Раздел второй

КИНЕМАТИКА ТОЧКИ И ТВЕРДОГО ТЕЛА

Глава IX

КИНЕМАТИКА ТОЧКИ

§ 36. ВВЕДЕНИЕ В КИНЕМАТИКУ

Кинематикой называется раздел механики, в котором изучаются геометрические свойства движения тел без учета их инертности (массы) и действующих на них сил.

Кинематика представляет собой, с одной стороны, введение в динамику, так как установление основных кинематических понятий и зависимостей необходимо для изучения движения тел с учетом действия сил. С другой стороны, методы кинематики имеют и самостоятельное практическое значение, например, при изучении передач движения в механизмах.

Под движением мы понимаем в механике изменение с течением времени положения данного тела в пространстве по отношению к другим телам.

Для определения положения движущегося тела (или точки) в разные моменты времени с телом, по отношению к которому изучается движение, жестко связывают какую-нибудь систему координат, образующую вместе с этим телом *систему отсчета*. В дальнейшем будем говорить о движении тела (или точки) по отношению к данной системе отсчета, подразумевая под этим движение по отношению к тому телу, с которым эта система отсчета связана. Изображать систему отсчета будем в виде трех координатных осей (не показывая тело, с которым они связаны). Выбор системы отсчета в кинематике произволен (определяется целью исследования), и в отличие от динамики (см. § 74) все кинематические зависимости, полученные при изучении движения в какой-нибудь одной системе отсчета, будут справедливы и в любой другой системе отсчета.

Движение тел совершается в пространстве с течением времени. Пространство в механике мы рассматриваем как трехмерное евклидово пространство. Все измерения в нем производятся на основании методов евклидовой геометрии. За единицу длины при измерении расстояний принимается 1 м. Время в механике считается универсальным, т. е. протекающим одинаково во всех рассматриваемых

системах отсчета. За единицу времени принимается 1 с. Размерность длины обозначается символом L, а времени — символом T.

Евклидово пространство и универсальное время отражают реальные свойства пространства и времени лишь приближенно. Однако, как показывает опыт, для движений, которые изучаются в механике (движения со скоростями, далекими от скорости света), это приближение дает вполне достаточную для практики точность.

Время является скалярной, непрерывно изменяющейся величиной. В задачах кинематики время t принимают за независимое переменное (аргумент). Все другие переменные величины (расстояния, скорости и т. д.) рассматриваются как изменяющиеся с течением времени, т. е. как функции времени t. Отсчет времени ведется от некоторого *начального момента* ($t=0$), о выборе которого в каждом случае условливаются. Всякий данный *момент времени* t определяется числом секунд, прошедших от начального момента до данного; разность между какими-нибудь двумя последовательными моментами времени называется *промежутком времени*.

Почерпнутые из опыта и подтвержденные практикой основы, на которых строится кинематика, дают аксиомы геометрии. Никаких дополнительных законов или аксиом для кинематического изучения движения не требуется.

Для решения задач кинематики надо, чтобы изучаемое движение было как-то задано (описано).

Кинематически задать движение или закон движения тела (точки) — значит задать положение этого тела (точки) относительно данной системы отсчета в любой момент времени. Установление математических способов задания движения точек или тел является одной из важных задач кинематики. Поэтому изучение движения любого объекта будем начинать с установления способов задания этого движения.

Основная задача кинематики точки и твердого тела состоит в том, чтобы, зная закон движения точки (тела), установить методы определения всех кинематических величин, характеризующих данное движение.

Изучение кинематики начнем с изучения движения простейшего объекта — точки (кинематика точки), а затем перейдем к изучению кинематики твердого тела.

Непрерывная линия, которую описывает движущаяся точка относительно данной системы отсчета, называется *траекторией* точки. Если траекторией является прямая линия, движение точки называется *прямолинейным*, а если кривая — *криволинейным*.

§ 37. СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ

Для задания движения точки можно применять один из следующих трех способов: 1) векторный, 2) координатный, 3) естественный.

1. Векторный способ задания движения точки. Пусть точка M движется по отношению к некоторой системе отсчета $Oxyz$. Положение этой точки в любой момент времени

можно определить, задав ее радиус-вектор $\bar{r}$, проведенный из начала координат O в точку M (рис. 114).

При движении точки M вектор $\bar{r}$ будет с течением времени изменяться и по модулю, и по направлению. Следовательно, $\bar{r}$ является переменным вектором (вектором-функцией), зависящим от аргумента t:

$$\bar{r}=\bar{r}(t). \tag{1}$$

Равенство (1) и определяет закон движения точки в векторной форме, так как оно позволяет в любой момент времени построить соответствующий вектор $\bar{r}$ и найти положение движущейся точки.

Геометрическое место концов вектора $\bar{r}$, т. е. годограф этого вектора, определяет траекторию движущейся точки.

Аналитически, как известно, вектор задается его проекциями на координатные оси. В прямоугольных декартовых координатах для вектора $\bar{r}$ будет: $r_x=x$, $r_y=y$, $r_z=z$ (см. рис. 114), где x, y, z — декартовы координаты точки. Тогда, если ввести единичные векторы (орты) $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ координатных осей, получим для $\bar{r}$ выражение

$$\bar{r}=x\bar{i}+y\bar{j}+z\bar{k}. \tag{2}$$

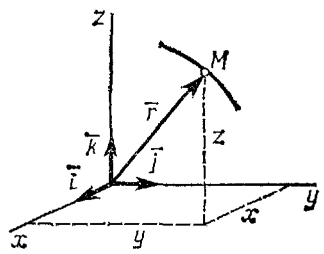

Рис. 114

Следовательно, зависимость (1) $\bar{r}$ от t будет известна, если будут заданы координаты x, y, z точки как функции времени. Такой способ задания движения точки (координатный) рассмотрим ниже. Вектор $\bar{r}$ может быть задан, как известно, и иными способами, например его модулем и углами с осями или проекциями на оси других систем координат. Для получения общих формул, не зависящих от того, как конкретно задан вектор $\bar{r}$, будем исходить из векторного закона движения, представленного равенством (1).

2. Координатный способ задания движения точки. Положение точки можно непосредственно определять ее декартовыми координатами x, y, z, которые при движении точки будут с течением времени изменяться. Чтобы знать закон движения точки, т. е. ее положение в пространстве в любой момент времени, надо знать значения координат точки для каждого момента времени, т. е. знать зависимости

$$x=f_1(t),\quad y=f_2(t),\quad z=f_3(t). \tag{3}$$

Уравнения (3) представляют собой *уравнения движения точки в прямоугольных декартовых координатах*. Они определяют закон движения точки при координатном способе задания движения *.

* Задать движение точки можно, пользуясь и другими системами координат, например полярными (см. § 47), сферическими и т. д.

Если движение точки происходит все время в одной и той же плоскости, то, приняв эту плоскость за плоскость Oxy, получим в этом случае два уравнения движения:

$$x=f_1(t),\quad y=f_2(t). \tag{4}$$

Наконец, при прямолинейном движении точки, если вдоль ее траектории направить координатную ось Ox, движение будет определяться одним уравнением (*законом прямолинейного движения точки*)

$$x=f(t). \tag{5}$$

Уравнения (3) и (4) представляют собой одновременно уравнения траектории точки в параметрической форме, где роль параметра играет время t. Исключив из уравнений движения время t, можно найти уравнение траектории в обычной форме, т. е. в виде, дающем зависимость между координатами точки.

Пример. Пусть движение точки в плоскости Oxy дано уравнениями:

$$x=2t,\quad y=12t^2, \tag{a}$$

где x, y выражены в сантиметрах; t — в секундах.

По этим уравнениям можно найти, что в момент времени $t=0$ точка находится в положении M_0 (0, 0), т. е. в начале координат, в момент $t_1=1$с — в положении M_1 (2,12) и т. д. Таким образом, уравнения (а) действительно определяют положение точки в любой момент времени. Давая t разные значения и изображая соответствующие положения точки на рисунке, можем построить ее траекторию.

