}}{dt} = R_z^e.$$

Здесь v_{cx}, v_{cy}, v_{cz}, — проекции скорости центра масс, а R_x^e, R_y^e, R_z^e, — проекции главного вектора внешних сил на координатные оси.

Замечание 33.1 *По теореме об изменении количества движения механической системы имеем* $\frac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{R^e}$ *или* $\frac{d}{dt}(m\vec{v_c}) = \vec{R^e}$
следовательно, $m\frac{d\vec{v_c}}{dt} = \vec{R^e}$ *что и требовалось доказать.*

Доказательство 33.1 *Если главный вектор внешних сил, действующих на механическую систему, равен нулю, то центр масс системы находится в покое или движется равномерно и прямолинейно.*

Доказательство 33.2 *Если проекция главного вектора внешних сил, действующих на механическую систему, на какую либо ось равна нулю, то проекция скорости центра масс системы на эту ось остается постоянной.*

34 Момент количества движения механической системы (кинетический момент)

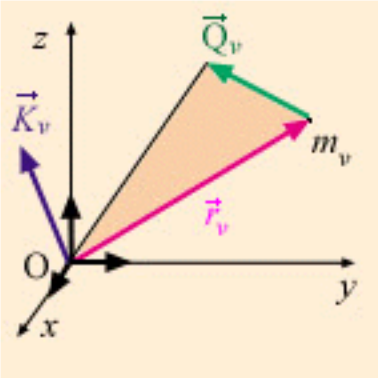


Рис. 81

Определение. Моментом количества движения (кинетическим моментом) материальной точки относительно некоторой точки O называется векторное произведение радиуса-вектора на вектор количества движения этой точки:

$$\vec{K_{O\nu}} = \vec{r_\nu} \times \vec{Q_\nu} = \vec{r_\nu} \times m_\nu \vec{v_\nu}$$

Определение. Моментом количества движения (кинетическим моментом) системы материальных точек (механической системы) относительно некоторой точки O называется сумма кинетических моментов всех точек системы относительно этой точки:
$\vec{K_O} = \sum_{\nu=1}^{n} \vec{K_{O\nu}} = \sum_{\nu=1}^{n} \vec{r_\nu} \times m_\nu \vec{v_\nu}$

Проекции кинетического момента на оси координат

Так как

$$\vec{r_\nu} = x_\nu \vec{i} + y_\nu \vec{j} + z_\nu \vec{k}$$

и

$$\vec{v_\nu} = v_{x\nu} \vec{x} + v_{y\nu} \vec{y} + v_{z\nu} \vec{z},$$

то

$$\vec{K_O} = \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \vec{r_\nu} \times \vec{v_\nu},$$

$\vec{K_O} = \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu [(y_\nu v_{z\nu} - z_\nu v_{y\nu})\vec{i} + (z_\nu v_{x\nu} - x_\nu v_{z\nu})\vec{j} + (x_\nu v_{y\nu} - y_\nu v_{x\nu})\vec{k}]$

Поэтому

$$\begin{aligned} K_{Ox} &= \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu (y_\nu v_{z\nu} - z_\nu v_{y\nu}), \\ K_{Oy} &= \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu (z_\nu v_{x\nu} - x_\nu v_{z\nu}), \\ K_{Oz} &= \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu (x_\nu v_{y\nu} - y_\nu v_{x\nu}). \end{aligned} \tag{112}$$

Выражения (112) определяют проекции вектора кинетического момента на оси координат.

35 Момент количества движения тела, вращающегося вокруг неподвижной оси

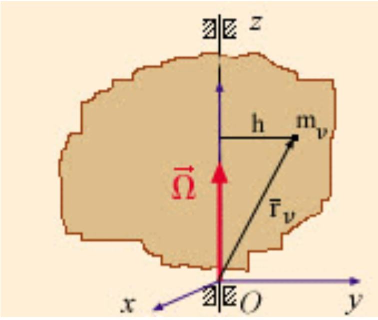


Рис. 82

Для твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, имеем:
$\vec{r_\nu} = x_\nu \vec{i} + y_\nu \vec{j} + z_\nu \vec{k}$ и
$\vec{v_\nu} = [\vec{\omega}, \vec{r_\nu}] = \begin{pmatrix} -y_\nu \omega \\ x_\nu \omega \\ 0 \end{pmatrix}$
Тогда проекции вектора кинетического момента на оси координат будут иметь вид:

$$\begin{aligned} K_{Ox} &= -\omega \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu x_\nu z_\nu = -\omega I_{zx}, \\ K_{Ox} &= -\omega \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu y_\nu z_\nu = -\omega I_{zy}, \ . \\ K_{Oz} &= \omega \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu (x_\nu^2 + y_\nu^2) = \omega I_z \end{aligned} \tag{113}$$

В выражениях (113) $I_z = \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu (x_\nu^2 + y_\nu^2)$ называется моментом инерции твердого тела вокруг оси Oz; $I_{xz} = \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu x_\nu z_\nu$ и $I_{yz} = \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu y_\nu z_\nu$ — центробежные моменты инерции.

36 Теорема об изменении кинетического момента относительно произвольной точки

Теорема моментов, доказанная для одной материальной точки, справедлива для каждой из точек системы. Следовательно, если рассмотреть точку системы с массой m_k, имеющую скорость v_k, то для нее будет

$$\frac{d}{dt}[\vec{M_O}(m_k \vec{v_k})] = \vec{M_O} \vec{F_k^e} + \vec{M_O} \vec{F_k^i},$$

где $\vec{F_k^e}, \vec{F_k^i}$ — равнодействующие всех внешних и внутренних сил, действующих на данную точку. Составляя такие уравнения для всех точек системы и складывая их почленно, получим

$$\frac{d}{dt}[\sum_{k=1}^{n} \vec{M_O}(m_k \vec{v_k})] = \sum_{k=1}^{n} \vec{M_O} \vec{F_k^e} + \sum_{k=1}^{n} \vec{M_O} \vec{F_k^i}.$$

Но последняя сумма по свойству внутренних сил системы равна нулю. Тогда, учитывая равенство $\vec{K_O} = \sum_{k=1}^{n} \vec{M_O}(m_k \vec{v_k})$ найдем окончательно

$$\frac{d}{dt} \vec{K_O} = \sum_{k=1}^{n} \vec{M_O} \vec{F_k^e}$$

Полученное уравнение выражает следующую **теорему моментов для системы**: *производная по времени от главного момента количеств движения системы относительно некоторого неподвижного центра равна сумме моментов всех внешних сил системы относительно того же центра.*

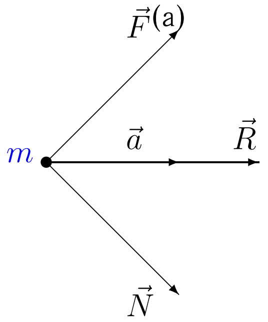
Проектируя обе части равенства на неподвижные оси $Oxyz$, получим:

$$\frac{d}{dt}K_{Ox} = \sum_{k=1}^{n} M_{Ox}F^e_{kx}, \quad \frac{d}{dt}K_{Oy} = \sum_{k=1}^{n} M_{Oy}F^e_{ky}, \quad \frac{d}{dt}K_{Oz} = \sum_{k=1}^{n} M_{Oz}F^e_{kz}$$

Уравнения выражают теорему моментов относительно любой неподвижной оси.

37 Принцип Даламбера

Рассмотрим движущуюся материальную точку. На точку кроме приложенной активной силы могут действовать реакции связи



$$m\vec{a} = \vec{F}^{(a)} + \vec{N} \tag{114}$$

$$\vec{F}^{(a)} + \vec{N} + (-m\vec{a}) = 0 \tag{115}$$

$$\vec{\Phi} = -m\vec{a} \tag{116}$$

Формулой (116) определяется сила инерции(Даламберова сила)

$$\vec{F}^{(a)} + \vec{N} + \vec{\Phi} = 0 \tag{117}$$

Из формулы (117) следует принцип Даламбера для одной материальной точки:

- активные силы, реакции связи и силы инерции образуют уравновешенную систему или систему сил эквивалентную нулю.

Используя формулу (117) мы сможем свести задачу динамики к задаче элементарной статики.

38 Принцип Даламбера для системы материальных точек

Рассмотрим произвольную систему n материальных точек к которым приложены активные (известные) силы и на которые наложены произвольные связи.

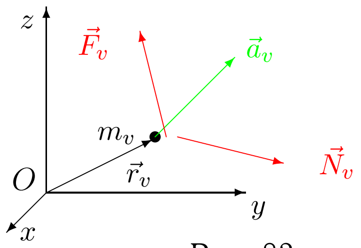


Рис. 83

На основании аксиомы о связях освободим систему от связей и заменим их действие реакциями. Уравнения движения будут иметь вид:

$$\vec{F}_1^{(a)} + \vec{N}_1 + \vec{\Phi}_1 = 0$$

$$\vec{F}_2^{(a)} + \vec{N}_2 + \vec{\Phi}_2 = 0$$

....

$$\vec{F}_n^{(a)} + \vec{N}_n + \vec{\Phi}_n = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^{(a)} + \sum_{i=1}^{n} \vec{N}_i + \sum_{i=1}^{n} \vec{\Phi}_i = 0 \tag{118}$$

Из (118) получаем:

$$\vec{R}^{(a)} + \vec{R}^{(N)} + \vec{R}^{(\text{инерц})} \tag{119}$$

$\vec{R}^{(a)}$ — главный вектор активных сил;
$\vec{R}^{(N)}$ — главный вектор сил реакций связей;
$\vec{R}^{(\text{инерц})}$ — главный вектор даламберовых сил инерции.
Из (119) следует принцип Даламбера для системы материальных точек:

- Сумма главных векторов активных сил, реакций связи и сил инерции равна нулю, т.е. активные силы и реакции связи и силы инерции образуют уравновешенную систему сил.

