§ 154. УДАР ТЕЛА О НЕПОДВИЖНУЮ ПРЕГРАДУ

Рассмотрим тело (шар) массой M, ударяющееся о неподвижную плиту. Действующей на тело ударной силой будет при этом реакция плиты; импульс этой силы за время удара назовем $\bar{S}$. Пусть нормаль к поверхности тела в точке его касания с плитой проходит через центр масс тела (для шара это будет всегда). Такой удар тела называется центральным. Если скорость $\bar{v}$ центра масс тела в начале удара направлена по нормали n к плите, то удар будет прямым, в противном случае — косым.

1. Случаи прямого удара. Составляя в этом случае уравнение (154) в проекции на нормаль n (см. рис. 375) и учитывая, что $Q_0 = M\bar{v}$, а $Q_0 = M\bar{u}$, получим

$$M(u_n - v_n) = S_n.$$

Но при прямом ударе $u_n = u$, $v_n = -v$, $S_n = S$. Следовательно,

$$M(u + v) = S.$$

Второе уравнение, необходимое для решения задачи, дает равенство (156)

$$u = kv.$$

Из полученных уравнений, зная M, v, k, найдем неизвестные величины u и S. При этом

$$S = M(1 + k)v.$$

Как видим, ударный импульс будет тем больше, чем больше коэффициент восстановления k. На эту зависимость S от k и было указано в § 153.

Чтобы определить среднюю величину ударной силы (реакции), надо дополнительно знать время удара τ, которое можно найти экспериментально.

Пример. При падении стального шара массой $m = 1$ кг с высоты $H = 3$ м на стальную плиту ($k = 0,56$) получим $v = \sqrt{2gH} \approx 7,7$м/с и $u = kv = 4,3$ м/с. Ударный импульс $S = mv(1 + k) \approx 12$Нс. Если время удара $\tau = 0,0005c$, то средняя величина ударной реакции $N_{\text{ср}}^{\text{уд}} = S/\tau = 24000$Н.

2. Случаи косого удара. Пусть в этом случае скорость $\bar{v}$ центра масс тела в начале удара образует с нормалью к плите угол α, а скорость $\bar{u}$ в конце удара — угол β (рис. 377).

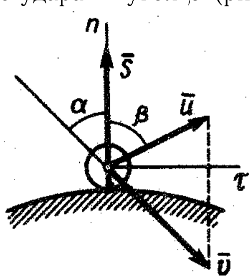

Рис. 377

Тогда уравнение (154) в проекциях на касательную τ и нормаль n даст

$$M(u_\tau - v_\tau) = 0, \quad M(u_n - v_n) = S.$$

Коэффициент восстановления в данном случае равен отношению: модулей $|u_n|$ и $|v_n|$, так как удар происходит только по направлению нормали к поверхности (влиянием трения пренебрегаем). Тогда с учетом знаков проекций получим $u_n = -kv_n$. В результате окончательно находим:

$$u_\tau = v_\tau, \quad u_n = -kv_n, \; S = M|v_n|(1+k).$$

Из полученных уравнений можно найти модуль и направление скорости в конце удара и ударный импульс, если величины M, V, α, и k известны. В частности, из первого равенства, замечая, что $v_\tau = |v_n| \operatorname{tg}\alpha$ и $u_\tau = |u_n| \operatorname{tg}\beta$, получаем

$$|u_n| \operatorname{tg}\beta = |v_n| \operatorname{tg}\alpha,$$

откуда

$$k = |u_n|/|v_n| = \operatorname{tg}\alpha/\operatorname{tg}\beta.$$

Следовательно, при косом ударе отношение тангенса угла падения, к тангенсу угла отражения равно коэффициенту восстановления. Так как $k < 1$, то $\alpha < \beta$, т. е, угол падения всегда меньше угла отражения.