Другим путем траекторию можно найти, исключив t из уравнений (а). Из первого уравнения находим $t=x/2$ и, подставляя это значение t во второе уравнение, получаем $y=3x^2$. Следовательно, траекторией точки является парабола с вершиной в начале координат и осью, параллельной оси Oy. Другие примеры определения траектории точки см. в § 41.

3. Естественный способ задания движения точки. Естественным (или траекторным) способом задания движения удобно пользоваться в тех случаях, когда траектория движущейся точки известна заранее. Пусть кривая AB является траекторией точки M при ее движении относительно системы отсчета $Oxyz$ (рис. 115). Выберем на этой траектории какую-нибудь неподвижную точку O', которую примем за начало отсчета, и установим на траектории положительное и отрицательное направления отсчета (как на координатной оси).

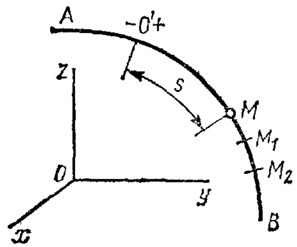

Рис. 115

Тогда положение точки M на траектории будет однозначно определяться криволинейной координатой s, которая равна расстоянию от точки O' до точки M, измеренному вдоль дуги траектории и взятому с соответствующим знаком. При движении точка M перемещается в положения M_1, M_2, . . ., следовательно, расстояние s будет с течением времени изменяться. Чтобы знать положение точки M на траектории в любой момент времени, надо знать зависимость

$$s=f(t). \tag{6}$$

Уравнение (6) и выражает *закон движения точки М* вдоль траектории.

Таким образом, чтобы задать движение точки естественным способом, надо задать: 1) траекторию точки; 2) начало отсчета на траектории с указанием положительного и отрицательного направлений отсчета; 3) закон движения точки вдоль траектории в виде $s=f(t)$.

Заметим, что величина s в уравнении (6) определяет положение движущейся точки, а не пройденный ею путь. Например, если точка, двигаясь из начала O', доходит до положения M_1 (рис. 115), а затем, перемещаясь в обратном направлении, приходит в положение M, то в этот момент ее координата $s=O'M$, а пройденный за время движения путь будет равен $O'M_1+M_1M$, т. е. не равен s.

§ 38. ВЕКТОР СКОРОСТИ ТОЧКИ

Одной из основных кинематических характеристик движения точки является векторная величина, называемая *скоростью точки*. Введем сначала понятие о средней скорости точки за какой-нибудь промежуток времени. Пусть движущаяся точка находится

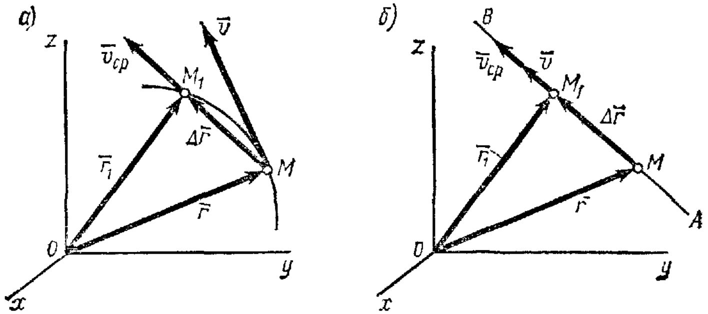

Рис. 116

в момент времени t в положении M, определяемом радиусом-вектором $\bar r$, а в момент t_1 приходит в положение M_1, определяемое вектором $\bar r_1$ (рис. 116). Тогда перемещение точки за промежуток времени $\Delta t=t_1-t$ определяется вектором $\overline{MM_1}$, который будем называть *вектором перемещения точки*. Этот вектор направлен по хорде, если точка движется криволинейно (рис. 116, *а*), и вдоль самой траектории AB, когда движение является прямолинейным (рис. 116, *б*).

Из треугольника OMM_1 видно, что $\bar r+\overline{MM_1}=\bar r_1$; следовательно,

$$\overline{MM_1}=\bar r_1-\bar r=\Delta\bar r.$$

Отношение вектора перемещения точки к соответствующему промежутку времени дает векторную величину, называемую *средней* по модулю и направлению *скоростью точки* за промежуток времени Δt:

$$\bar v_{cp}=\overline{MM_1}/\Delta t=\Delta\bar r/\Delta t \tag{7}$$

Направлен вектор $\bar v_{cp}$ так же, как и вектор $\overline{MM_1}$, т. е. при криволинейном движении вдоль хорды MM_1, в сторону движения точки, а при прямолинейном движении — вдоль самой траектории (от деления на Δt направление вектора не изменяется).

Очевидно, что чем меньше будет промежуток времени Δt, для которого вычислена средняя скорость, тем величина $\bar v_{cp}$ будет точнее характеризовать движение точки. Чтобы получить точную характеристику движения, вводят понятие о *скорости точки в данный момент времени*.

Скоростью точки в данный момент времени t называется векторная величина $\bar v$, к которой стремится средняя скорость $\bar v_{cp}$ при стремлении промежутка времени Δt к нулю:

$$\bar v=\lim_{\Delta t\to 0}(\bar v_{cp})=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\bar r}{\Delta t}.$$

Предел отношения $\Delta\bar r/\Delta t$ при $\Delta t\to 0$ представляет собой первую производную от вектора $\bar r$ по аргументу t и обозначается, как и производная от скалярной функции, символом $d\bar r/dt$. Окончательно получаем

$$\bar v=\frac{d\bar r}{dt}. \tag{8}$$

Итак, *вектор скорости точки в данный момент времени равен первой производной от радиуса-вектора точки по времени.*

Так как предельным направлением секущей MM_1 является касательная, то *вектор скорости точки в данный момент времени направлен по касательной к траектории точки в сторону движения.*

Формула (8) показывает также, что вектор скорости $\bar v$ равен отношению элементарного перемещения точки $d\bar r$, направленного по касательной к траектории, к соответствующему промежутку времени dt.

При прямолинейном движении вектор скорости $\bar v$ все время направлен вдоль прямой, по которой движется точка, и может изменяться лишь численно; при криволинейном движении кроме числового значения все время изменяется и направление вектора скорости точки. Размерность скорости L/T, т. е. длина/время; в качестве единиц измерения применяют обычно м/с или км/ч. Вопрос об определении модуля скорости будет рассмотрен в § 40 и 42.

§ 39. ВЕКТОР УСКОРЕНИЯ ТОЧКИ

Ускорением точки называется векторная величина, характеризующая изменение с течением времени модуля и направления скорости точки.

Пусть в некоторый момент времени t движущаяся точка находится в положении M и имеет скорость $\bar v$, а в момент t_1 приходит в положение M_1 и имеет скорость $\bar{v}_1$ (рис. 117). Тогда за промежуток времени $\Delta t = t_1 - t$ скорость точки получает приращение $\Delta\bar{v} = \bar{v}_1 - \bar{v}$. Для построения вектора $\Delta\bar{v}$ отложим от точки M вектор, равный $\bar{v}_1$, и построим параллелограмм, в котором диагональю будет $\bar{v}_1$, а одной из сторон $\bar{v}$. Тогда, очевидно, вторая сторона и будет изображать вектор $\Delta\bar{v}$. Заметим, что вектор $\Delta\bar{v}$ всегда направлен в сторону вогнутости траектории.

Отношение приращения вектора скорости $\Delta\bar{v}$ к соответствующему промежутку времени Δt определяет *вектор среднего ускорения точки* за этот промежуток времени:

$$\bar{a}_{ср} = \Delta\bar{v}/\Delta t. \qquad (9)$$

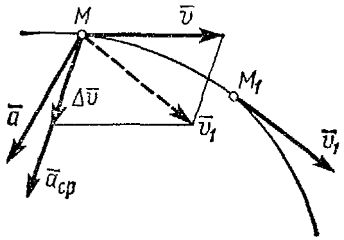

Рис. 117

Вектор среднего ускорения имеет то же направление, что и вектор $\Delta\bar{v}$, т. е. направлен в сторону вогнутости траектории.