39 Главный вектор и главный момент даламберовых сил инерции

Так как главный вектор даламберовых сил инерции равен

$$\vec{R}^{(\text{инерц})} = -\sum_{v=1}^{n} m_v \vec{a}_v = -\sum_{v=1}^{n} m_v \frac{d\vec{V}_v}{dt} = -\frac{d\vec{Q}}{dt} \tag{120}$$

здесь $\vec{Q} = \sum_{v=1}^{n} m_v \vec{v}_v$. Таким образом, $\vec{R}^{(\text{инерц})} = -\frac{d\vec{Q}}{dt}$, т.е главный вектор даламберовых сил инерции равен производной по времени от вектора количества движения системы материальных точек, взятый с обратным знаком.

Вектор количества движения системы материальных точек как функция скорости центра масс имеет вид: $\vec{Q} = m\vec{v}_c$. Поэтому

$$\vec{R}^{(\text{ин})} = -m\frac{d\vec{v}_c}{dt} \tag{121}$$

- Главный вектор сил инерции системы материальных точек равен силе инерции центра масс системы в предположении, что в нем сосредоточена вся масса системы

Главный момент относительно точки O даламберовых сил инерции системы материальных точек имеет вид:

$$\vec{L}_0 = \vec{L}_0^{(a)} + \vec{L}_0^{(N)} + \vec{L}_0^{(\text{инерц})}, \tag{122}$$

или

$$\sum_{v=1}^{n} \vec{r}_v \vec{F}_v^{(a)} + \sum_{v=1}^{n} \vec{r}_v \vec{N}_v^{(N)} + \sum_{v=1}^{n} \vec{r}_v \vec{\Phi}_v^{(\text{инерц})} = 0. \tag{123}$$

Где момент инерции имеет вид:

$$\vec{L}_0^{(\text{инерц})} = \sum_{v=1}^{n} \vec{r}_v \vec{\Phi}_v = \sum_{v=1}^{n} \vec{r}_v \times m_v \vec{a}_v = -\sum \vec{r}_v \times m_v \frac{d\vec{v}_v}{dt} = -\frac{d \sum \vec{r}_v \times m_v \vec{v}_v}{dt} + \sum \frac{d\vec{r}_v}{dt} \times m_v \vec{v}_v.$$

В последнем выражении векторное произведение $\frac{d\vec{r}_v}{dt} \times m_v \vec{v}_v$ равно нулю, а $\sum \vec{r}_v m_v \times \vec{v}_v$ — момент количества системы относительно точки . Поэтому

$$\vec{L}_0^{(\text{инерц})} = -\frac{d\vec{K}_0}{dt}. \tag{124}$$

- главный момент даламберовых сил инерции системы материальных точек относительно точки равен производной по времени от вектора кинетического момента этой системы относительно точки с противоположным знаком.

40 Оси Кенига

Рассмотрим систему материальных точек с массами m_v и координатами x_v, y_v, z_v в неподвижной системе координат $Ox^*y^*z^*$.

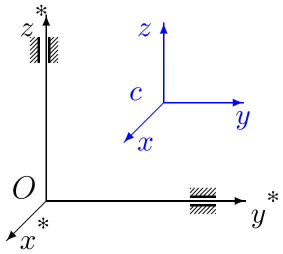


Рис. 84

Координаты центра масс этой системы определяются равенствами:

$$x_c = \frac{\sum m_v x_v}{\sum m_v}; y_c = \frac{\sum m_v y_v}{\sum m_v}; z_c = \frac{\sum m_v z_v}{\sum m_v} \tag{125}$$

Если в центре масс построить систему осей $Cxyz$, которые параллельны осям $Ox^*y^*z^*$. и перемещаются поступательно относительно этих (неподвижных) осей, то такая система осей будет называться осями Кенига.

41 Кинетический момент абсолютно твердого тела относительно неподвижной точки

Разобьем тело на n материальных точек с массами m_ν

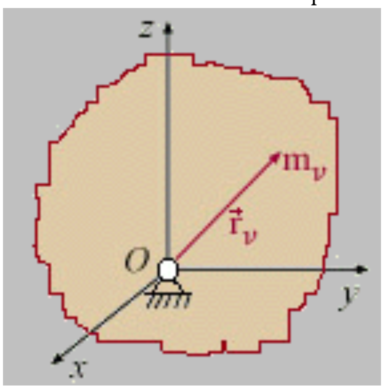


Рис. 85

По определению кинетического момента:

$$\vec{K_O} = \sum_{\nu=1}^{n} \vec{K_{O_\nu}} = \sum_{\nu=1}^{n} \vec{r_\nu} \times m_\nu \vec{V_\nu} \tag{126}$$

Скорость любой точки тела выражается как:

$$\vec{V_\nu} = \vec{V_O} + \vec{\omega} \times \vec{r_\nu}, \text{ где } \vec{V_O} = 0.$$

С учетом последнего

$$\vec{K_O} = \sum_{\nu=1}^{n} \vec{r_\nu} \times m_\nu \vec{\omega} \times \vec{r_\nu} = \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu (\vec{\omega}(\vec{r_\nu} \cdot \vec{r_\nu}) - \vec{r_\nu}\vec{r_\nu} \cdot \vec{\omega}).$$

Запишем векторы из предыдущего выражения как функции их проекций на оси координат:

$$\vec{K_O} = K_{Ox}\vec{i} + K_{Oy}\vec{j} + K_{Oz}\vec{k}; \quad \vec{r_\nu} = x_\nu\vec{i} + y_\nu\vec{j} + z_\nu\vec{k}; \quad \vec{\omega} = \omega_x\vec{i} + \omega_y\vec{j} + \omega_z\vec{k}.$$

Учтем, что $\vec{r_\nu} \cdot \vec{r_\nu} = x_\nu^2 + y_\nu^2 + z_\nu^2; \quad \vec{r_\nu} \cdot \vec{\omega} = x_\nu\omega_x + y_\nu\omega_y + z_\nu\omega_z.$
Тогда выражение примет вид:

$$\vec{K_O} = \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu\{(\omega_x\vec{i} + \omega_y\vec{j} + \omega_z\vec{k})(x_\nu^2 + y_\nu^2 + z_\nu^2) - (x_\nu\vec{i} + y_\nu\vec{j} + z_\nu\vec{k})(x_\nu\omega_x + y_\nu\omega_y + z_\nu\omega_z)\}.$$

Для проекций вектора кинетического момента получаем выражения:

$$K_{Ox} = \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu\{\omega_x x_\nu^2 + \omega_x y_\nu^2 + \omega_x z_\nu^2 - x_\nu^2\omega_x - x_\nu y_\nu\omega_y - x_\nu z_\nu\omega_z\},$$

$$K_{Oy} = \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu\{\omega_y x_\nu^2 + \omega_y y_\nu^2 + \omega_y z_\nu^2 - x_\nu y_\nu\omega_x - y_\nu^2\omega_y - y_\nu z_\nu\omega_z\},$$

$$K_{Oz} = \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu\{\omega_z x_\nu^2 + \omega_z y_\nu^2 + \omega_z z_\nu^2 - z_\nu x_\nu\omega_x - y_\nu z_\nu\omega_y - z_\nu^2\omega_z\}.$$

Поскольку не зависят от выбора точки на теле, то предыдущие выражения можно переписать в виде:

$$K_{Ox} = [\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu(y_\nu^2 + z_\nu^2)]\omega_x - [\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu x_\nu y_\nu]\omega_y - [\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu x_\nu z_\nu]\omega_z,$$

$$K_{Oy} = -[\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu y_\nu x_\nu]\omega_x + [\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu(z_\nu^2 + x_\nu^2)]\omega_y - [\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu y_\nu z_\nu]\omega_z,$$

$$K_{Oz} = -[\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu z_\nu x_\nu]\omega_x - [\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu z_\nu y_\nu]\omega_x + [\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu(x_\nu^2 + y_\nu^2)]\omega_z.$$

Введем обозначения:

$$I_{xx} = \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu(y_\nu^2 + z_\nu^2),$$

$$I_{yy} = \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu(x_\nu^2 + z_\nu^2),$$

$$I_{zz} = \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu(x_\nu^2 + y_\nu^2),$$

$$I_{xy} = \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu x_\nu y_\nu,$$

$$I_{yz} = \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu y_\nu z_\nu,$$

$$I_{zx} = \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu z_\nu x_\nu.$$

Получим:

$$K_{Ox} = I_{xx}\omega_x - I_{xy}\omega_y - I_{xz}\omega_z,$$

$$K_{Oy} = I_{xy}\omega_x - I_{yy}\omega_y - I_{yz}\omega_z,$$

$$K_{Oz} = I_{xz}\omega_x - I_{zy}\omega_y - I_{zz}\omega_z.$$

Кинетический момент твердого тела с однородной неподвижной точкой относительно этой точки равен произведению тензора инерции на угловую скорость тела.

42 Моменты инерции абсолютно твердого тела

42.1 Определения

Разделим мысленно твердое тело на n частей с массами m_ν и радиусами-векторами $\vec{r_\nu}$.

Если x_ν, y_ν, z_ν — координаты точки с массой, то $\vec{r_\nu} = v_\nu\vec{i} + y_\nu\vec{j} + z_\nu + \vec{k}$.