§ 155. ПРЯМОЙ ЦЕНТРАЛЬНЫЙ УДАР ДВУХ ТЕЛ (УДАР ШАРОВ)

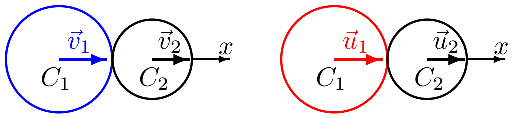

Рис. 378

При соударении двух тел удар называется прямым и центральным, когда общая нормаль к поверхностям тел в точке касания проходит через их центры масс и когда скорости центров масс в начале удара направлены по этой общей нормали. Таким, в частности, будет удар двух однородных шаров, центры которых до удара движутся вдоль одной и той же прямой. Пусть массы соударяющихся тел равны m_1 и m_2, скорости их центров масс в начале удара v_1 и v_2, а в конце удара u_1 и u_2. Проведем через центры масс C_1, C_2 координатную ось C_1x, направленную всегда C_1 к C_2 (рис. 378). Тогда, чтобы произошел удар, должно быть $v_{1x} > v_{2x}$ (иначе первое тело не догонит второе); кроме того, $u_{1x} \leq u_{2x}$, так как ударившее тело не может опередить ударяемое. Считая m_1, m_1, v_{1x}, v_{2x} и k известными, найдем u_{1x} и u_{2x}. Для этого, применим теорему об изменении количества движения к соударяющимся телам, рассматривая их как одну систему. Тогда ударные силы, действующие между телами, будут внутренними и $\sum \bar{S}_k^e = 0$. В результате уравнение (154’) дает $Q_{1x} = Q_{0x}$ или

$$m_1u_{1x} + m_2u_{2x} = m_1v_{1x} + m_2v_{2x}. \tag{157}$$

Второе уравнение найдем из выражения для коэффициента восстановления. При соударении двух тел интенсивность удара (ударный импульс) зависит не от абсолютного значения скорости каждого из тел, а от того, насколько скорость ударяющего тела превышает скорость ударяемого, т. е. от разности $v_{1x} - v_{2x}$. Поэтому при ударе двух тел, если учесть, что всегда $v_{1x} > v_{2x}$, и $u_{1x} \leq u_{2x}$ получим

$$k = \left| \frac{u_{1x} - u_{2x}}{v_{1x} - v_{2x}} \right| = -\frac{u_{1x} - u_{2x}}{v_{1x} - v_{2x}} \tag{158}$$

или

$$u_{1x} - u_{2x} = -k(v_{1x} - v_{2x}) \tag{158'}$$

Система уравнений (157), (158) и позволяет решить поставленную задачу. Ударный импульс, действующий на соударяющиеся тела, найдем, составив уравнение (154') для какого-нибудь одного из тел, например для первого. Тогда

$$S_{1x} = m_1(u_{1x} - u_{2x}), \;\; S_{2x} = -S_{1x} \tag{159}$$

Рассмотрим два предельных случая.

1. Абсолютно неупругий удар ($k = 0$). В этом случае из уравнений (158) и (157) находим

$$u_{1x} = u_{2x} = \frac{m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x}}{m_1 + m_2} \tag{160}$$

Оба тела после удара движутся с одной и той же скоростью. Действующий на тела ударный импульс при этом равен

$$S_{2x} = -S_{1x} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(v_{1x} - v_{2x})$$

2. Абсолютно упругий удар ($k = 1$). В этом случае из уравнений (157) и (158) получаем

$$u_{1x} = v_{1x} - \frac{2m_2}{m_1 + m_2}(v_{1x} - v_{2x}) \tag{161}$$

$$u_{2x} = v_{2x} + \frac{2m_1}{m_1 + m_2}(v_{1x} - v_{2x})$$

Действующий на тела ударный импульс при этом равен

$$S_{2x} = -S_{1x} = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2}(v_{1x} - v_{2x})$$

Как видим, при абсолютно упругом ударе ударный импульс вдвое больше, чем при абсолютно неупругом. В частном случае, когда $m_1 = m_2$, получаем из уравнений (161) $u_{1x} = v_{2x}$, $u_{2x} = v_{1x}$, таким образом, два тела одинаковой массы при абсолютно упругом ударе обмениваются скоростями.

§ 156. ПОТЕРЯ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ ПРИ НЕУПРУГОМ УДАРЕ ДВУХ ТЕЛ. ТЕОРЕМА КАРНО

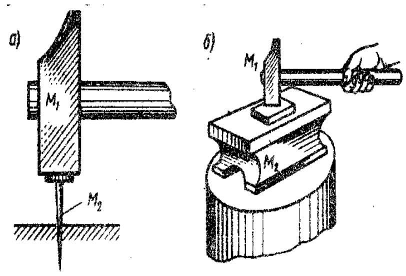

Рис. 380

Из рассуждений, приведенных в § 153, следует, что при неупругом ударе происходит потеря кинетической энергии соударяющихся тел. Наибольшей эта потеря будет при абсолютно неупругом ударе. Подсчитаем, какую кинетическую энергию теряет система при абсолютно неупругом ударе двух тел.