Ускорением точки в данный момент времени t называется векторная величина $\bar{a}$, к которой стремится среднее ускорение $\bar{a}_{ср}$ при стремлении промежутка времени Δt к нулю:

$$\bar{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\bar{v}}{\Delta t} = \frac{d\bar{v}}{dt}$$

или, с учетом равенства (8),

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}. \qquad (10)$$

Следовательно, *вектор ускорения точки в данный момент времени равен первой производной от вектора скорости или второй производной от радиуса-вектора точки по времени.*

Размерность ускорения L/T^2, т. е. длина/(время)^2; в качестве единицы измерения применяется обычно м/с^2.

Из формулы (10) следует также, что вектор ускорения точки $\bar{a}$ равен отношению элементарного приращения вектора скорости $d\bar{v}$ к соответствующему промежутку времени dt.

Найдем, как располагается вектор $\bar{a}$ по отношению к траектории точки. При прямолинейном движении вектор $\bar{a}$ направлен вдоль прямой, по которой движется точка. Если траекторией точки является плоская кривая, то вектор ускорения $\bar{a}$, так же как и вектор $\bar{a}_{ср}$, лежит в плоскости этой кривой и направлен в сторону ее вогнутости. Если траектория не является плоской кривой, то вектор $\bar{a}_{ср}$ направлен в сторону вогнутости траектории и лежит в плоскости, проходящей через касательную к траектории в точке M и прямую, параллельную касательной в соседней точке M_1 (рис. 117). В пределе,

когда точка M_1 стремится к M, эта плоскость занимает положение так называемой *соприкасающейся плоскости*, т. е. плоскости, в которой происходит бесконечно малый поворот касательной к траектории при элементарном перемещении движущейся точки *. Следовательно, в общем случае *вектор ускорения $\bar{a}$ лежит в соприкасающейся плоскости и направлен в сторону вогнутости кривой.* Вопрос об определении модуля ускорения будет рассмотрен в § 40 и 43.

§ 40. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТИ И УСКОРЕНИЯ ТОЧКИ ПРИ КООРДИНАТНОМ СПОСОБЕ ЗАДАНИЯ ДВИЖЕНИЯ

Найдем, как вычисляются скорость и ускорение точки, если ее движение задано уравнениями (3) или (4). Вопрос об определении траектории в этом случае был уже рассмотрен в § 37.

Формулы (8) и (10), определяющие значения $\bar{v}$ и $\bar{a}$, содержат производные по времени от векторов $\bar{r}$ и $\bar{v}$. В равенствах, содержащих производные от векторов, переход к зависимостям между их проекциями осуществляется с помощью следующей теоремы: *проекция производной от вектора на ось, неподвижную в данной системе отсчета, равна производной от проекции дифференцируемого вектора на ту же ось*, т. е.

$$\text{если} \quad \bar{q} = \frac{d\bar{p}}{dt}, \quad \text{то} \quad q_x = \frac{dp_x}{dt}, \quad q_y = \frac{dp_y}{dt}, \quad q_z = \frac{dp_z}{dt}. \qquad (11)$$

1. Определение скорости точки. Вектор скорости точки $\bar{v} = d\bar{r}/dt$. Отсюда на основании формул (11), учитывая, что $r_x = x$, $r_y = y$, $r_z = z$, найдем:

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt} \qquad (12)$$

или

$$v_x = \dot{x}, \quad v_y = \dot{y}, \quad v_z = \dot{z}, \qquad (12')$$

где точка над буквой есть символ дифференцирования по времени. Таким образом, *проекции скорости точки на координатные оси равны первым производным от соответствующих координат точки по времени.*

Зная проекции скорости, найдем ее модуль и направление (т. е. углы α, β, γ, которые вектор $\bar{v}$ образует с координатными осями) по формулам

$$\left.\begin{aligned} & v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}; \\ & \cos\alpha = v_x/v, \ \cos\beta = v_y/v, \ \cos\gamma = v_z/v. \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

* Для пространственной кривой (например, для винтовой линии) в каждой точке кривой будет своя соприкасающаяся плоскость. Для плоской кривой соприкасающаяся плоскость совпадает с плоскостью этой кривой и является общей для всех ее точек.

2. Определение ускорения точки. Вектор ускорения точки $\bar{a}=d\bar{v}/dt$. Отсюда на основании формул (11) получаем:

$$a_x=\frac{dv_x}{dt}=\frac{d^2x}{dt^2},\quad a_y=\frac{dv_y}{dt}=\frac{d^2y}{dt^2},\quad a_z=\frac{dv_z}{dt}=\frac{d^2z}{dt^2} \tag{14}$$

или

$$a_x=\dot{v}_x=\ddot{x},\quad a_y=\dot{v}_y=\ddot{y},\quad a_z=\dot{v}_z=\ddot{z}, \tag{14'}$$

т. е. *проекции ускорения точки на координатные оси равны первым производным от проекций скорости или вторым производным от соответствующих координат точки по времени.* Модуль и направление ускорения найдутся из формул

$$\left.\begin{aligned} &a=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2};\\ &\cos\alpha_1=a_x/a,\ \cos\beta_1=a_y/a,\ \cos\gamma_1=a_z/a, \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

где α_1, β_1, γ_1 — углы, образуемые вектором ускорения с координатными осями.

Итак, если движение точки задано в декартовых прямоугольных координатах уравнениями (3) или (4), то скорость точки определяется по формулам (12) и (13), а ускорение — по формулам (14) и (15). При этом в случае движения, происходящего в одной плоскости, во всех формулах должна быть отброшена проекция на ось z.

В случае же прямолинейного движения, которое задается одним уравнением $x=f(t)$, будет

$$v_x=\frac{dx}{dt},\qquad a_x=\frac{dv_x}{dt}=\frac{d^2x}{dt^2}. \tag{16}$$

Равенства (16) и определяют значения скорости и ускорения точки в этом случае.

§ 41. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ КИНЕМАТИКИ ТОЧКИ

Задачи, решаемые методами кинематики точки, могут состоять в определении траектории, скорости или ускорения точки, в отыскании времени, в течение которого точка проходит тот или иной путь, или пути, проходимого за тот или иной промежуток времени, и т. п.

Прежде чем решать любую из такого рода задач, надо установить, по какому закону движется точка. Этот закон может быть непосредственно задан в условиях задачи (задачи 47, 48) или же из условий задачи определен (задачи 49, 50).

Задача 47. Движение точки задано уравнениями (x, y — в метрах, t — в секундах).

$$x=8t-4t^2,\quad y=6t-3t^2.$$

Определить траекторию, скорость и ускорение точки.

Решение. Для определения траектории исключаем из уравнений движения время t. Умножая обе части первого уравнения на 3, а обе части второго — на 4 и почленно вычитая из первого равенства второе, получим: $3x-4y=0$ или $y=3x/4$.

Следовательно, траектория — прямая линия, наклоненная к оси Ox под углом α, где $\operatorname{tg}\alpha=3/4$ (рис. 118).

Определяем скорость точки. По формулам (12) и (13) получаем:

$$v_x=\dot{x}=8(1-t),\quad v_y=\dot{y}=6(1-t);$$
$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=10\,|1-t|.$$

Теперь находим ускорение точки. Формулы (14) и (15) дают:

$$a_x=\ddot{x}=-8,\quad a_y=\ddot{y}=-6,\quad a=10\ \text{м/с}^2.$$

Направлены векторы $\bar{v}$ и $\bar{a}$ вдоль траектории, т. е. вдоль прямой AB. Проекции ускорения на координатные оси все время отрицательны, следовательно, ускорение имеет постоянное направление от B к A. Проекции скорости при $0<t<1$ положительны, следовательно, в течение этого промежутка времени скорость точки направлена от O к B. При этом в момент времени $t=0$ $v=10$ м/с; в момент $t=1$ с $v=0$. В последующие моменты времени ($t>1$ с) обе проекции скорости отрицательны и, следовательно, скорость направлена от B к A, т. е. так же, как и ускорение.