Радиус-вектор центра масс полученной системы определяется по формулам

$$\vec{r_c} = \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \vec{r_\nu}. \tag{127}$$

Выражения для осевых моментов инерции твердого тела имеют вид:

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu (y_\nu^2 + z_\nu^2), \\ I_{yy} &= \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu (x_\nu^2 + z_\nu^2), \\ I_{zz} &= \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu (x_\nu^2 + y_\nu^2). \end{aligned} \tag{128}$$

Выражения для центробежных моментов инерции твердого тела имеют вид:

$$\begin{aligned} I_{xy} &= \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu x_\nu y_\nu, \\ I_{yz} &= \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu y_\nu z_\nu, \\ I_{zx} &= \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu z_\nu x_\nu. \end{aligned} \tag{129}$$

При увеличении числа n и стремлении m_ν к нулю выражения (128) и (129) принимают вид:

$$I_{xx} = \iiint\limits_V (y^2 + z^2) dm,$$

$$I_{yy} = \iiint\limits_V (y^2 + z^2) dm,$$

$$I_{zz} = \iiint\limits_V (z^2 + x^2) dm,$$

$$I_{xy} = \iiint\limits_V xydm,$$

$$I_{yz} = \iiint\limits_V yzdm,$$

$$I_{zx} = \iiint\limits_V zxdm.$$

Обозначим через γ плотность тела в точке x, y, z, тогда $dm = \gamma(x, y, z)dV$, где dV — элементарный объем. С учетом этого выражения для моментов инерции примут вид:

$$I_{xx} = \iiint\limits_V (y^2 + z^2)\gamma(x, y, z) dxdydz,$$

$$I_{yy} = \iiint\limits_V (x^2 + z^2)\gamma(x, y, z)dxdydz, \tag{130}$$

$$I_{zz} = \iiint\limits_V (x^2 + y^2)\gamma(x, y, z)dxdydz,$$

$$I_{xy} = \iiint\limits_V xy\gamma(x, y, z)dxdydz,$$

$$I_{yz} = \iiint\limits_V yz\gamma(x, y, z)dxdydz, \tag{131}$$

$$I_{zx} = \iiint\limits_V zx\gamma(x, y, z)\ dxdydz.$$

Если тело — однородное, то выражения (130), (131), являющиеся компонентами тензора инерции тела, примут вид:

$$I_{xx} = \gamma \iiint\limits_V (y^2 + z^2)dxdydz,$$

$$I_{yy} = \gamma \iiint\limits_V (x^2 + z^2)dxdydz,$$

$$I_{zz} = \gamma \iiint\limits_V (x^2 + y^2)dxdydz,$$

$$I_{xy} = \gamma \iiint\limits_V xydxdydz,$$

$$I_{yz} = \gamma \iiint\limits_V yzdxdydz,$$

$$I_{zx} = \gamma \iiint\limits_V zxdxdydz.$$

42.2 Свойства тензора инерции

Диагональные элементы матрицы тензора инерции

$$\begin{pmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix}$$

(осевые моменты инерции) строго положительны:

$$I_{xx} \geq 0, \quad I_{yy} \geq 0, \quad I_{zz} \geq 0.$$

Осевые моменты инерции любого твердого тела удовлетворяют следующим неравенствам:

$$I_{xx} + I_{yy} \geq I_{zz}, \quad I_{zz} + I_{yy} \geq I_{xx}, \quad I_{xx} + I_{zz} \geq I_{yy}.$$

42.3 Моменты инерции тела относительно параллельных осей. Теорема Гюйгенса

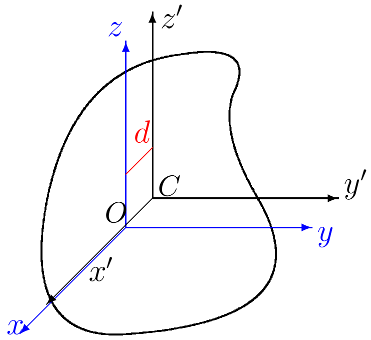


Рис. 86

Моменты инерции данного тела относительно разных осей будут, вообще говоря, разными. Покажем, как, зная момент инерции относительно какой-нибудь одной оси, проведенной в теле, найти момент инерции относительно любой другой оси, ей параллельной.

Проведем через центр масс тела произвольные оси $x'y'z'$, а через любую точку на оси Cx' — оси $Oxyz$, такие, что $Oy||Cy'$, $Oz||Cz'$ (рис. 86). Расстояние OC между осями и обозначим через d. Тогда по формулам (128) будет

$$I_{Oz} = \sum m_k(y_k^2 + x_k^2), \;\; I_{Oz'} = \sum m_k({y'}_k^2 + {x'}_k^2). \tag{132}$$

Но, как видно из рисунка, для любой точки тела $x_k = x'_k - d$ и $x_k^2 = {x'}_k^2 + d^2 - 2{x'}_k d$, а $y_k = y'_k$. Подставляем эти значения x_k, y_k в выражение для I_{oz} и вынося общие множители d^2 и $2d$ за скобки, получим

$$I_{Oz} = \sum m_k({y'}_k^2 + {x'}_k^2) + (\sum m_k)d^2 - 2d\sum m_k{x'}_k. \tag{133}$$

В правой части равенства, согласно (132), первая сумма равна $I_{cz'}$, а вторая — массе тела . Найдем значение третьей суммы.

На основании формул (127) для координат центра масс $\sum m_k x'_k = Mx'_c$. Так как в нашем случае точка является началом координат, то $x'c = 0$ и, следовательно, $\sum m_k x'_k = 0$. окончательно получаем

$$I_{Oz} = I_{Oz'} + Md^2. \tag{134}$$

Формула выражает теорему Гюйгенса:

Теорема. Момент инерции тела относительно данной оси равен моменту инерции относительно оси, ей параллельной, проходящей через центр масс тела, сложенному с произведением массы всего тела на квадрат расстояния между осями.

42.4 Тензоры инерции простейших абсолютно твердых тел

1. Однородный диск

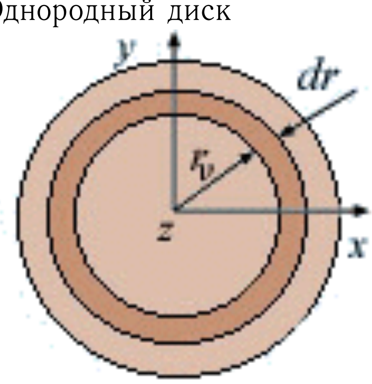


Рис. 87

Имеем однородный диск массы m и радиуса R. Разобьем диск на кольца с радиусами r_ν и массами m_ν. Тогда

$$I_{zz} = \sum_{\nu=1}^{n} r_\nu^2 m_\nu = \sum_{\nu=1}^{n} r_\nu^2 \gamma \Delta S_\nu,$$

где ΔS_ν — площадь кольца с внутренним радиусом r_ν и внешним $r_\nu + \Delta r_\nu$. Плотность однородного диска: $\gamma = m/(\pi R^2)$, а $\Delta S_\nu = 2\pi r_\nu \Delta r_\nu$. Поэтому $I_{zz} = 2m/R^2 \sum_{\nu=1}^{n} r_\nu^3 \Delta r_\nu$. При $n \to \in \infty$

$$I_{zz} = 2m/R^2 \int_0^R r^3 \, dr = mR^2/2.$$

И окончательно имеем для момента инерции диска относительно оси z выражение:

$$I_{zz} = mR^2/2.$$

Поскольку диск бесконечно тонкий неравенство $I_{xx} + I_{yy} \geq I_{zz}$ переходит в равенство $I_{xx} + I_{yy} = I_{zz}$. Но в силу симметрии моменты инерции относительно осей x и y равны, поэтому имеем:

$$I_{xx} = I_{yy} = I_{zz}/2 = mR^2/4.$$

В силу наличия плоскостей симметрии центробежные моменты инерции равны нулю $I_{xy} = I_{xz} = I_{zy} = 0$, поэтому

$$I = \begin{vmatrix} \frac{mR^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mR^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mR^2}{4} \end{vmatrix} = \frac{mR^2}{4} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}.$$

2. Стержень

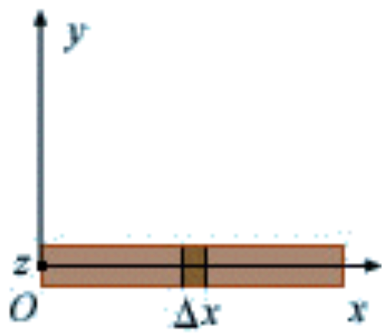


Рис. 88

$$I = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{ml^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{ml^2}{3} \end{vmatrix} = \frac{ml^2}{3} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

43 Кинетическая энергия

43.1 Кинетическая энергия материальной точки

Определение. Кинетическая энергия материальной точки — скалярная мера механического движения, равная:

$$T_i = \frac{m_i v_i^2}{2}$$

т.е. половина произведения массы точки на квадрат ее скорости.

43.2 Кинетическая энергия системы материальных точек

Определение. Кинетическая энергия системы n материальных точек равна сумме кинетических энергий всех точек:

$$T = \sum_{i=1}^{n} T_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i v_i^2}{2}$$

- Теорема Кенига:

  Кинетическая энергия системы материальных точек в ее абсолютном движении складывается из кинетической энергии центра масс системы, в предположении, что в нем сосредоточена масса всей системы, и кинетической энергии системы в ее движении относительно центра масс.

Доказательство.

$Cx'y'z'$ — кенигова система координат, так как $\vec{r}_i = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$ — радиус-вектор центра масс системы. Поэтому

$$\vec{r}_i' = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i'}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = 0 \tag{135}$$

$$\vec{v}_i^{\text{абс}} = \vec{v}_i^{\text{отн}} + \vec{v}_i^{\text{пер}} = \frac{d\vec{r}_i'}{dt} + \vec{v}_C \tag{136}$$

Выражение для кинетической энергии системы имеет вид:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i \left(\vec{v}_i^{\text{абс}}\right)^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i \left(\frac{d\vec{r}_i'}{dt} + \vec{v}_C\right)^2$$

или

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i \left(\frac{d\vec{r}_i'}{dt}\right)^2 + \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d\vec{r}_i'}{dt} \cdot \vec{v}_C + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i (\vec{v}_C)^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i (\vec{v}_i^{\text{отн}})^2 + \frac{1}{2} \vec{v}_C^2 \sum_{i=1}^{n} m_i$$

Так как

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d\vec{r}_i'}{dt} \cdot \vec{v}_C = \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d\vec{r}_i'}{dt} \cdot \vec{v}_C = \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i' \cdot \vec{v}_C\right) = 0$$

(см (135)). Поэтому

$$T = \frac{1}{2} m v_C^2 + T^{\text{отн}}$$

Что и требовалось доказать.

