Глава XXXI

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ТЕОРИЯ УДАРА

§ 151. ОСНОВНОЕ УРАВНЕНИЕ ТЕОРИИ УДАРА

При движении тела под действием обычных сил, рассматривавшихся до сих пор, скорости точек тела изменяются непрерывно, т. е. каждому бесконечно малому промежутку времени соответствует бесконечно малое приращение скорости. Действительно, если импульс любой силы $\bar{F}_k$ за промежуток времени τ представить в виде $\bar{F}_k^s\tau$, где $\bar{F}_k^s$ — среднее значение этой силы за время τ, то теорема об изменении количества движения точки, на которую действуют силы $\bar{F}_k$, дает

$$m(\bar{v}_1 - \bar{v}_0) = \sum \bar{F}_k^s \tau.$$

Отсюда видно, что когда время τ бесконечно мало (стремится к нулю), то при обычных силах и приращение скорости $\Delta v = \bar{v}_1 - \bar{v}_0$ будет тоже величиной бесконечно малой (стремящейся к нулю). Однако если в числе действующих сил будут очень большие силы (порядка $1/\tau$), то приращение скорости за малый промежуток времени τ окажется величиной конечной. *Явление, при котором скорости точек тела за очень малый (близкий к нулю) промежуток времени τ изменяются на конечную величину, называется ударом.* Силы, при действии которых происходит удар, будем называть ударными силами $\bar{F}_{ud}$. Промежуток времени τ, в течение которого происходит удар, назовем временем удара. Так как ударные силы очень велики и за время удара изменяются в значительных пределах, то в теории удара в качестве меры взаимодействия тел рассматривают не сами ударные силы, а их импульсы. Ударный импульс

$$\bar{S}_{ud} = \int_0^\tau \bar{F}_{ud} dt = \bar{F}_{ud}^s.$$

является величиной конечной. Импульсы неударных сил за время τ будут величинами очень малыми и ими практически можно пренебречь. Будем в дальнейшем обозначать скорость точки в начале удара $\bar{v}$, а скорость в конце удара $\bar{u}$. Тогда теорема об изменении количества движения точки при ударе примет вид[1]

$$m(\bar{u} - \bar{v}) = \sum \bar{S}_k, \tag{153}$$

т.е. изменение количества движения материальной точки за время удара равно сумме действующих на точку ударных импульсов. Уравнение (153) является основным уравнением теории удара и играет в теории удара такую же роль, как основной закон динамики $m\bar{a} = \bar{F}$ при изучении движений под

[1] В дальнейшем будем ударный импульс обозначать просто символом S, так как импульсы неударных сил в теории удара не рассматриваются.

действием неударных сил. В заключение отметим, что перемещение точки за время удара будет равно $v_s \tau$, т. е. величине очень малой, которой практически можно пренебречь. Итак, из всех полученных результатов вытекает следующее:

1) действием неударных сил (таких, например, как сила тяжести) за время удара можно пренебречь;

2) перемещениями точек тела за время удара можно пренебречь и считать тело во время удара неподвижным;

3) изменения скоростей точек тела за время удара определяются основным уравнением теории удара (153).

§ 152. ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ УДАРА

Рассмотрим, какой вид принимают общие теоремы динамики для системы материальных точек при ударе.

1. Теорема об изменении количества движения системы при ударе. Уравнение (21), полученное в § 111, сохраняет свой вид и для случая удара. Но так как импульсами обычных сил при ударе пренебрегают, то в правой части останутся только ударные импульсы. Следовательно, при ударе

$$\bar{Q}_1 - \bar{Q}_0 = \sum \bar{S}_k^e, \tag{154}$$

т. е. изменение количества движения системы за время удара равно сумме всех внешних ударных импульсов, действующих на систему. В проекциях на любую координатную ось x уравнение (154) дает

$$Q_{1x} - Q_{0x} = \sum S_{kx}^e, \tag{154$'$}$$

Если геометрическая сумма всех внешних ударных импульсов равна нулю, то, как видно из уравнения (154), количество движения систему за время удара не изменяется. Следовательно, внутренние ударные импульсы не могут изменить количества движения всей системы.

2. Теорема об изменении главного момента количеств движения, системы (теорема моментов) при ударе. Теорема моментов принимает для случая удара вид, несколько отличный от полученного в § 116; объясняется это тем, что точки системы за время удара не перемещаются. Рассмотрим систему, состоящую из n материальных точек. Обозначим равнодействующую внешних ударных импульсов, действующих на точку с массой m_k через $\bar{S}_k^e$, а равнодействующую действующих на ту же точку внутренних ударных импульсов — через $\bar{S}_k^i$. Тогда по уравнению 153) будет $m_k(\bar{u}_k - \bar{v}_k) = \bar{S}_k^e + \bar{S}_k^i$, или

$$m_k \bar{u}_k = \bar{v}_k + \bar{S}_k^e + \bar{S}_k^i$$

Входящие в это равенство векторы приложены к точке, которая, как. было указано, за время удара остается неподвижной. Тогда, беря моменты этих векторов относительно какого-нибудь центра O, по теореме Вариньона, справедливой для любых векторных величин, найдем, что

$$\bar{m}_0(m_k \bar{u}_k) = \bar{m}_0(\bar{v}_k) + \bar{m}_0(\bar{S}_k^e) + \bar{m}_0(\bar{S}_k^i).$$