Заметим, наконец, что при $t=0$ $x=0$ и $y=0$; при $t=1$с $x=4$, $y=3$ (точка B); при $t=2$с $x=0$, $y=0$; при $t>2$с значения x и y растут по модулю, оставаясь отрицательными.

Итак, заданные в условиях задачи уравнения движения рассказывают нам всю историю движения точки. Движение начинается из точки O с начальной скоростью $v_0=10$ м/с и происходит вдоль прямой AB, наклоненной к оси Ox под углом α, для которого $\operatorname{tg}\alpha=3/4$. На участке OB точка движется замедленно (модуль ее скорости убывает) и через одну секунду приходит в положение B (4, 3), где скорость ее обращается в нуль. Отсюда начинается ускоренное движение в обратную сторону. В момент $t=2$с точка вновь оказывается в начале координат и дальше продолжает свое движение вдоль OA. Ускорение точки все время равно 10 м/с^2.

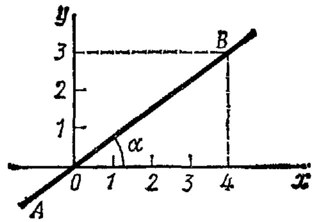

Рис. 118

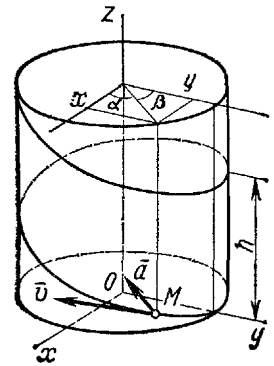

Рис. 119

Задача 48. Движение точки задано уравнениями:

$$x=R\sin\omega t,\quad y=R\cos\omega t,\quad z=ut,$$

где R, ω и u — постоянные величины. Определить траекторию, скорость и ускорение точки.

Решение. Возводя первые два уравнения почленно в квадрат и складывая, получаем

$$x^2+y^2=R^2.$$

Следовательно, траектория лежит на круглом цилиндре радиуса R, ось которого направлена вдоль оси Oz (рис. 119). Определяя из последнего уравнения t и подставляя в первое, находим

$$x=R\sin(\omega z/u),$$

Таким образом, траекторией точки будет линия пересечения синусоидальной поверхности, образующие которой параллельны оси Oy (синусоидальный гофр) с цилиндрической поверхностью радиуса R. Эта кривая называется *винтовой линией*. Из уравнений движения видно, что один виток винтовой линии точка проходит за время t_1, определяемое из равенства $\omega t_1 = 2\pi$. При этом вдоль оси z точка за это время перемещается на величину $h = ut_1 = 2\pi u/\omega$, называемую *шагом* винтовой линии.

Найдем скорость и ускорение точки. Дифференцируя уравнения движения по времени, получаем:

$$v_x = \dot{x} = R\omega \cos \omega t, \quad v_y = \dot{y} = -R\omega \sin \omega t,$$
$$v_z = \dot{z} = u,$$

откуда

$$v = \sqrt{R^2\omega^2 (\cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t) + u^2} = \sqrt{R^2\omega^2 + u^2}.$$

Стоящие под знаком радикала величины постоянны. Следовательно, движение происходит с постоянной по модулю скоростью, направленной по касательной к траектории. Теперь по формулам (14) вычисляем проекции ускорения:

$$a_x = \dot{v}_x = -R\omega^2 \sin \omega t,$$
$$a_y = \dot{v}_y = -R\omega^2 \cos \omega t,$$
$$a_z = \dot{v}_z = 0,$$

откуда

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = R\omega^2.$$

Итак, движение происходит с постоянным по модулю ускорением. Для определения направления ускорения имеем формулы:

$$\cos \alpha_1 = a_x/a = -\sin \omega t = -x/R,$$
$$\cos \beta_1 = a_y/a = -\cos \omega t = -y/R, \quad \cos \gamma_1 = a_z/a = 0.$$

Но, очевидно,

$$x/R = \cos \alpha, \quad y/R = \cos \beta,$$

где α и β — углы, образуемые с осями Ox и Oy радиусом R, проведенным от оси цилиндра к движущейся точке. Так как косинусы углов α_1 и β_1 отличаются от косинусов α и β только знаками, то отсюда заключаем, что ускорение точки все время направлено по радиусу цилиндра к его оси.

Заметим, что хотя в данном случае движение и происходит со скоростью, постоянной по модулю, ускорение точки не равно нулю, так как направление скорости изменяется.

Задача 49. Человек ростом h удаляется от фонаря, висящего на высоте H, двигаясь прямолинейно со скоростью u. С какой скоростью движется конец тени человека?

Р е ш е н и е. Для решения задачи найдем сначала закон, по которому движется конец тени. Выбираем начало отсчета в точке O, находящейся на одной вертикали с фонарем, и направляем вдоль прямой, по которой движется конец тени, координатную ось Ox (рис. 120). Изображаем человека в произвольном положении на расстоянии x_1 от точки O. Тогда конец его тени будет находиться от начала O на расстоянии x_2.

Из подобия треугольников OAM и DAB находим:

$$x_2 = \frac{H}{H-h} x_1.$$

Это уравнение выражает закон движения конца тени M, если закон движения человека, т. е. $x_1 = f(t)$, известен.

Взяв производную по времени от обеих частей равенства и замечая, что по формуле (16) $\dot{x}_1 = u_x = u$, $\dot{x}_2 = v_x = v$, где v — искомая скорость, получим

$$v = \frac{H}{H-h} u.$$

Если человек движется с постоянной скоростью ($u = \text{const}$), то скорость конца тени M будет тоже постоянна, но в $H/(H-h)$ раз больше, чем скорость человека.

Обращаем внимание на то, что при составлении уравнений движения надо изображать движущееся тело или механизм (см. задачу 50) в *произвольном положении*. Только тогда мы получим уравнения, определяющие положение движущейся точки (или тела) в любой момент времени.

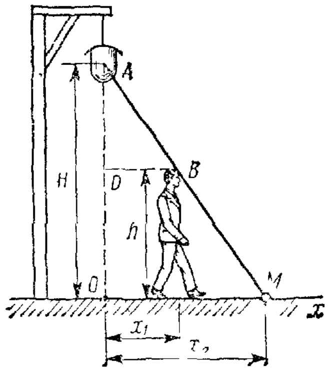

Рис. 120

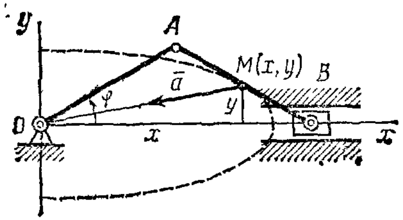

Рис. 121

Задача 50. Определить траекторию, скорость и ускорение середины M шатуна кривошипно-ползунного механизма (рис. 121), если $OA = AB = 2b$, а угол φ при вращении кривошипа растет пропорционально времени: $\varphi = \omega t$.

Р е ш е н и е. Начинаем с определения уравнений движения точки M. Проводя оси и обозначая координаты точки M в произвольном положении через x и y находим

$$x = 2b \cos \varphi + b \cos \varphi, \quad y = b \sin \varphi.$$

Заменяя φ его значением, получаем уравнения движения точки M:

$$x = 3b \cos \omega t, \quad y = b \sin \omega t.$$

Для определения траектории точки M представим уравнения движения в виде

$$\frac{x}{3b} = \cos \omega t, \quad \frac{y}{b} = \sin \omega t.$$

Возводя эти равенства почленно в квадрат и складывая, получим

$$\frac{x^2}{9b^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Итак, траектория точки M — эллипс с полуосями $3b$ и b.

Теперь по формулам (12) и (13) находим скорость точки M:

$$v_x = \dot{x} = -3b\omega \sin \omega t, \quad v_y = \dot{y} = b\omega \cos \omega t;$$
$$v = b\omega \sqrt{9 \sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t}.$$

Скорость оказывается величиной переменной, меняющейся с течением времени в пределах от $v_{min} = b\omega$ до $v_{max} = 3b\omega$.