43.3 Кинетическая энергия абсолютно твердого тела при поступательном движении

По определению кинетической энергии механической системы

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i v_i^2$$

Но при поступательном движении все точки тела имеют равные скорости $\vec{v}_i = \vec{v}$, поэтому:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i v_i^2 = \frac{v^2}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i = \frac{m v^2}{2}$$

или

$$T = \frac{m v^2}{2}$$

43.4 Кинетическая энергия абсолютно твердого тела при вращении вокруг неподвижной оси

Для любой точки тела $v_i = \omega h_i$, поэтому

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i v_i^2 = \frac{\omega^2}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i h_i^2 = \frac{\omega^2}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i (x_i^2 + y_i^2)$$

т.е.

$$T = \frac{I_{zz}\omega^2}{2},$$

где $I_{zz} = \sum_{i=1}^{n}(x_i^2 + y_i^2)$ — осевой момент инерции тела.

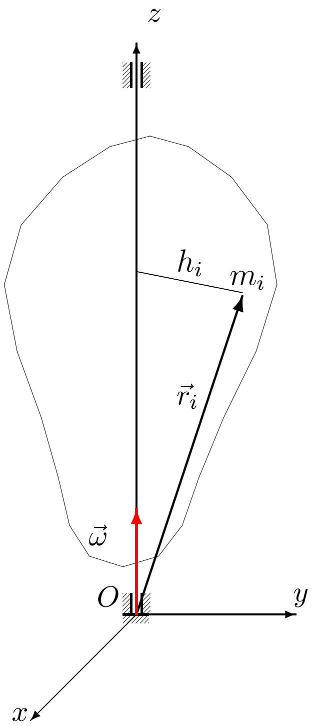


Рис. 89

43.5 Кинетическая энергия абсолютно твердого тела в общем случае

Масса тела m, скорость центра масс v_C, угловая скорость тела $\vec{\omega}$, тензор момента инерции в центральных осях I_C. Имеем выражение для кинетической энергии[3]:

$$T = \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot(I_C\vec{\omega}).$$

44 Работа и мощность сил

Определение. Элементарным перемещением точки называется бесконечно малое перемещение, равное дифференциалу радиуса вектора точки.

Определение. Элементарной работой силы на перемещении называется скалярное произведение вектора силы на вектор элементарного перемещения точки приложения силы:

Определение. Мощностью силы называется скалярное произведение вектора силы на вектор скорости точки приложения силы:

$$N = \vec{F}\cdot\vec{v}$$

[3]Осадченко Н.В.

или

$$N = |\vec{F}||\vec{v}|\cos\alpha = F_x v_x + F_y v_y + F_z v_z$$

Данное определение согласуется с определением мощности, как работе в единицу времени:

$$N = \frac{dA}{dt} = F_x\frac{dx}{dt} + F_y\frac{dy}{dt} + F_z\frac{dz}{dt} = F_x v_x + F_y v_y + F_z v_z$$

Мощность системы сил, приложенных к абсолютно твердому телу, равна сумме мощностей всех сил:

$$N = \sum_{\eta=1}^{n} N_\eta = \sum_{\eta=1}^{n} \vec{F}_\eta \cdot \vec{v}_\eta$$

но $\vec{v}_\eta = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}$, поэтому

$$N = \sum_{\eta=1}^{n} \vec{F}_\eta \cdot (\vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r})$$

$$N = \sum_{\eta=1}^{n} \vec{F}_\eta \cdot \vec{v}_0 + \sum_{\eta=1}^{n}(\vec{F}_\eta \cdot [\vec{\omega} \times \vec{r}]) = (\sum_{\eta=1}^{n} \vec{F}_\eta \cdot \vec{v}_0) + \sum_{\eta=1}^{n}(\vec{\omega} \cdot [\vec{r} \times \vec{F}_\eta])$$

$$N = \vec{R} \cdot \vec{v}_0 + \vec{\omega} \cdot \sum_{\eta=1}^{n} \vec{r} \times \vec{F}_\eta = \vec{R} \cdot \vec{v}_0 + \vec{\omega} \cdot \vec{L}_0.$$

Таким образом,

$$N = \vec{R} \cdot \vec{v}_0 + \vec{\omega} \cdot \vec{L}_0$$

Т.е., мощность системы сил, приложенных к абсолютно твердому телу, равна сумме скалярных произведений главного вектора на скорость полюса О и главного момента сил относительно полюса О на вектор угловой скорости твердого тела.

См. также частные случаи для вычисления мощности:

44.1 Поступательное движение абсолютно твердого тела

При поступательном движении выражение для мощности $N = \vec{R} \cdot \vec{v}_0 + \vec{\omega} \cdot \vec{L}_0$ принимает вид:

$$N = \vec{R} \cdot \vec{v},$$

так как вектор угловой скорости равен нулю и скорости всех точек тела одинаковы.

44.2 Вращение абсолютно твердого тела вокруг оси, проходящей через точку О

При вращении твердого тела вокруг оси, проходящей через точку O, скорость точки O равна нулю и поэтому выражение для мощности $N = \vec{R} \cdot \vec{v}_0 + \vec{\omega} \cdot \vec{L}_0$ принимает вид:

$$N = \vec{L}_0 \cdot \vec{\omega} = L_{0x}\omega_x + L_{0y}\omega_y + L_{0z}\omega_z = L_{0z}\omega_z$$

так как $\omega_x = 0, \omega_y = 0$

44.3 Система сил приводится к равнодействующей, приложенной в точке O

В этом случае главный момент равен нулю и выражение для мощности $N = \vec{R} \cdot \vec{v}_0 + (\vec{\omega} \cdot \vec{L}_0$ принимает вид:

$$N = \vec{R} \cdot \vec{v}_0$$

Замечание: Равнодействующая равна главному вектору.

44.4 Система сил приводится к паре сил

Так как система сил приводится к паре, выражение для мощности $N = \vec{R} \cdot \vec{v}_0 + \vec{\omega} \cdot \vec{L}_0$ принимает следующий вид:

$$N = \vec{L} \cdot \vec{\omega}$$

здесь $\vec{L}$ — момент пары сил.

45 Связи и ограничения на движение твердых тел

Определение. Связями называются ограничения, накладываемые на координаты и скорости точек механической системы, которые выполняются при любых действующих на систему силах.

Конструктивно связи реализуются при помощи шарниров, стержней, нитей, поверхностей и т.п. Математически связи выражаются в виде уравнений или неравенств, содержащих координаты и скорости точек системы и время:

$$f_i(\vec{r}_1, \vec{r}_2, ..., \vec{r}_n, \vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n, t) \diamond F_i$$

Здесь i =1,2,... k (количество связей, наложенных на систему), знак $\diamond$ обозначает один из знаков: =,<,>; $\vec{r}_1, \vec{r}_2, ..., \vec{r}_n$ — радиусы-векторы, а $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n$ - скорости точек системы.

Определение. Возможным перемещением точки называется бесконечно малое воображаемое перемещение точки, допускаемое связями в данный момент времени:

$$\delta\vec{r}_\eta = \delta x_\eta \vec{i} + \delta y_\eta \vec{j} + \delta z_\eta \vec{k}$$

Здесь $\delta x_\eta, \delta y_\eta, \delta z_\eta$ - проекции вектора $\delta\vec{r}_\eta$ на оси координат.

Определение. Возможной скоростью называется отношение возможного перемещения к некоторому мыслимому интервалу времени:

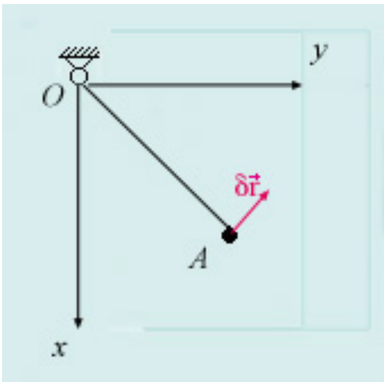
$$\vec{v}_\eta^E = \frac{\delta\vec{r}_\eta}{dt'}$$

Возможная скорость — это скорость, которую бы имела точка, если бы она совершала возможное перемещение за время dt'.

Определение. Если для любого возможного перемещения противоположное ему тоже является возможным, то связь называется удерживающей (неосвобождающейся или двусторонней).

45.1 Пример 1

Точка на невесомом абсолютно твердом стержне (маятник): $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$



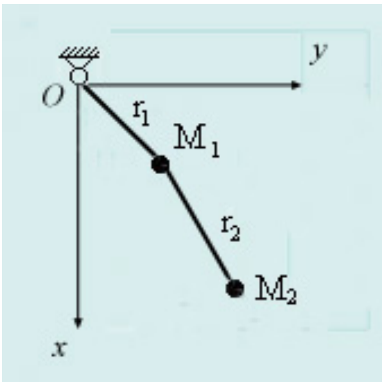


Рис. 90 Рис. 91

Точки на двух невесомых абсолютно твердых стержнях:

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = r_2^2$$

$$x_1^2 + y_1^2 = r_1^2$$

Кроме того, эти связи являются стационарными и голономными.

Определение. Если для некоторого возможного перемещения противоположное ему не является возможным, то связь называется неудерживающей (освобождающейся или односторонней). Удерживающие связи математически выражаются равенствами, а неудерживающие — неравенствами.

