

Сумма ряда¹

Найти сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{nx^{n+1}}$$

Решение

Введем замену переменной $x = 3/t$. Ряд примет вид

$$Z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n+1}}{n}.$$

Обозначим

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n}$$

Получим $Z = tS$. Найдем сумму S . Известно, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} t^n = t/(1-t),$$

следовательно, поделив на t , получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} t^{n-1} = 1/(1-t).$$

Интегрируем это равенство:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int t^{n-1} dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n} = S = \int 1/(1-t) dt = -\ln(1-t).$$

Отсюда находим $Z = tS = -t \ln(1-t)$. Возвращаемся к старой переменной $t = 3/x$. Окончательно имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{nx^{n+1}} = -(3/x) \ln(1-3/x)$$

В системе аналитических вычислений Maple этот результат можно проверить командой

```
sum(3^(n+1)/n/x^(n+1), n=1..infinity);
```

¹Зими́на О.В., Кириллов А.И., Сальникова Т.А. **Решебник. Высшая математика** – М.:ФИЗМАТЛИТ, 2001.– с.241.