Далее по формулам (14) определяем проекции ускорения точки M:

$$a_x = -3b\omega^2 \cos \omega t = -\omega^2 x, \quad a_y = -b\omega^2 \sin \omega t = -\omega^2 y;$$

отсюда

$$a=\sqrt{\omega^4(x^2+y^2)}=\omega^2 r,$$

где r — длина радиуса-вектора, проведенного из центра O до точки M. Следовательно, модуль ускорения точки меняется пропорционально ее расстоянию от центра эллипса.

Для определения направления $\bar{a}$ имеем по формулам (15):

$$\cos\alpha_1=a_x/a=-x/r,\ \cos\beta_1=a_y/a=-y/r.$$

Отсюда, так же как и в задаче 48, находим, что ускорение точки M все время направлено вдоль MO к центру эллипса.

§ 42. ОСИ ЕСТЕСТВЕННОГО ТРЕХГРАННИКА. ЧИСЛОВОЕ ЗНАЧЕНИЕ СКОРОСТИ

Рассмотрим, как вычисляются скорость и ускорение точки при естественном способе задания движения (см. § 37), т. е. когда заданы траектория точки и закон движения точки вдоль этой траектории в виде $s=f(t)$.

В этом случае значения векторов $\bar{v}$ и $\bar{a}$ определяют по их проекциям не на оси системы отсчета $Oxyz$ (как в § 40), а на подвижные оси $M\tau nb$, имеющие начало в точке M и движущиеся вместе с ней (рис. 122). Эти оси, называемые *осями естественного трехгранника* (или скоростными осями), направлены следующим образом: ось $M\tau$ — по касательной к траектории в сторону положительного отсчета расстояния s; ось Mn — по нормали к траектории, лежащей в соприкасающейся плоскости и направленной в сторону вогнутости траектории; ось Mb — перпендикулярно к первым двум так, чтобы она образовала с ними правую систему осей. Нормаль Mn, лежащая в соприкасающейся плоскости (в плоскости самой кривой, если кривая плоская), называется *главной нормалью*, а перпендикулярная ей нормаль Mb — *бинормалью*.

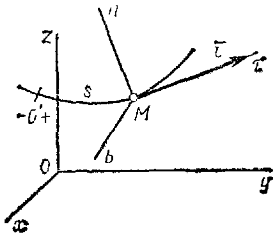

Рис. 122

Скорость точки, направленная по касательной к траектории (рис. 122), определяется в осях $M\tau nb$ только одной проекцией v_τ на ось $M\tau$. При этом $v_\tau=v$ или $v_\tau=-v$. Следовательно, v_τ или совпадает с модулем скорости v, или отличается от v только знаком. Условимся поэтому в дальнейшем обозначать v_τ тоже символом v, опуская индекс τ, и называть v *числовым* (или *алгебраическим*) *значением скорости*. Модуль скорости во всех случаях, когда это не может вызвать недоразумений, будем тоже обозначать символом v, а когда надо подчеркнуть, что речь идет о модуле скорости,— применять символ $|v|$.

Найдем значение v. Если за промежуток времени Δt точка совершит вдоль дуги траектории перемещение $\overset{\frown}{MM_1}=\Delta s$ (см. рис. 115), где одновременно Δs — приращение координаты s, то численно средней скоростью точки за этот промежуток времени

будет $v_{ср}=\Delta s/\Delta t$ и в пределе найдем, что

$$v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}\ \text{или}\ v=\frac{ds}{dt}=\dot{s}. \tag{17}$$

Таким образом, *числовое значение скорости точки в данный момент времени равно первой производной от расстояния (криволинейной координаты) s этой точки по времени.*

Значение v можно также находить как отношение элементарного перемещения ds точки к соответствующему промежутку времени dt. Так как всегда $dt>0$, то знак v совпадает со знаком ds. Следовательно, когда $v>0$, скорость направлена в сторону положительного отсчета расстояния s, а когда $v<0$, — в противоположную сторону. Таким образом, величина v одновременно определяет и модуль скорости, и сторону, куда она направлена.

§ 43. КАСАТЕЛЬНОЕ И НОРМАЛЬНОЕ УСКОРЕНИЯ ТОЧКИ

В § 39 было установлено, что ускорение $\bar{a}$ точки лежит в соприкасающейся плоскости, т. е. в плоскости $M\tau n$. Следовательно, проекция вектора $\bar{a}$ на бинормаль Mb равна нулю ($a_b=0$). Найдем проекции $\bar{a}$ на две другие оси. Проектируя обе части равенства (10) на оси $M\tau$ и Mn и обозначая символами $(d\bar{v})_\tau$ и $(d\bar{v})_n$ проекции вектора $d\bar{v}$ на эти оси, получим:

$$a_\tau=(d\bar{v})_\tau/dt,\ a_n=(d\bar{v})_n/dt. \tag{18}$$

Вектор $d\bar{v}$ представляет собой разность между скоростями в двух соседних точках M и M' (рис. 123, *а*), т. е. $d\bar{v}=\bar{v}'-\bar{v}$. Отложим векторы $\bar{v}=\overline{MA}$ и $\bar{v}'=\overline{MB}$ от общего начала (рис. 123, *б*); тогда $d\bar{v}=$

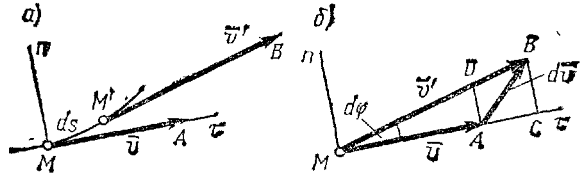

Рис. 123

$=\overline{AB}$, а фигуру $ACBD$ при бесконечно малом угле $d\varphi$ можно рассматривать как прямоугольник. Отсюда $(d\bar{v})_\tau=AC=DB=MB-MA=v'-v=dv$, где dv — элементарное приращение числового значения скорости. Далее, поскольку предел отношения дуги к хорде равен единице, можно AD рассматривать как элементарную дугу радиуса MA, размер которой определяется произведением радиуса на центральный угол. Тогда $(d\bar{v})_n=AD=MA\cdot d\varphi=v\,d\varphi$. Подставляя найденные значения $(d\bar{v})_\tau$ и $(d\bar{v})_n$ в равенства (18), получим:

$$a_\tau=dv/dt,\ a_n=v\,d\varphi/dt \tag{19}$$

Угол между касательными к кривой в двух ее точках называется *углом смежности*; тогда $d\varphi$ — элементарный угол смежности. Напомним, что отношение $d\varphi$ к $ds = \overset{\smile}{MM'}$, определяет кривизну кривой в точке M, а кривизна k является величиной, обратной радиусу кривизны ρ в этой точке, т. е.

$$d\varphi/ds = k = 1/\rho. \tag{20}$$

Введем эту величину во второе из равенств (19) и преобразуем его, учтя еще равенство (17), к виду

$$a_n = v\frac{d\varphi}{ds}\frac{ds}{dt} = v\cdot\frac{1}{\rho}\cdot v = \frac{v^2}{\rho}.$$

В результате окончательно получим:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}, \quad a_n = \frac{v^2}{\rho}, \quad a_b = 0. \tag{21}$$

Таким образом, мы доказали, что *проекция ускорения точки на касательную равна первой производной от числового значения скорости или второй производной от расстояния (криволинейной координаты) s по времени, а проекция ускорения на главную нормаль равна квадрату скорости, деленному на радиус кривизны траектории в данной точке кривой*; проекция ускорения на бинормаль равна нулю. Это одна из важных теорем кинематики. Величины a_τ и a_n называют *касательным* и *нормальным* ускорениями точки.

При движении точки M в одной плоскости касательная $M\tau$ поворачивается вокруг бинормали Mb с угловой скоростью $\omega = d\varphi/dt$. Тогда второе из равенств (19) дает еще одну, часто используемую в инженерной практике формулу для вычисления a_n:

$$a_n = v\omega. \tag{21'}$$

Из нее следует, что нормальное ускорение равно произведению скорости точки на угловую скорость поворота касательной к траектории.