45.2 Пример 2

Точка на нерастяжимой нити:

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2$$

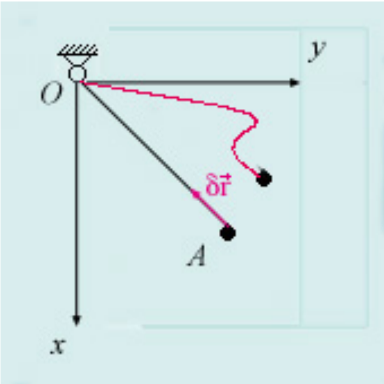


Рис. 92

Определение. Если в уравнение связи время не входит явно, то такая связь называется стационарной (склерономной):

$$f(x_\eta, y_\eta, z_\eta) = 0.$$

здесь x_η, y_η, z_η могут зависеть от t.

Определение. Если в уравнение связи время входит явно, то такая связь называется нестационарной (реономной):

$$f(x_\eta, y_\eta, z_\eta, t) = 0$$

При стационарных связях действительное перемещение совпадает с одним из возможных перемещений. При нестационарной связи действительное перемещение может не совпадать ни с одним из возможных перемещений.

45.3 Пример стационарной связи

Точка на поверхности

Рассмотрим точку (x, y, z) на поверхности:

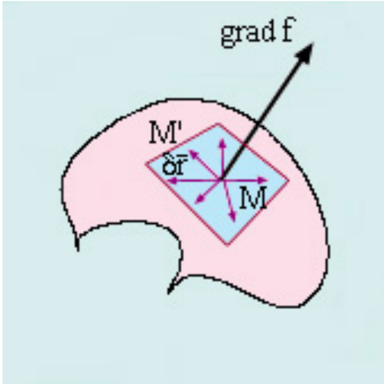


Рис. 93

$$f(x, y, z) = 0 \tag{137}$$

Пусть точка получила некоторое возможное перемещение:

$$M'(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z).$$

Так как точка должна оставаться на поверхности, то приращения координат удовлетворяют равенству:

$$f(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z) = 0.$$

Разложим левую часть последнего уравнения в ряд Тейлора:

$$f(x, y, z) + \frac{\partial f}{\partial x}\delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\delta z + ... = 0.$$

Здесь многоточием обозначены члены ряда, имеющие второй и более высокий порядок малости в сравнении с приращениями координат. С учетом выражения (137) получим:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\delta z = 0.$$

Так как возможным перемещением точки в данном случае является вектор $\delta\vec{r}$, проекциями которого на оси координат являются $\delta x, \delta y, \delta z$, то последнее выражение можно переписать:

$$\vec{\text{grad}}\ f \cdot \delta\vec{r} = 0.$$

Вектор $\vec{\text{grad}}\ f$ направлен по нормали к рассматриваемой поверхности, а вектор возможного перемещения точки лежит в плоскости, касательной к поверхности в данной точке.
В случае стационарной связи действительное перемещение удовлетворяет уравнению:

$$df = \vec{\text{grad}}\ f \cdot \delta\vec{r} = 0.$$

А в случае нестационарной связи — уравнению:

$$df = \vec{\text{grad}}\ f \cdot \delta\vec{r} + \frac{\partial f}{\partial t}dt = 0$$

Т.о., при стационарных связях действительное перемещение $d\vec{r}$ совпадает с одним из возможных перемещений. При нестационарной связи действительное перемещение может не совпадать ни с одним из возможных перемещений.

45.4 Пример нестационарной связи

Точка на сфере переменного радиуса (нестационарная связь):

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2(t).$$

Определение. Связь называется геометрической, если в уравнение связи входят только координаты точек:

$$f(x_\eta, y_\eta, z_\eta) = 0$$

Определение. Связь называется кинематической, если в уравнение связи входят координаты и скорости точек механической системы:

$$f(x_\eta, y_\eta, z_\eta, v_{\eta x}, v_{\eta y}, v_{\eta z}) = 0$$

Определение. Связь называется голономной, если она выражается интегрируемым дифференциальным уравнением для координат и скоростей точек механической системы.

Замечание: Уравнение

$$f(x_\eta, y_\eta, z_\eta, v_{\eta x}, v_{\eta y}, v_{\eta z}, t) = 0 \tag{138}$$

называется интегрируемым, если существует функция $F = F(x_\eta, y_\eta, z_\eta, t)$, такая что уравнение (138) может быть записано в виде

$$\frac{dF}{dt}(x_\eta, y_\eta, z_\eta, t) \equiv f(x_\eta, y_\eta, z_\eta, v_{\eta x}, v_{\eta y}, v_{\eta z}, t) = 0$$

Определение. Связь называется неголономной, если она выражается неинтегрируемым дифференциальным уравнением для координат и скоростей точек механической системы.

Определение. Связи, наложенные на механическую систему, называются идеальными, если сумма элементарных работ сил реакций этих связей на любом возможном перемещении равна нулю:

$$\sum_{\eta=1}^{n} \vec{R}_\eta \cdot \delta\vec{r}_\eta = 0 \tag{139}$$

Здесь

$$\vec{R}_\eta = R_{\eta x}\vec{i} + R_{\eta y}\vec{j} + R_{\eta z}\vec{k}$$

$$\delta\vec{r}_\eta = \delta r_{\eta x}\vec{i} + \delta r_{\eta y}\vec{j} + \delta r_{\eta z}\vec{k}$$

Согласно определению скалярного произведения двух векторов выражение (139) можно переписать в виде:

$$\sum_{\eta=1}^{n}(R_{\eta x}\delta x_\eta + R_{\eta y}\delta y_\eta + R_{\eta z}\delta z_\eta) = 0$$

или

$$\sum_{\eta=1}^{n} |\vec{R}_\eta||\delta\vec{r}_\eta| cos\alpha_\eta = 0$$

где α_η — угол между векторами $\vec{R}_\eta$ и $\delta\vec{r}_\eta$.

Определение идеальных связей можно дать с использованием понятия мощности.

Определение. Связи, наложенные на механическую систему, называются идеальными, если сумма мощностей сил реакций этих связей равна нулю:

$$\sum_{\eta=1}^{n} \vec{R}_\eta \cdot \delta\vec{r}_\eta^{\,E} = 0 \tag{140}$$

Согласно определению скалярного произведения двух векторов выражение (140) можно переписать в виде:

$$\sum_{\eta=1}^{n}(R_{\eta x}\delta r^E_{\eta x}+R_{\eta y}\delta r^E_{\eta y}+R_{\eta z}\delta r^E_{\eta z})=0$$

или

$$\sum_{\eta=1}^{n}|\vec{R}_\eta||\delta\vec{r}^E_\eta|\cos\beta_\eta=0$$

46 Принцип Даламбера-Лагранжа (общее уравнение динамики)

Для системы с идеальными связями в любой момент времени сумма элементарных работ активных сил и даламберовых сил инерции равняется нулю:

$$\sum_{\eta=1}^{n}\vec{F}_\eta\cdot\delta\vec{r}_\eta+\sum_{\eta=1}^{n}\vec{\Phi}^{\text{ин}}_\eta\cdot\delta\vec{r}_\eta=0 \tag{141}$$

здесь
$\vec{F}_\eta$ — активная сила, приложенная к точке с массой m_η
$\vec{\Phi}^{\text{ин}}_\eta=m_\eta\vec{w}_\eta$
Принцип Даламбера-Лагранжа можно сформулировать и с использованием понятия мощности:

$$\sum_{\eta=1}^{n}\vec{F}_\eta\cdot\vec{v}^E_\eta+\sum_{\eta=1}^{n}\vec{\Phi}^{\text{ин}}_\eta\cdot\vec{v}^E_\eta=0 \tag{142}$$

Уравнения (141) и (142) называются общими уравнениями динамики

В случае равновесия механической системы ускорения всех точек системы равны нулю. Поэтому уравнения (141) и (142) принимают вид:

$$\sum_{\eta=1}^{n}\vec{F}_\eta\cdot\delta\vec{r}_\eta=0 \tag{143}$$

$$\sum_{\eta=1}^{n}\vec{F}\cdot\vec{v}^E_\eta=0 \tag{144}$$

Уравнения (143) и (144) являются математическим выражение ***принципа возможных перемещений*** (возможных мощностей):
Для того, чтобы механическая система с идеальными (удерживающими) стационарными связями находилась в равновесии, необходимо и достаточно, чтобы сумма элементарных работ всех активных сил на любом возможном перемещении из предполагаемого состояния равновесия равнялась нулю.

47 Обобщенные координаты механической системы

Рассмотрим механическую систему из n точек, на которую наложены k удерживающих голономных связей. Тогда для $3n$ координат системы выполняются следующие условия:

$$f_1(x_1,y_1,z_1,x_2,y_2,z_2,...,x_n,y_n,z_n,t)=0,$$

$$f_2(x_1,y_1,z_1,x_2,y_2,z_2,...,x_n,y_n,z_n,t)=0,$$

$$...$$

$$f_k(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, ..., x_n, y_n, z_n, t) = 0.$$

Выберем первые k координаты и перенесем оставшиеся $s = 3 \cdot n - k$ в правые части уравнений. Далее разрешим полученные уравнения относительно первых k координат, а остальные s — переобозначим:

$$x_1 = x_1(q_1, q_2, ..., q_s, t),$$

$$y_1 = y_1(q_1, q_2, ..., q_s, t),$$

$$z_1 = z_1(q_1, q_2, ..., q_s, t),$$

$$x_2 = x_2(q_1, q_2, ..., q_s, t),$$

$$...$$

$$...$$

$$x_n = q_{s-2},$$

$$y_n = q_{s-1},$$

$$z_n = q_s.$$

Таким образом, координаты всех точек системы будут функциями s независимых параметров системы и времени.

Определение. Независимые параметры, однозначно определяющие положение всех точек механической системы, называются обобщенными координатами этой системы. Число обобщенных координат является числом степеней свободы.

