

Глава 12

ДИНАМИКА СИСТЕМЫ

12.1. Теорема о движении центра масс

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. *Механизм, состоящий из n связанных между собой тел, установлен на призме, находящейся на горизонтальной плоскости. Трение между призмой и плоскостью отсутствует. Одно из тел получает перемещение относительно призмы. Куда и на какое расстояние переместится призма?*

ПЛАН РЕШЕНИЯ

Для решения задачи используем теорему о движении центра масс. Выбираем систему координат. Одну из осей, например, ось x направляем перпендикулярно линии действия внешних сил. В проекции на ось x уравнение движения центра масс принимает вид

$$m\ddot{x}_c = 0, \quad (1)$$

где x_c — координата центра масс системы, $m = \sum_{i=1}^n m_i$ — масса всей системы. Дважды интегрируя (1) при условии, что в начальный момент скорость центра масс была равна нулю, получаем

$$mx_c = \text{const}. \quad (2)$$

Координата центра масс системы вычисляется по формуле

$$x_c = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i x_i. \quad (3)$$

Записывая (2) с учетом (3), один раз для начального положения системы (в покое), а другой раз после смещения одного из тел, получаем формулу, связывающую абсолютные смещения тел системы:

$$\sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i = 0. \quad (4)$$

1. Абсолютное смещение каждого тела представляем как сумму относительного смещения, зависящего от величины заданного относительного смещения одного из тел, и неизвестного переносного смещения Δ , равного абсолютному смещению того тела, относительно которого задавалось смещение.

2. Подставляя абсолютные смещения в (4), получаем уравнение для смещения Δ . Решение уравнения дает ответ.

ПРИМЕР. Механизм, состоящий из груза A массой 50 кг, блока B массой 80 кг (большой радиус $R = 30$ см, меньший — $r = 10$ см) и цилиндра C массой 120 кг радиусом $R_C = r/2$, установлен на призме D массой 210 кг, находящейся на горизонтальной плоскости. Трение между призмой и плоскостью отсутствует. Груз A получает перемещение $S = 1.2$ м относительно призмы вдоль ее поверхности влево; $\alpha = 75^\circ$ (рис. 124). Куда и на какое расстояние переместится призма?

РЕШЕНИЕ

Задаем систему координат. Проекции на горизонтальную ось всех внешних сил (сил тяжести $\vec{G}_A, \vec{G}_B, \vec{G}_C, \vec{G}_D$, реакции опоры \vec{N}), действующих на систему, равны нулю (рис. 125), а трения между призмой D и опорой по условию нет. Применим к системе следствие из теоремы о движении центра масс в форме (4).

1. Абсолютное смещение тел A, B и C представляем как сумму относительного смещения, зависящего от величины S относительного смещения груза A , и неизвестного переносного смещения Δ_D , равного

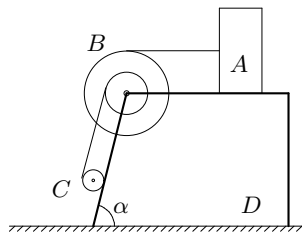


Рис. 124

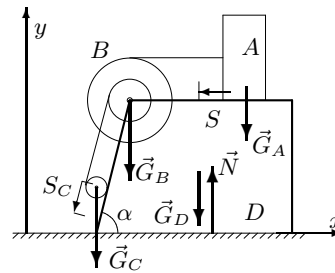


Рис. 125

абсолютному смещению призмы, относительно которой задавалось смещение S . Обозначаем абсолютные смещения координат центров масс тел системы $\Delta_A, \Delta_B, \Delta_C, \Delta_D$. Направление оси x определяет знаки смещений: налево с минусом, направо с плюсом. Предполагаем, что призма сместится направо. Перемещение центра цилиндра C относительно призмы и перемещение груза A связаны так же, как связаны их скорости.

Цилиндр C совершает плоское движение. Абсолютное смещение его центра в проекции на ось x равно $\Delta_D - S_C \cos \alpha$, где S_C — смещение центра цилиндра вдоль наклонной поверхности призмы. Выразим S_C через S . Для этого свяжем скорости груза A и центра масс цилиндра C . Мгновенный центр скоростей цилиндра находится в точке касания призмы, поэтому скорость его центра масс относительно призмы вдвое меньше скорости нити, накручиваемой на обод. Скорость груза A выражаем через угловую скорость блока (рис. 132, с. 249):

$$v_C = 0.5\omega_B r, \quad v_A = \omega_B R. \quad (5)$$

Исключая отсюда ω_B , имеем связь скоростей: $v_C = 0.5v_A r/R$. Интегрируя это соотношение при нулевых начальных значениях, получаем искомую зависимость: $S_C = 0.5Sr/R$. Находим выражение абсолютных смещений всех тел через Δ_D и S :

$$\Delta_A = \Delta_D - S, \quad \Delta_B = \Delta_D, \quad \Delta_C = \Delta_D - 0.5Sr/R \cos \alpha. \quad (6)$$

2. Подставляя абсолютные смещения в (4), получаем уравнение

$$m_A \Delta_A + m_B \Delta_B + m_C \Delta_C + m_D \Delta_D = 0,$$

или

$$m_A(\Delta_D - S) + m_B \Delta_D + m_C(\Delta_D - 0.5Sr/R \cos \alpha) + m_D \Delta_D = 0.$$

Решаем это уравнение относительно Δ_D :

$$\Delta_D = \frac{m_A S + m_C 0.5S(r/R) \cos \alpha}{m_A + m_B + m_C + m_D} = 14.39.$$

Призма D переместится вправо на 14.39 см.

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ. Механизм, состоящий из груза A , блока B (больший радиус R , меньший — r) и цилиндра C радиусом R_C , установлен на призме D , находящейся на горизонтальной плоскости. Трение между призмой и плоскостью отсутствует. Груз A получает перемещение $S = 1$ м относительно призмы вдоль ее поверхности влево или (в тех вариантах, где он висит) по вертикали вниз. Куда и на какое расстояние переместится призма?