Отложим вдоль касательной $M\tau$ и главной нормали Mn векторы $\bar{a}_\tau$ и $\bar{a}_n$, т. е. касательную и нормальную составляющие ускорения (рис. 124). При этом составляющая $\bar{a}_n$ будет всегда направлена в сторону вогнутости кривой, так как всегда $a_n > 0$, а составляющая $\bar{a}_\tau$ может быть направлена или в положительном, или в отрицательном направлении оси $M\tau$ в зависимости от знака проекции a_τ (см. рис. 124, *а*, *б*).

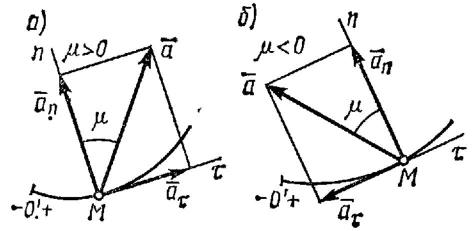

Рис. 124

Вектор ускорения точки $\bar{a}$ изображается диагональю параллелограмма, построенного на составляющих $\bar{a}_\tau$ и $\bar{a}_n$. Так как эти составляющие взаимно перпендикулярны, то модуль вектора $\bar{a}$

и угол μ его отклонения от нормали Mn определятся формулами:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{\rho}\right)^2},$$

$$\operatorname{tg}\mu = \frac{a_\tau}{a_n}, \tag{22}$$

где $-\pi/2 \leq \mu \leq \pi/2$; при $\mu > 0$ вектор $\bar{a}$ отклонен от нормали Mn в сторону оси $M\tau$ (рис. 124, *а*), а при $\mu < 0$ — в противоположную сторону (рис. 124, *б*).

Таким образом, если *движение точки задано естественным способом*, то, зная траекторию (а следовательно, и ее радиус кривизны ρ в любой точке) и закон движения, т. е. зависимость $s = f(t)$, можно по формулам (17) и (21), (22) определить модуль и направление векторов скорости и ускорения точки в любой момент времени.

§ 44. НЕКОТОРЫЕ ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ

Пользуясь полученными результатами, рассмотрим некоторые частные случаи движения точки.

1. Прямолинейное движение. Если траекторией точки является прямая линия, то $\rho = \infty$. Тогда $a_n = v^2/\rho = 0$ и все ускорение точки равно одному только касательному ускорению:

$$a = a_\tau = dv/dt. \tag{23}$$

Так как в данном случае скорость изменяется только численно, то отсюда заключаем, что *касательное ускорение характеризует изменение числового значения скорости*.

2. Равномерное криволинейное движение. Равномерным называется такое криволинейное движение точки, в котором числовое значение скорости все время остается постоянным: $v = \text{const}$. Тогда $a_\tau = dv/dt = 0$ и все ускорение точки равно одному только нормальному ускорению:

$$a = a_n = v^2/\rho. \tag{24}$$

Вектор ускорения $\bar{a}$ направлен при этом все время по нормали к траектории точки.

Так как в данном случае ускорение появляется только за счет изменения направления скорости, то отсюда заключаем, что *нормальное ускорение характеризует изменение скорости по направлению*.

Найдем закон равномерного криволинейного движения. Из формулы (17) имеем $ds = v\,dt$. Пусть в начальный момент времени ($t = 0$) точка находится от начала отсчета на расстоянии s_0. Тогда, беря от левой и правой частей равенства определенные интегралы в соответствующих пределах, получим

$$\int_{s_0}^{s} ds = \int_0^t v\,dt \quad \text{или} \quad s - s_0 = vt,$$

так как $v=\mathrm{const}$. Окончательно находим закон равномерного криволинейного движения точки в виде

$$s=s_0+vt. \tag{25}$$

Если в равенстве (25) положить $s_0=0$, то s даст путь, пройденный точкой за время t. Следовательно, при равномерном движении путь, пройденный точкой, растет пропорционально времени, а скорость точки равна отношению пути ко времени:

$$s=vt, \quad v=s/t. \tag{25$'$}$$

3. Равномерное прямолинейное движение. В этом случае $a_n=a_\tau=0$, а значит, и $a=0$. Заметим, что *единственным движением, в котором ускорение точки все время равно нулю, является равномерное прямолинейное движение.*

4. Равнопеременное криволинейное движение. Равнопеременным называется такое криволинейное движение точки, при котором касательное ускорение остается все время постоянным: $a_\tau=\mathrm{const}$. Найдем закон этого движения, считая, что при $t=0$ $s=s_0$, а $v=v_0$, где v_0 — начальная скорость точки. Согласно первой из формул (21) $dv=a_\tau dt$. Так как $a_\tau=\mathrm{const}$, то, беря от обеих частей последнего равенства интегралы в соответствующих пределах, получим

$$v=v_0+a_\tau t. \tag{26}$$

Формулу (26) представим в виде

$$ds/dt=v_0+a_\tau t \quad \text{или} \quad ds=v_0dt+a_\tau t dt.$$

Вторично интегрируя, найдем закон равнопеременного криволинейного движения точки

$$s=s_0+v_0t+a_\tau t^2/2. \tag{27}$$

При этом скорость точки определяется формулой (26).

Если при криволинейном движении точки модуль скорости возрастает, то движение называется *ускоренным*, а если убывает,— *замедленным*. Так как изменение модуля скорости характеризуется

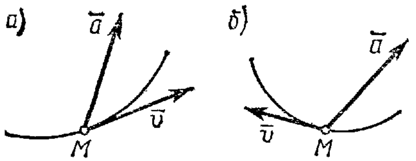

Рис. 125

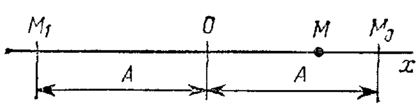

Рис. 126

касательным ускорением, то движение будет ускоренным, если величины v и a_τ имеют одинаковые знаки (угол между векторами $\bar{v}$ и $\bar{a}$ острый, рис. 125, *а*), и замедленным, если разные (угол между $\bar{v}$ и $\bar{a}$ тупой, рис. 125, *б*).

В частности, при равнопеременном движении, если в равенстве

(26) v и a_τ имеют одинаковые знаки, движение будет *равноускоренным*, а если разные знаки,— *равнозамедленным*.

Формулы (25) — (27) определяют также законы равномерного или равнопеременного прямолинейного движения точки, если считать $s=x$. При этом в равенствах (26) и (27) $a_\tau=a$, где a — числовое значение ускорения данной точки [см. формулу (23)].

5. Гармонические колебания. Рассмотрим прямолинейное движение точки, при котором ее расстояние x от начала координат O изменяется со временем по закону

$$x=A\cos kt, \tag{28}$$

где A и k — постоянные величины.

Точка M (рис. 126) совершает при этом движении колебания между положениями $M_0(+A)$ и $M_1(-A)$. Колебания, происходящие по закону (28), играют большую роль в технике. Они называются простыми *гармоническими колебаниями*. Величина A, равная наибольшему отклонению точки от центра колебаний O, называется *амплитудой* колебаний.

Легко видеть, что, начиная движение в момент $t=0$ из положения M_0, точка вновь придет в это положение в момент времени t_1, для которого $\cos kt_1=1$, т. е. $kt_1=2\pi$.

Промежуток времени $T=t_1=2\pi/k$, в течение которого точка совершает одно полное колебание, называется *периодом* колебаний.

Беря производные от x по t, найдем значения скорости и ускорения точки:

$$v=v_x=-Ak\sin kt, \quad a=a_x=-Ak^2\cos kt. \tag{29}$$

Следовательно, в этом движении и скорость, и ускорение точки изменяются с течением времени по гармоническому закону. По знакам v и a легко проверить, что когда точка движется к центру колебаний, ее движение является ускоренным, а когда от центра колебаний,— замедленным.

Аналогичные колебания происходят и при законе $x=A\sin kt$, только движение в этом случае начинается из центра O.