Систему можно записать в векторном виде:

$$\vec{r}_\eta = r_\eta(q_1, q_2, ..., q_s, t); \eta = 1, 2, ..., n \tag{145}$$

Примеры:

Пример 1: Плоский математический маятник:

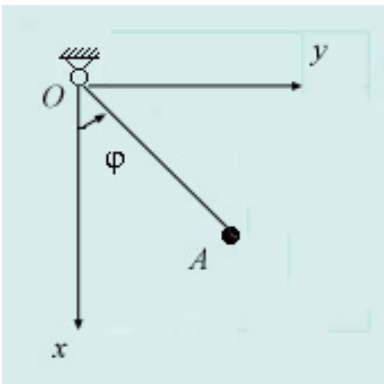


Рис. 94

OA — невесомый абсолютно твердый стержень, O — цилиндрический шарнир.

$n = 1$

Уравнения связей:

$x_A^2 + y_A^2 + z_A^2 = R^2$; $z_A = 0 (k = 2)$,

$S = 3 \cdot n - k = 1$.

Если за обобщенную координату выбрать, то имеем следующие уравнения:

$x_A = R\cos\varphi; y_A = R\sin\varphi; z_A = 0$

Пример 1: Точка M на поверхности сферы:

$n = 1,\ k = 1.$

Уравнение связи:

$x^2 + y^2 + z^2 = R^2,$

$S = 3 \cdot n - k = 2.$

Если за обобщенные координаты выбрать γ (широту) и φ (долготу), то имеем следующие уравнения:

$$x_M = R\cos\varphi\cos\gamma; y_M = R\cos\varphi\sin\gamma; z_M = R\sin\gamma$$

Если закон изменения обобщенных координат известен

$$q_1 = q_1(t);\ q_2 = q_2(t); ...;\ q_s = q_s(t), \tag{146}$$

то, подставив (146) в (145), можно найти траектории движения точек системы.

Уравнения (146) определяют траекторию некоторой точки в s-мерном пространстве. Пространство $q_1, q_2, ..., q_s$ называется конфигурационным пространством механической системы. Изучение движения механической системы можно свести к нахождению траектории изображающей точки в конфигурационном пространстве.

Рассмотрим точку M', положение которой определяется как

$$M'(q_1 + \delta q_1, q_2 + \delta q_2, ..., q_s + \delta q_s)$$

$\delta q_1, \delta q_2, ..., \delta q_s$ — вариации обобщенных координат

Положению точки M' соответствует радиус-вектор

$$\vec{r}'_\eta = \vec{r}'_\eta(q_1 + \delta q_1, q_2 + \delta q_2, ..., q_s + \delta q_s, t); \eta = 1, 2, ..., n$$

При перемещении изображающей точки в точку $'$ (в конфигурационном пространстве) точка с массой m_η механической системы совершает перемещение

$$\delta\vec{r}_\eta = \vec{r}'_\eta - \vec{r}_\eta = \vec{r}'_\eta(q_1 + \delta q_1, q_2 + \delta q_2, ..., q_s + \delta q_s, t) - \vec{r}_\eta(q_1, q_2, ..., q_s, t)$$

Разложим это выражение в ряд Тейлора:

$$\delta\vec{r}_\eta = \vec{r}_\eta(q_1, q_2, ..., q_s, t) + \frac{\partial\vec{r}_\eta}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial\vec{r}_\eta}{\partial q_2}\delta q_2 + ... + \frac{\partial\vec{r}_\eta}{\partial q_s}\delta q_s - \vec{r}_\eta(q_1, q_2, ..., q_s, t),$$

или

$$\delta\vec{r}_\eta = \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial\vec{r}_\eta}{\partial q_i}\delta q_i \tag{147}$$

Выражение (147) устанавливает связь между возможными перемещениями точек механической системы и вариациями обобщенных координат.

Вычислим элементарную работу активных сил на возможном перемещении, определяемом выражением (147) :

$$\delta A = \sum_{\eta=1}^{n} \vec{F}_\eta \cdot \delta\vec{r}_\eta = \sum_{\eta=1}^{n} \vec{F}_\eta \cdot \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial\vec{r}_\eta}{\partial q_i}\delta q_i = \sum_{i=1}^{s}\sum_{\eta=1}^{n} \vec{F}_\eta \cdot \frac{\partial\vec{r}_\eta}{\partial q_i}\delta q_i$$

или

$$\delta A = \sum_{i=1}^{s} Q_i \delta q_i, \tag{148}$$

где

$$Q_i = \sum_{\eta=1}^{n} \vec{F}_\eta \cdot \frac{\partial\vec{r}_\eta}{\partial q_i} = \sum_{\eta=1}^{n} F_{\eta x}\frac{\partial x_\eta}{\partial q_i} + F_{\eta y}\frac{\partial y_\eta}{\partial q_i} + F_{\eta y}\frac{\partial y_\eta}{\partial q_i} \tag{149}$$

называется ***обобщенной силой***; $F_{\eta x}, F_{\eta y}, F_{\eta y}$ — проекции вектора $\vec{F}_\eta$ на оси координат, а x_η, x_η, z_η — координаты точки с массой m_η

Определение. Обобщенной силой называется коэффициент перед вариацией обобщенной координаты в выражении для сумм элементарных работ всех активных сил.

Если использовать понятие мощности

$$N = \sum_{\eta=1}^{n} \vec{F}_\eta \cdot \vec{V}_\eta^E = \sum_{i=1}^{s} Q_i \dot{q}_i^E, \tag{150}$$

где $\dot{q}_i^E = \frac{dq_i^E}{dt}$ — возможная обобщенная скорость, то обобщенную силу можно определить так:

Определение. Обобщенной силой называется коэффициент перед возможной обобщенной скоростью в выражении для суммы мощностей всех активных сил.

Размерность обобщенной силы:

$$[Q] = \frac{[F][r]}{q} = \frac{Hm}{[q]} \text{ (согласно выражению (149))}$$

Пример 1

Пусть обобщенная координата — декартова координата точки.

$[q] = m$, следовательно, $[Q] = \frac{Hm}{m} = H$(размерность силы)

Пример 2

Пусть обобщенная координата — угол.

$[q] = rad$, следовательно, $[Q] = \frac{Hm}{rad} =$ (размерность момента).

48 Тождества Лагранжа

Вывод вспомогательных тождеств Лагранжа.

Найдем *скорость точки с массой* m_η. Для этого продифференцируем по времени уравнение

$$\vec{r}_\eta = \vec{r}_\eta(q_1, q_2, ..., q_s, t), \tag{151}$$

где η=1,2,3,...,n (см. Обобщённые координаты механической системы, с. 62)

$$\vec{V}_\eta = \frac{d\vec{r}_\eta}{dt} = \frac{d}{dt}\vec{r}_\eta(q_1, q_2, ..., q_s, t), \tag{152}$$

или

$$\vec{V}_\eta = \frac{\partial \vec{r}_\eta}{\partial q_1}\frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial \vec{r}_\eta}{\partial q_2}\frac{dq_2}{dt} + ... + \frac{\partial \vec{r}_\eta}{\partial q_s}\frac{dq_s}{dt} + \frac{\partial \vec{r}_\eta}{\partial t} = \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}_\eta}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial \vec{r}_\eta}{\partial t}, \tag{153}$$

наконец

$$\vec{V}_\eta = \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}_\eta}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial \vec{r}_\eta}{\partial t}, \tag{154}$$

где $\dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt}$ — обобщённая скорость

$$\vec{V}_\eta = \vec{V}_\eta(q_i, \dot{q}_i, t). \tag{155}$$

Таким образом, скорость точки является функцией обобщенных координат, скоростей и времени.

Ускорение точки с массой m_η.

$$\vec{a}_\eta = \frac{d\vec{V}_\eta}{dt} = \frac{\partial \vec{V}_\eta}{\partial q_1}\frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial \vec{V}_\eta}{\partial q_2}\frac{dq_2}{dt} + ... + \frac{\partial \vec{V}_\eta}{\partial q_s}\frac{dq_s}{dt} + \frac{\partial \vec{V}_\eta}{\partial \dot{q}_1}\frac{d\dot{q}_1}{dt} + \frac{\partial \vec{V}_\eta}{\partial \dot{q}_2}\frac{d\dot{q}_2}{dt} + ... + \frac{\partial \vec{V}_\eta}{\partial \dot{q}_s}\frac{d\dot{q}_s}{dt} + \frac{\partial \vec{V}_\eta}{\partial t} \tag{156}$$

или

$$\vec{a}_\eta = \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial \vec{V}_\eta}{\partial q_i}\dot{q}_i + \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial \vec{V}_\eta}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i + \frac{\partial \vec{V}_\eta}{\partial t} \tag{157}$$

Дифференцируя по времени выражение (154), получаем:

$$\vec{a}_\eta = \frac{d\vec{V}_\eta}{dt} = \sum_{i=1}^{s}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\vec{r}_\eta}{\partial q_i}\right)\dot{q}_i + \frac{\partial\vec{r}_\eta}{\partial q_i}\frac{d\dot{q}_i}{dt}\right] + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\vec{r}_\eta}{\partial t}\right), \tag{158}$$

или

$$\vec{a}_\eta = \frac{d\vec{V}_\eta}{dt} = \sum_{i=1}^{s}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\vec{r}_\eta}{\partial q_i}\right)\dot{q}_i + \sum_{i=1}^{s}\frac{\partial\vec{r}_\eta}{\partial q_i}\ddot{q}_i + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\vec{r}_\eta}{\partial t}\right). \tag{159}$$

Сравнивая выражения (157) и (159), получим

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\vec{r}_\eta}{\partial q_i}\right) = \frac{\partial\vec{V}_\eta}{\partial q_i}, \tag{160}$$

$$\frac{\partial\vec{r}_\eta}{\partial q_i} = \frac{\partial\vec{V}_\eta}{\partial\dot{q}_i}, \tag{161}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\vec{r}_\eta}{\partial t}\right) = \frac{\partial\vec{V}_\eta}{\partial t}. \tag{162}$$

Выражения (160), (161) и (162) называются **тождествами Лагранжа**

49 Уравнения Лагранжа

Чтобы найти уравнения движения механической системы в обобщенных координатах, обратимся к общему уравнению динамики

$$\sum\delta A_k^{\text{а}} + \sum\delta A_k^{\text{и}} = 0. \tag{163}$$

Для общности не будем предполагать, что все наложенные на систему связи являются идеальными. Поэтому в первую сумму могут входить как работы активных сил, так и, например, работы сил трения.