Составляя такие равенства для всех точек системы и складывая их почленно, получим

$$\bar{m}_0(m_k\bar{u}_k) - \bar{m}_0(\bar{v}_k) = \bar{m}_0(\bar{S}_k^e) + \bar{m}_0(\bar{S}_k^i).$$

Суммы, стоящие слева, представляют собой главные моменты количеств движения системы относительно центра 0 в конце и в начале удара, которые обозначим $\bar{K}_1$ и $\bar{K}_0$. Стоящая справа сумма моментов внутренних ударных импульсов по свойству внутренних сил равна нулю. Окончательно находим

$$\bar{K}_1 - \bar{K}_0 = \sum \bar{m}_0(\bar{S}_k^e) \tag{155}$$

т. е. изменение за время удара главного момента количеств движения системы относительно какого-нибудь центра равно сумме моментов относительно того же центра всех действующих на систему внешних ударных импульсов. В проекциях на любую ось x равенство (155) дает

$$K_{1x} - K_{0x} = \sum m_{0x}(\bar{S}_k^e) \tag{155$'$}$$

Из полученных уравнений следует, что если сумма моментов внешних ударных импульсов относительно какого-нибудь центра (или оси) равна нулю, то главный момент количеств движения системы относительно этого центра (или оси) за время удара не изменяется. Следовательно, внутренние ударные импульсы не могут изменить главный момент количеств движения системы. Вопрос о том, как изменяется за время удара кинетическая энергия соударяющихся тел, будет рассмотрен в § 156.

§153. КОЭФФИЦИЕНТ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ПРИ УДАРЕ

Значение ударного импульса, появляющегося при соударении двух тел, зависит не только от их масс и скоростей до удара, но и от упругих свойств соударяющихся тел; эти свойства при ударе характеризуют величиной, называемой коэффициентом восстановления.

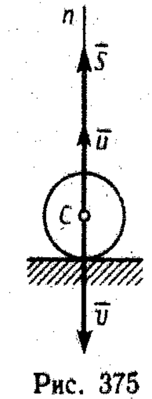

Рис. 375

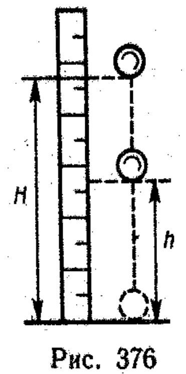

Рис. 376

Рассмотрим шар, падающий вертикально на неподвижную горизонтальную жесткую плиту (рис. 375). Для прямого удара, который при этом произойдет, можно различать две стадии. В течение первой стадии скорости частиц шара, равные в момент начала удара v (движение шара считаем поступательным), убывают до нуля. Шар при этом деформируется и вся его начальная кинетическая энергия $mv^2/2$ переходит во внутреннюю потенциальную энергию деформированного тела. Во второй стадии удара шар под действием внутренних сил (сил упругости) начинает восстанавливать свою форму; при этом его внутренняя потенциальная энергия переходит в кинетическую энергию движения частиц шара. В конце удара скорости частиц будут равны u, а кинетическая энергия шара $mu^2/2$. Однако полностью механическая энергия шара при этом не восстанавливается, так как часть ее уходит на сообщение шару остаточных деформаций и его нагревание. Поэтому скорость и будет меньше v. Величина k, равная при прямом ударе тела о неподвижную преграду отношению модуля скорости тела в конце удара к модулю скорости в начале удара, называется коэффициентом восстановления при ударе:

$$k = u/v. \tag{156}$$

Значение коэффициента восстановления для разных тел определяется опытным путем. По данным опыта при изменении скорости v не в очень больших пределах величину k можно считать зависящей только от материала соударяющихся тел.

В качестве предельных случаев рассматривают случай абсолютно упругого удара ($k = 1$), при котором кинетическая энергия тела после удара полностью восстанавливается, и случай абсолютно неупругого удара ($k = 0$), когда удар заканчивается в первой стадии и вся кинетическая энергия тела теряется на его деформацию и нагревание.

Экспериментально величину k можно найти, если рассмотреть шар, свободно падающий на плиту с предварительно измеренной высоты H, и определить с помощью стоящей рядом вертикальной рейки (рис. 376) высоту его подъема h после удара. Тогда по формуле Галилея

$$v = \sqrt{2gH}, \quad u = \sqrt{2gh}, \; k = u/v = \sqrt{h/H}$$

Значение коэффициента восстановления для тел из различных материалов дается в соответствующих справочниках. В частности, можно считать при скоростях соударения порядка 3 м/с для удара дерева о дерево $k \approx 0,5$, стали о сталь $k \approx 0,56$, стекла о стекло $k \approx 0,94$.