Гармонические колебания по закону $s=A\cos kt$ (или $s=A\sin kt$) точка может совершать, двигаясь вдоль любой кривой (см., например, в § 46 задачу 51). Все сказанное о характере движения при этом сохранится с той лишь разницей, что последняя из формул (29) будет определять касательное ускорение точки; кроме него точка будет еще иметь нормальное ускорение $a_n=v^2/\rho$.

§ 45. ГРАФИКИ ДВИЖЕНИЯ, СКОРОСТИ И УСКОРЕНИЯ ТОЧКИ

Если в соответствующих масштабах откладывать вдоль оси абсцисс время t, а вдоль оси ординат — расстояние s, то построенная в этих осях кривая $s=f(t)$ будет изображать *график расстояний*, или *график движения* точки. По этому графику наглядно видно, как изменяется положение точки (ее координата s) с течением времени.

Аналогично, в соответствующих масштабах могут быть построены кривые, дающие зависимость $v(t)$ — *график скорости* и $a_\tau(t)$, $a_n(t)$, $a(t)$ — *графики касательного, нормального и полного ускорений.*

На рис. 127, *а, б, в* сверху показаны графики движений, определяемых соответственно уравнениями (25), (27) и (28). Ниже на тех же рисунках изображены для этих движений графики скоростей и графики касательных ускорений.

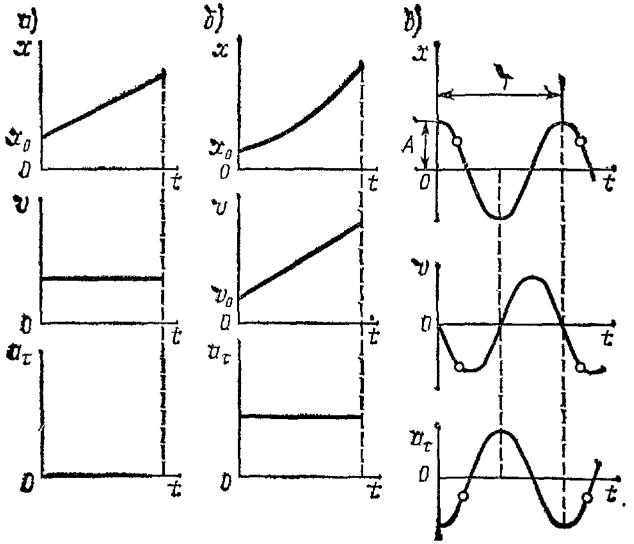

Рис. 127

График равномерного движения изображается, как мы видим, прямой линией, направленной под углом к оси абсцисс, график скорости в этом случае — прямой, параллельной оси абсцисс (v=const), а график касательного ускорения — прямой, совпадающей с осью абсцисс ($a_\tau=0$). Для равнопеременного движения (в изображенном на рис. 127, *б* случае — ускоренного) график движения изображается ветвью параболы, график скорости — прямой, направленной под углом к оси абсцисс, а график касательного ускорения — прямой, параллельной оси абсциис (a_τ=const). Наконец, для гармонических колебаний (рис. 127, *в*) соответствующие графики изображаются косинусоидами или синусоидами.

График движения не следует смешивать с траекторией, которая во всех рассмотренных случаях должна быть задана дополнительно.

Графики нормального и полного ускорений на рис. 127 не показаны, так как a_n и a кроме закона движения зависят еще от ρ, т. е. от вида траектории, и при одном и том же законе $s=f(t)$ будут для разных траекторий разными.

§ 46. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

Как уже указывалось, для решения задач кинематики надо знать закон движения точки. Если движение задано естественным способом (дана траектория и закон движения вдоль траектории), то все характеристики движения (скорость, касательное, нормальное и полное ускорение) определяются по формулам, полученным в § 42—44. Этими формулами можно, конечно, пользоваться и когда движение задано другим способом.

Покажем, как можно найти касательное и нормальное ускорения точки, когда движение задано координатным способом, например, уравнениями (4). Для этого по формулам (12) — (15) находим v и a. Беря производную по времени от найденной скорости v, можно определить $a_\tau=dv/dt$. Но обычно это проще делать иначе. Возьмем равенство $v^2=v_x^2+v_y^2$ и продифференцируем обе его части по t; получим $2v\dot{v}=2v_x\dot{v}_x+2v_y\dot{v}_y$. Отсюда, учитывая равенства (14') и то, что $\dot{v}=a_\tau$, находим окончательно

$$a_\tau=\frac{(v_x a_x+v_y a_y)}{v}. \tag{30}$$

Теперь, зная a и a_τ, определяем a_n из равенства $a^2=a_\tau^2+a_n^2$. Одновременно можно найти радиус кривизны траектории ρ из формулы $a_n=v^2/\rho$. Пример таких расчетов дан в задаче 53.

Задача 51. При небольших углах отклонения груз маятника (рис. 128) движется по окружности радиуса l по закону $s=A\sin kt$ (начало отсчета в точке O, A и k — постоянные величины). Найти скорость, касательное и нормальное ускорения груза и те положения, в которых эти величины обращаются в нуль.

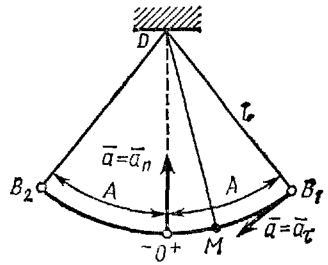

Рис. 128

Решение. Пользуясь соответствующими формулами, находим:

$$v=\dot{s}=Ak\cos kt;\quad a_\tau=\dot{v}=-Ak^2\sin kt;$$
$$a_n=v^2/l=(A^2k^2/l)\cos^2 kt.$$

Из закона движения следует, что груз совершает вдоль траектории гармонические колебания с дуговой амплитудой A. В крайних положениях (в точках B_1 и B_2) $\sin kt=\pm 1$, а следовательно, $\cos kt=0$. Поэтому в точках B_1 и B_2 скорость и нормальное ускорение обращаются в нуль; касательное же ускорение имеет здесь наибольшее по модулю значение $a_{\tau\,max}=Ak^2$.

Когда груз приходит в начало отсчета O, то $s=0$ и, следовательно, $\sin kt=0$, а $\cos kt=1$. В этом положении $a_\tau=0$, а v и a_n имеют максимальные значения: $v_{max}=Ak$, $a_{n\,max}=A^2k^2/l$.

Из данного примера видно, что при криволинейном неравномерном движении в отдельных точках траектории a_τ или a_n могут обращаться в нули. При этом $a_\tau=0$ в тех точках, где $dv/dt=0$, т. е. там, например, где v имеет максимум или минимум, а $a_n=0$ в тех точках, где $v=0$ (как в нашем случае) или где $\rho=\infty$ (точка перегиба траектории).

Задача 52. Переход от координатного способа задания движения к естественному. Движение точки M задано в декартовых координатах уравнениями:

$$x=R\cos(\varepsilon t^2/2),\quad y=R\sin(\varepsilon t^2/2), \tag{a}$$

где R и ε — постоянные положительные величины, имеющие размерности: R — длины, ε — углового ускорения (см. § 49).

Перейти к естественному способу задания движения, т. е. определить траекторию и закон движения точки вдоль траектории в виде $s=f(t)$. Найти также скорость и ускорение точки.

Решение. Возведя каждое из уравнений (а) почленно в квадрат и затем сложив их, получим $x^2+y^2=R^2$. Следовательно, траекторией точки является окружность радиуса R с центром в начале координат. Из уравнений (а) видно, что при $t=0$ $x=R$, $y=0$, т. е. точка M находится на оси Ox. Примем это положение M_0 за начало отсчета O' расстояния s; тогда при $t=0$ $s=0$. Когда $t>0$ y начинает возрастать, а x — убывать, т. е. точка начинает двигаться по направлению к оси Oy; примем это направление за положительное направление отсчета расстояния s.