Пусть система имеет s степеней свободы и ее положение определяется обобщенными координатами $q_1, q_2, ...q_s$. Тогда

$$\sum\delta A_k = Q_1\delta q_1 + Q_2\delta q_2 + ... + Q_s\delta q_s. \tag{164}$$

Очевидно следующее преобразование

$$\sum\delta A_k^{\text{и}} = Q_1^{\text{и}}\delta q_1 + Q_2^{\text{и}}\delta q_2 + ... + Q_s^{\text{и}}\delta q_s, \tag{165}$$

где $Q_1^{\text{и}}, Q_2^{\text{и}}, ..., Q_s^{\text{и}}$ — обобщённые силы инерции, которые равны

$$Q_i^{\text{и}} = \sum\vec{F}_k^{\text{и}}\frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_i} \tag{166}$$

Подставляя величины (164) и (165) в уравнение (163), найдем

$$(Q_1 + Q_1^{\text{и}})\delta q_1 + ... + (Q_s + Q_s^{\text{и}})\delta q_s = 0.$$

Так как все $\delta q_1, \delta q_2, ..., \delta q_s$ между собой независимы, то полученное равенство может выполняться тогда и только тогда, когда каждый из коэффициентов при $\delta q_1, \delta q_2, ..., \delta q_s$ в отдельности равен нулю. Следовательно, должно быть

$$(Q_1 + Q_1^{\text{и}}) = 0, ..., (Q_s + Q_s^{\text{и}}) = 0. \tag{167}$$

Полученными уравнениями можно непосредственно пользоваться для решения задач динамики. Преобразуем сначала соответствующим образом величину $Q_1^{\text{и}}$. Поскольку сила инерции любой из точек системы

$$\vec{F}_k^{\text{и}} = -m_k\vec{a}_k = -m_k\frac{d\vec{V}_k}{dt}$$

то первая из формул (166) дает

$$-Q_1^{\text{и}} = \sum \frac{m_k d\vec{V}_k}{dt}\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_1}. \tag{168}$$

Чтобы выразить $Q_1^{\text{и}}$ через кинетическую энергию системы, надо преобразовать правую часть равенства (168) так, чтобы она содержала только скорости V_k точек системы. С этой целью заметим прежде всего, что

$$\frac{d\vec{V}_k}{dt}\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_1} = \frac{d}{dt}\left(\vec{V}_k\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_1}\right) - \vec{V}_k\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_1}\right). \tag{169}$$

Дальнейшее преобразование осуществляется с помощью следующих двух равенств:

$$\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_1} = \frac{\partial \vec{V}_k}{\partial \dot{q}_1}, \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_1} = \frac{d\vec{V}_k}{dq_1}. \tag{170}$$

Докажем сначала справедливость первого из них. Так как согласно

$$\vec{r}_k = \vec{r}_k(q_1, q_2, ..., q_s),$$

то

$$\vec{V}_k = \frac{d\vec{r}_k}{dq_1} = \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_1}\dot{q}_1 + ... + \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_s}\dot{q}_s$$

и

$$\frac{\partial \vec{V}_k}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_1}.$$

Справедливость второго из равенств (170) следует из того, что операции полного дифференцирования по t и частного по q_1 переместимы, т.е.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_1} = \frac{\partial}{\partial q_1}\frac{d\vec{r}_k}{dt} = \frac{d\vec{V}_k}{dq_1}.$$

Подставив теперь величины (170) в (169), получим

$$\frac{d\vec{V}_k}{dt}\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_1} = \frac{d}{dt}\left(\vec{V}_k\frac{\partial \vec{V}_k}{\partial \dot{q}_1}\right) - \vec{V}_k\frac{\partial \vec{V}_k}{\partial q_1} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial \vec{V}_k^2}{\partial \dot{q}_1}\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial \vec{V}_k^2}{\partial q_1}$$

и формула (168), если учесть, что сумма производных равна производной от суммы, а $\vec{V}_k^2 = V_k^2$, примет вид

$$Q_1^{\text{и}} = \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_1}\left(\sum \frac{m_k V_k^2}{2}\right)\right] - \frac{\partial}{\partial q_1}\left(\sum \frac{m_k V_k^2}{2}\right) = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial T}{\partial q_1},$$

где $T = \sum m_k V_k^2/2$ — кинетическая энергия системы.

Аналогичные выражения получатся для всех остальных обобщенных сил инерции. В результате равенства (167) дадут окончательно

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} = Q_1,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_2} = Q_2,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_s} = Q_s.$$

Эти уравнения и представляют собой дифференциальные уравнения движения системы в обобщенных координатах или уравнения Лагранжа 2-го рода.

50 Теория удара

50.1 Определения

Определение. Явление, при котором скорости точек тела за малый промежуток времени меняются на конечную величину, называется ударом. Ударный импульс

$$\vec{S}_{\text{уд}} = \int_0 \vec{F}_{\text{уд}} dt = \vec{F}_{\text{уд}}^{\text{ср}} \tau \tag{171}$$

отличается от импульса неударных сил тем, что время удара τ мало, ударные силы $F_{\text{уд}}$ велики, а $S_{\text{уд}}$ принимает конечное значение. Поэтому изучая удар будем пренебрегать

- неударными силами по сравнению с ударными,
- перемещениями точек тела во время удара.

Теорема об изменении количества движения (с. 42) в случае удара имеет вид

$$\vec{Q}_1 - \vec{Q}_0 = \sum \vec{S}_k^e \tag{172}$$

Интегрируя теорему об изменении момента (относительно точки A) количества движения

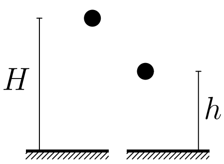
$$\frac{d\vec{K}_A}{dt} = \sum_k \vec{m}_A(\vec{F}_k),$$

в случае удара, получим с учетом (171)

$$\vec{K}_A^1 - \vec{K}_A^0 = \sum \vec{m}_A(\vec{S}_k^e) \tag{173}$$

50.2 Удар материальной точки о поверхность

С некоторой высоты H точка массой m падает на поверхность и отскакивает на высоту h (рис. 95).



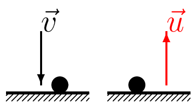


Рис. 95 Рис. 96

Скорость точки при ударе о поверхность v, при отскоке от поверхности u (рис. 96). Очевидно, $u < v$.

Определение. Отношение скоростей

$$k = \frac{u}{v}$$

называют коэффициентом восстановления при ударе. Его можно найти экспериментально. Согласно формуле Галилея, $v = \sqrt{2gH}$, $u = \sqrt{2gh}$. Отсюда $k = \sqrt{h/H}$. Коэффициент восстановления меняется в пределах $0 \le k \le 1$.

50.3 Косой удар

Решим задачу. Материальная точка падает со скоростью v на гладкую плоскость под углом α. Под каким углом β (рис. 97) отскочит точка от поверхности, если коэффициент восстановления равен k?

Для решения задачи запишем закон изменения количества движения точки в проекции на плоскость (ось x). Так как плоскость гладкая, горизонтальных сил и их импульсов нет. Закон изменения здесь имеет форму закона сохранения

$$mu_x - mv_x = 0 \tag{174}$$

Так как $u_x = u\sin\beta$, $v_x = v\sin\alpha$, то

$$u\sin\beta = v\sin\alpha \tag{175}$$

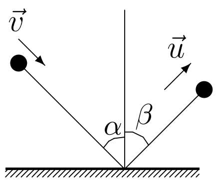


Рис. 97

Модули нормальных проекций скоростей связаны коэффициентом восстановления

$$k = (u\cos\beta)/(v\cos\alpha) \tag{176}$$

Из (175) и (176) следует

$$\operatorname{tg}\beta = (1/k)\operatorname{tg}\alpha \tag{177}$$

При $k = 0$ получим $\beta = \pi/2$, т.е. точка покатится по поверхности (мяч, брошенный в песок).

50.4 Центр удара

Твердое тело массой M вращается на оси, закрепленной на в подшипниках A и B. Подшипник A имеет подпятник, создающий реакцию, направленную вдоль оси. Определим, чему равны импульсивные реакции A и B при ударе. Выберем оси координат так, что центр масс C тела находился в плоскости Ayz. При ударе возникнет пять импульсивных реакций: три в опоре A и две в опоре B (рис. 98).

Обозначим: a — расстояние центра масс от оси, $AB = b$ — расстояние между подшипниками, ω — угловая скорость тела до удара, Ω — угловая скорость после удара.