Считая, что соударяющиеся тела движутся поступательно, и обозначая их общую скорость после абсолютно неупругого удара через и, получим для кинетической энергии системы в начале и в конце удара значения:

$$2T_0 = m_1 v_{1x}^2 + m_2 v_{2x}^2, \quad 2T_1 = m_1 u_x^2 + m_2 u_x^2 \tag{162}$$

Потерянная при ударе кинетическая энергия равна $T_0 - T_1$. Представим эту разность в виде

$$T_0 = T_0 - 2T_1 + T_1. \tag{163}$$

Так как из формулы (160) следует, что

$$(m_1 + m_2)u_x = m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x},$$

то отсюда

$$2T_1 = (m_1 + m_2)u_x^2 = (m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x})u_x \tag{164}$$

Подставляя в правую часть равенства (163) вместо T_0 и T_1 их значения из формул (162), а вместо $2T_1$ правую часть выражения (164), получим:

$$T_0 - T_1 = \frac{1}{2}(m_1 v_{1x}^2 + m_2 v_{2x}^2 - 2m_1 v_{1x} u_x - 2m_2 v_{2x} u_x + m_1 u_x^2 + m_2 u_x^2),$$

или

$$T_0 - T_1 = \frac{1}{2} m_1 (v_{1x} - u_x)^2 + \frac{1}{2} m_2 (v_{2x} - u_x)^2. \tag{165}$$

Разности $v_{1x} - u_x$ и $v_{2x} - u_x$ показывают, насколько уменьшилась при ударе скорость каждого из соударяющихся тел. Их можно назвать потерянными при ударе скоростями. Тогда из формулы (165) вытекает следующая теорема Карно[1]: *кинетическая энергия, потерянная системой тел при абсолютно*

[1]Лазар Карно (1753—1823) — выдающийся французский ученый (математик и механик) и видный деятель эпохи французской революции.

неупругом ударе, равна той кинетической энергий, которую имела бы система, если бы ее тела двигались с потерянными скоростями.

Если удар не является абсолютно неупругим ($k \neq 0$), то аналогичными преобразованиями можно найти, что кинетическая энергия, потерянная при ударе двух тел, определяется равенством

$$T_0 - T_1 = \frac{1-k}{1+k}\left[\frac{1}{2}m_1(v_{1x} - u_x)^2 + \frac{1}{2}m_2(v_{2x} - u_x)^2.\right] \qquad (165')$$

Рассмотрим частный случай абсолютно неупругого удара по первоначально неподвижному телу. В этом случае $v_2 = 0$ и

$$T_0 = \frac{1}{2}m_1 v_1^2, \; u = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2}$$

Тогда

$$T_1 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)u^2 = \frac{1}{2}\frac{m_1^2 v_1^2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\frac{m_1 v_1^2}{2}$$

или

$$T_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} T_0. \qquad (166)$$

Формула (166) показывает, какая энергия остается у системы после удара. Отметим два интересных предельных случая.

1. Масса ударяющего тела много больше массы ударяемого ($m_1 \gg m_2$). В этом случае можно считать $m_1 + m_2 \approx m_1$ и формула (166) дает $T_1 \approx T_0$. Следовательно, хотя удар и является абсолютно неупругим, потеря кинетической энергии при ударе почти не происходит, и система после удара начнёт двигаться почти с той же кинетической энергией, которая у нее была в начале удара.

На практике такой результат нужно, очевидно, получать при забивании гвоздей, свай и т. п. Следовательно, в этом случае нужно, чтобы масса молотка была намного больше массы гвоздя (рис. 380, а).

2. Масса ударяемого тела много больше массы ударяющего ($m_2 \gg m_1$). В этом случае можно считать $m_1/(m_1 + m_2) \approx 0$, и формула (166) дает $T_2 \approx 0$. Таким образом, здесь при ударе почти вся кинетическая энергия расходуется на деформацию соударяющихся тел; по окончании удара тела можно считать неподвижными.

Практически такой результат нужно, очевидно, получать при ковке, клепке и т. п. Следовательно, в этих случаях нужно, чтобы масса поковки вместе с наковальней (или масса заклепки вместе с поддержкой) была много больше массы молота (рис. 380, б).