Для определения зависимости $s=f(t)$ найдем выражение ds. Как известно, $ds^2=dx^2+dy^2$, а $dx=\dot{x}dt$, $dy=\dot{y}dt$. Тогда $ds=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt$, и поскольку при $t=0$ $s=0$,

$$s=\int_0^t \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt. \qquad (б)$$

Из уравнений (а) находим $\dot{x}=-R\varepsilon t\sin(\varepsilon t^2/2)$, $\dot{y}=R\varepsilon t\cos(\varepsilon t^2/2)$ и $\dot{x}^2+\dot{y}^2=R^2\varepsilon^2t^2$. Подставляя это выражение в равенство (б) и вынося постоянный множитель за знак интеграла, получим

$$s=R\varepsilon\int_0^t t\,dt \quad \text{или} \quad s=R\varepsilon t^2/2. \qquad (в)$$

Таким образом, точка движется по окружности радиуса R по закону $s=R\varepsilon t^2/2$. Скорость точки

$$v=\dot{s}=R\varepsilon t \qquad (г)$$

и растет пропорционально времени. Далее находим

$$a_\tau=\dot{v}=R\varepsilon,\quad a_n=v^2/R=R\varepsilon^2t^2. \qquad (д)$$

Так как $a_\tau=\text{const}$ и знаки v и a_τ совпадают ($v>0$ и $a_\tau>0$), то движение точки является равноускоренным (см. § 44, п. 4).

Наконец, по формулам (22) находим

$$a=R\varepsilon\sqrt{1+\varepsilon^2t^4},\quad \operatorname{tg}\mu=1/\varepsilon t^2. \qquad (е)$$

Как видим, при $t=0$ $a=a_\tau=R\varepsilon$ ($a_n=0$) и $\mu=\pi/2$. Затем со временем величина a растет, а угол μ между вектором $\bar{a}$ и радиусом окружности убывает, стремясь к нулю.

Задача 53. Точка, получив направленную горизонтально скорость, движется по закону, определяемому уравнениями:

$$x=v_0t,\ y=gt^2/2,$$

где v_0 и g — некоторые постоянные.

Найти траекторию, скорость и ускорение точки, а также ее касательное и нормальное ускорения и радиус кривизны траектории в любом положении, выразив их через скорость в этом положении.

Решение. Определяя из первого уравнения t и подставляя во второе, получим

$$y=\frac{g}{2v_0^2}x^2.$$

Траектория точки — парабола (рис. 129).

Дифференцируя уравнения движения по времени, найдем:

$$v_x=\dot{x}=v_0,\quad v_y=\dot{y}=gt, \qquad (а)$$

откуда

$$v=\sqrt{v_0^2+g^2t^2}. \qquad (б)$$

Таким образом, в начальный момент времени ($t=0$) скорость точки $v=v_0$, а затем с течением времени скорость непрерывно возрастает.

Найдем ускорение точки. По соответствующим формулам имеем:

$$a_x=\ddot{x}=0,\quad a_y=\ddot{y}=g. \qquad (в)$$

Следовательно, ускорение точки

$$a=g. \qquad (г)$$

В данном случае точка движется с постоянным по модулю и направлению ускорением, параллельным оси Oy (это ускорение силы тяжести). Обращаем внимание на то, что хотя здесь $a=\text{const}$, движение точки не является равнопеременным, так как условием равнопеременного движения является не $a=\text{const}$, а $a_\tau=\text{const}$. В этом же движении, как мы сейчас увидим, a_τ не постоянно.

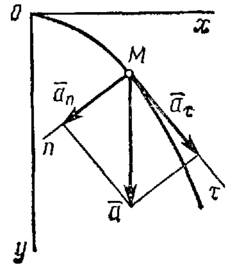

Рис. 129

Для определения a_τ воспользуемся формулой (30). Подставляя в нее значения соответствующих величин из равенств (а) и (в), получим

$$a_\tau=g^2t/v.$$

Но из равенства (б) $v^2=v_0^2+g^2t^2$ и, следовательно,

$$t=(1/g)\sqrt{v^2-v_0^2}.$$

Подставляя это значение t, выразим a_τ через скорость v:

$$a_\tau=g\sqrt{1-v_0^2/v^2}. \qquad (д)$$

Отсюда следует, что в начальный момент времени, когда $v=v_0$, $a_\tau=0$. Затем, с увеличением v значение a_τ растет и при $v\to\infty$ $a_\tau\to g$; следовательно, в пределе величина касательного ускорения стремится к полному ускорению g.

Для нахождения a_n обратимся к зависимости $a^2=a_\tau^2+a_n^2$. Отсюда

$$a_n^2=a^2-a_\tau^2=g^2-g^2(1-v_0^2/v^2)=g^2v_0^2/v^2$$

и

$$a_n=v_0g/v. \qquad (е)$$

Таким образом, в начальный момент времени ($v=v_0$) $a_n=g$, а затем с увеличением v значение a_n убывает, стремясь в пределе к нулю.

Для нахождения радиуса кривизны траектории воспользуемся формулой $a_n=v^2/\rho$, откуда

$$\rho=v^2/a_n=v^3/v_0g.$$

В начальный момент времени радиус кривизны имеет наименьшее значение $\rho_{min}=v_0^2/g$, а затем с увеличением v радиус кривизны растет и, следовательно, кривизна траектории уменьшается. При $v\to\infty$ $\rho\to\infty$, а кривизна стремится к нулю.

§ 47*. СКОРОСТЬ И УСКОРЕНИЕ ТОЧКИ В ПОЛЯРНЫХ КООРДИНАТАХ

Когда точка движется все время в одной и той же плоскости, ее положение можно определять полярными координатами r и φ (рис. 130). При движении точки эти координаты с течением времени изменяются. Следовательно, закон движения точки в полярных координатах будет задаваться уравнениями:

$$r=f_1(t),\quad \varphi=f_2(t). \qquad (31)$$

Скорость точки численно равна ds/dt, т. е. отношению элементарного перемещения ds к промежутку времени dt. В данном случае перемещение ds геометрически слагается из радиального перемещения, численно равного dr, и поперечного перемещения, перпендикулярного радиусу OM и численно равного $r \cdot d\varphi$. Следовательно, сама скорость v будет геометрически слагаться из радиальной скорости v_r и поперечной скорости v_φ, численно равных

$$v_r = \frac{dr}{dt} = \dot{r}, \quad v_\varphi = r\frac{d\varphi}{dt} = r\dot{\varphi}. \qquad (32)$$

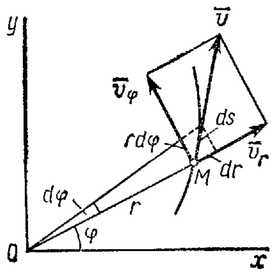

Рис. 130

Так как $\bar{v}_r$ и $\bar{v}_\varphi$ взаимно перпендикулярны, то по модулю

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_\varphi^2} = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2}. \qquad (33)$$

Формулы (32) и (33) определяют скорость точки в полярных координатах при плоском движении.

Равенство (33) можно еще получить, выразив через r и φ декартовы координаты точки в виде (рис. 130):

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi.$$

Тогда $\dot{x} = \dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi$, $\dot{y} = \dot{r}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi$ и по формуле (13)

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2}.$$

Таким же путем, вычислив $\ddot{x}$ и $\ddot{y}$, можно по формуле (15) найти выражение для ускорения точки в полярных координатах

$$a = \sqrt{(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)^2 + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})^2}. \qquad (34)$$

При этом величина, стоящая под знаком радикала в первых скобках, равна a_r, а во вторых скобках равна a_φ.

Глава X

ПОСТУПАТЕЛЬНОЕ И ВРАЩАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

§ 48. ПОСТУПАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ

В кинематике, как и в статике, будем рассматривать все твердые тела как абсолютно твердые. Задачи кинематики твердого тела распадаются на две части:

1) задание движения и определение кинематических характеристик движения тела в целом; 2) определение кинематических характеристик движения отдельных точек тела.

Начнем с рассмотрения поступательного движения твердого тела.

Поступательным называется такое движение твердого тела,