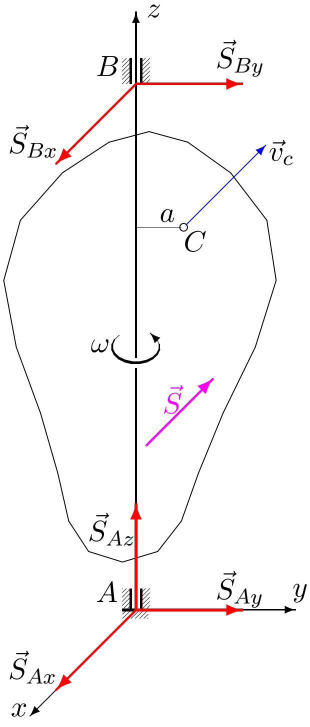


Рис. 98

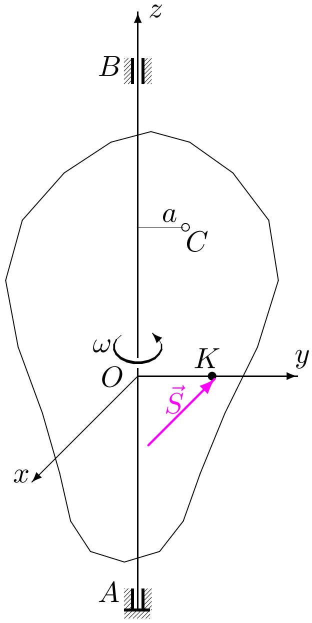


Рис. 99

Запишем уравнения (172), (173) в проекциях на оси координат. Так как проекции кинетического момента имеют вид $K_x = -J_{xz}\omega$, $K_y = -J_{yz}\omega$, $K_z = J_z\omega$, то получим

$$-Ma(\Omega-\omega) = S_{Ax} + S_{Bx} + S_x, \tag{178}$$
$$0 = S_{Ay} + S_{By} + S_y, \tag{179}$$
$$0 = S_{Az} + S_z, \tag{180}$$
$$-J_{xz}(\Omega-\omega) = -S_{By}b + m_x(\vec{S}), \tag{181}$$
$$-J_{yz}(\Omega-\omega) = S_{Bx}b + m_y(\vec{S}). \tag{182}$$
$$J_z(\Omega-\omega) = m_z(\vec{S}). \tag{183}$$

Составление правых частей (178–183) аналогично составлению уравнений равновесия пространственной статики, только вместо сил здесь берутся их импульсы. Шесть неизвестных системы (178–183): S_{Ax}, S_{Ay}, S_{Az}, S_{Bx}, S_{By} и разность угловых скоростей $(\Omega-\omega)$.

Найдем условия, при которых не возникают импульсные (ударные) реакции шарниров. Известно, что в механических устройствах ударные реакции способствуют износу и могут привести к разрушению.

Положим в (178–183): $\vec{S}_A = 0$, $\vec{S}_B = 0$. Из (179) и (180) сразу же получим, что вектор внешнего ударного импульса $\vec{S}$ должен лежать в плоскости, параллельной xAy: $S_y = 0$, $S_z = 0$. Заметим, что при $\vec{S}_A = 0$, $\vec{S}_B = 0$ вид системы (178–183) не зависит от выбора начала координат. Перенесем начало координат по оси z так, чтобы импульс $\vec{S}$ лежал в плоскости xOy (рис. 99). Так как $m_x(\vec{S}) = 0$, $m_y(\vec{S}) = 0$, то из (181) и (182) следует, что центробежные моменты инерции тела относительно новых осей равны нулю: $J_{xz} = 0$, $J_{yz} = 0$. Это возможно для тел, обладающих плоскостью симметрии xOy. Из (178) при $S_x = -S$ следует

$$Ma(\Omega-\omega) = S,$$

а из (183) имеем

$$J_z(\Omega-\omega) = Sh,$$

где обозначено $h = OK$. Из последних двух уравнений сразу же получим

$$h = \frac{J_z}{Ma}.$$

На таком расстоянии от оси вращения должен быть приложен ударный импульс, не вызывающий ударных реакций.

51 Колебания системы с 2 степенями свободы

51.1 Малые колебания

Для малых колебаний

$$T = \frac{1}{2}(a_{11}\dot{q}_1^2 + 2a_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2 + a_{22}\dot{q}_2^2)$$

$$\Pi = \Pi_0 + \frac{1}{2}(c_{11}q_1^2 + 2c_{12}q_1q_2 + c_{22}q_2^2)$$

a_{ij}, c_{ij} — инерционные и квазиупругие коэффициенты.

Используем уравнения Лагранжа 2-го рода

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial T}{\partial q_1} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_1},$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} - \frac{\partial T}{\partial q_2} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_2}.$$

Получим

$$a_{11}\ddot{q}_1 + a_{12}\ddot{q}_2 + c_{11}q_1 + c_{12}q_2 = 0,$$

$$a_{12}\ddot{q}_1 + a_{22}\ddot{q}_2 + c_{12}q_1 + c_{22}q_2 = 0.$$

Решение ищем в виде

$$q_1 = A\sin(kt+\alpha),\ \ q_2 = B\sin(kt+\alpha),$$

получим

$$(c_{11} - a_{11}k^2)A + (c_{12} - a_{12}k^2)B = 0,$$

$$(c_{12} - a_{12}k^2)A + (c_{22} - a_{22}k^2)B = 0.$$

Нетривиальное решение для A и B однородной системы возможно, если коэффициенты системы пропорциональны (определитель равен 0):

$$-\frac{c_{11} - a_{11}k^2}{c_{12} - a_{12}k^2} = -\frac{c_{12} - a_{12}k^2}{c_{22} - a_{22}k^2} = \frac{B}{A}$$

Обозначим $B/A = n$ – коэффициент формы.

Отсюда получаем уравнение частот

$$(c_{11} - a_{11}k^2)(c_{22} - a_{22}k^2) = (c_{12} - a_{12}k^2)^2$$

В результате получим две совокупности решений

$$q_1^{(1)} = A_1\sin(k_1t+\alpha_1),\ \ q_2^{(1)} = n_1A_1\sin(k_1t+\alpha_1),$$

$$q_1^{(2)} = A_2\sin(k_2t+\alpha_2),\ \ q_2^{(2)} = n_2A_2\sin(k_2t+\alpha_2).$$

Общее решение

$$q_1 = A_1\sin(k_1t+\alpha_1) + A_2\sin(k_2t+\alpha_2),$$

$$q_2 = n_1A_1\sin(k_1t+\alpha_1) + n_2A_2\sin(k_2t+\alpha_2).$$

51.2 Пример

Рассмотрим колебания двойного маятника [13].

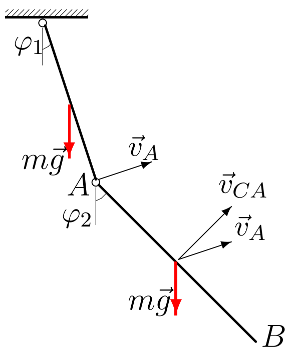


Рис. 1

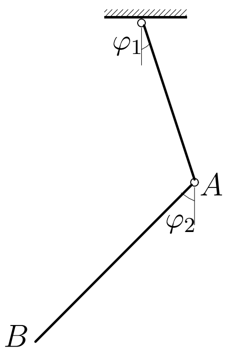


Рис. 2

В качестве обобщенных координат выберем углы φ_1, φ_2. Для малых колебаний

$$T = \frac{1}{2}(J_1\dot{\varphi}_1^2 + mv_c^2 + J_2\dot{\varphi}_2^2)$$

где $J_1 = ml^2/3$, $J_2 = ml^2/12$,

$$v_c = l\dot{\varphi}_1 + l\dot{\varphi}_2/2$$

Потенциальная энергия сил тяжести (нулевое положение в опоре)

$$\Pi = -mgl/2\cos\varphi_1 - mgl(\cos\varphi_1 + 0.5\cos\varphi_2).$$

Полагая для малых углов $\cos\varphi = 1 - \varphi^2/2$, получим

$$\Pi = \Pi_0 + \frac{1}{2}mgl(3\varphi_1^2/2 + \varphi_2^2/2)$$

Уравнение частот

$$k^4 - 6gk^2/l + (27/7)(g/l)^2 = 0$$

Решаем уравнение. Получаем частоты малых собственных колебаний

$$k_1 = 0.86\sqrt{g/l},\ k_2 = 2.3\sqrt{g/l}$$

Коэффициенты формы $n_1 = 1.43$, $n_2 = -2.1$. На рис. 51.2 изображено положение маятника при $n_2 = -2.1$.

Список литературы

[1] *Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С.* Теоретическая механика в примерах и задачах.Т.2. — М.: Наука, 1984.

[2] *Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р.,* Курс теоретической механики. — СПб.:Лань, 1998.

[3] *Вильке В.Г.* Теоретическая механика. — М.: Изд-во МГУ, 1998.

[4] *Зимина О.В., Кириллов А.И., Сальникова Т.А.* Решебник. Высшая математика. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001.

[5] *Кирсанов М.Н.* Решебник. Теоретическая механика/ Под ред. А. И. Кириллова. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002.

[6] *Кирсанов М.Н.* Сборник экзаменационных задач по динамике. — М.: МЭИ, 2005.

[7] *Кирсанов М. Н.* Задачи по теоретической механике с решениями в Maple 11. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010.

[8] *Кирсанов М. Н.* Практика программирования в системе Maple. — М.: Издательский дом МЭИ, 2011.

[9] *Новожилов И.В., Зацепин М.Ф.* Типовые расчеты по теоретической механике на базе ЭВМ. — М.: Высшая школа, 1986.

[10] *Павловский М.А., Акинфиева Л.Ю., Бойчук О.Ф.* Теоретическая механика. Динамика. — Киев: Выща шк., 1990.

[11] *Розенблат Г.М.* Механика в задачах и решениях. — М.: Едиториал УРСС, 2004. — 160 с.

[12] Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике: Учеб. пособие для техн. вузов / Яблонский А.А., Норейко С.С., Вольфсон С.А. и др.; Под ред. А.А.Яблонского.— 3-е изд — М.:Высшая школа, 1972.

[13] *Тарг С.М.* Краткий курс теоретической механики. — М.: Высшая школа, 1998.

[14] *Федута А.А., Чигарев А.В., Чигарев Ю.В.* Теоретическая механика и методы математики. — Мн.: УП "Технопринт", 2000.

Предметный указатель