$=6378$ км — радиус земного экватора, а $g_0=9{,}82$ м/с²)

$$v_0=\sqrt{g_0R_0}=7914 \text{ м/с} \approx 7{,}9 \text{ км/с}. \qquad (28)$$

Эта наименьшая скорость, которую нужно сообщить брошенному телу, чтобы оно не упало обратно на Землю, называется *круговой* или *первой космической скоростью* (см. § 97, 98).

Глава XVII

ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ ТОЧКИ

Для решения многих задач динамики, особенно в динамике системы, вместо непосредственного интегрирования дифференциальных уравнений движения оказывается более эффективным пользоваться так называемыми общими теоремами, являющимися следствиями основного закона динамики.

Значение общих теорем состоит в том, что они устанавливают наглядные зависимости между соответствующими динамическими характеристиками движения материальных тел и открывают тем самым новые возможности исследования движения механических систем, широко применяемые в инженерной практике. Кроме того, применение общих теорем избавляет от необходимости проделывать для каждой задачи те операции интегрирования, которые раз и навсегда производятся при выводе этих теорем; тем самым упрощается процесс решения.

Перейдем к рассмотрению общих теорем динамики точки.

§ 83. КОЛИЧЕСТВО ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ. ИМПУЛЬС СИЛЫ

Одной из основных динамических характеристик движения точки является количество движения *.

Количеством движения материальной точки называется векторная величина $m\bar{v}$, равная произведению массы точки на ее скорость. Направлен вектор $m\bar{v}$ так же, как и скорость точки, т. е. по касательной к ее траектории.

Единицей измерения количества движения является в СИ — 1 кг·м/с$=$1 Н·с, а в системе МКГСС—1 кГ·с.

Импульс силы. Для характеристики действия, оказываемого на тело силой за некоторый промежуток времени, вводится понятие об импульсе силы. Сначала введем понятие об элементарном импульсе, т. е. об импульсе за элементарный промежуток времени dt. *Элементарным импульсом силы называется векторная величина $d\bar{S}$, равная произведению силы $\bar{F}$ на элементарный промежуток времени dt:*

* Другая основная динамическая характеристика — кинетическая энергия — будет рассмотрена в § 89.

$$d\bar{S}=\bar{F}\,dt. \qquad (29)$$

Направлен элементарный импульс вдоль линии действия силы.

Импульс $\bar{S}$ любой силы $\bar{F}$ за конечный промежуток времени t_1 вычисляется как предел интегральной суммы соответствующих элементраных импульсов, т. е.

$$\bar{S}=\int_0^{t_1}\bar{F}\,dt. \qquad (30)$$

Следовательно, *импульс силы за некоторый промежуток времени t_1 равен определенному интегралу от элементарного импульса, взятому в пределах от нуля до t_1.*

В частном случае, если сила $\bar{F}$ постоянна и по модулю, и по направлению ($\bar{F}=\text{const}$), то $\bar{S}=\bar{F}t_1$. Причем в этом случае и модуль $S=Ft_1$. В общем случае модуль импульса может быть вычислен по его проекциям на координатные оси:

$$S_x=\int_0^{t_1}F_x\,dt, \quad S_y=\int_0^{t_1}F_y\,dt, \quad S_z=\int_0^{t_1}F_z\,dt. \qquad (31)$$

Единицей измерения импульса силы, как и количества движения, является в СИ — 1 кг·м/с, а в системе МКГСС — 1 кГ·с.

§ 84. ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ

Так как масса точки постоянна, а ее ускорение $\bar{a}=d\bar{v}/dt$, то уравнение (2), выражающее основной закон динамики, можно представить в виде

$$\frac{d(m\bar{v})}{dt}=\sum\bar{F}_k. \qquad (32)$$

Уравнение (32) выражает одновременно теорему об изменении количества движения точки в дифференциальной форме: *производная по времени от количества движения точки равна сумме действующих на точку сил* *.

Пусть движущаяся точка имеет в момент времени $t=0$ скорость $\bar{v}_0$, а в момент t_1 — скорость $\bar{v}_1$. Умножим тогда обе части равенства (32) на dt и возьмем от них определенные интегралы. При этом справа, где интегрирование идет по времени, пределами интеграла будут 0 и t_1, а слева, где интегрируется скорость, пределами интеграла будут соответствующие значения скорости $\bar{v}_0$ и $\bar{v}_1$. Так как интеграл

* По существу это другая формулировка 2-го закона динамики, близкая к той, которую дал сам Ньютон.

от $d(m\bar{v})$ равен $m\bar{v}$, то в результате получим

$$m\bar{v}_1 - m\bar{v}_0 = \sum \int_0^{t_1} \bar{F}_k \, dt.$$

Стоящие справа интегралы, как следует из формулы (30), представляют собой импульсы действующих сил. Поэтому окончательно будет

$$m\bar{v}_1 - m\bar{v}_0 = \Sigma \bar{S}_k. \tag{33}$$

Уравнение (33) выражает теорему об изменении количества движения точки в конечном виде: *изменение количества движения точки за некоторый промежуток времени равно сумме импульсов всех действующих на точку сил за тот же промежуток времени.*

При решении задач вместо векторного уравнения (33) часто пользуются уравнениями в проекциях. Проектируя обе части равенства (33) на координатные оси, получим

$$\left.\begin{aligned} mv_{1x} - mv_{0x} &= \Sigma S_{kx}, \\ mv_{1y} - mv_{0y} &= \Sigma S_{ky}, \\ mv_{1z} - mv_{0z} &= \Sigma S_{kz}. \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

В случае прямолинейного движения, происходящего вдоль оси Ox, теорема выражается первым из этих уравнений.

Решение задач. Уравнения (33) или (34) позволяют, зная как при движении точки изменяется ее скорость, определить импульс действующих сил (первая задача динамики) или, зная импульсы действующих сил, определить, как изменяется при движении скорость точки (вторая задача динамики). При решении второй задачи, когда заданы силы, надо вычислить их импульсы, Как видно из равенств (30) или (31), это можно сделать лишь тогда, когда силы постоянны или зависят только от времени.

Таким образом, уравнения (33), (34) можно непосредственно использовать для решения второй задачи динамики, когда в задаче в число данных и искомых величин входят: действующие силы, *время движения* точки и ее начальная и конечная скорости (т. е. величины F, t, v_0, v_1), причем силы должны быть постоянными или зависящими только от времени.

Задача 95. Точка, масса которой $m = 2$ кг, движется по окружности с численно постоянной скоростью $v = 4$ м/с. Определить импульс действующей на точку силы за время, в течение которого точка проходит четверть окружности.

Решение. По теореме об изменении количества движения $\bar{S} = m\bar{v}_1 - m\bar{v}_0$. Строя геометрически разность этих количеств движения (рис. 222), находим из полученного прямоугольного треугольника

$$S = m\sqrt{v_1^2 + v_0^2}.$$

Но по условиям задачи $v_0 = v_1 = v$, следовательно,

$$S = mv\sqrt{2} = 11{,}3 \text{ кг}\cdot\text{м/с}.$$

Для аналитического подсчета можно, используя первые два из уравнений (34), найти

$$S_x = mv_0, \quad S_y = -mv_1, \quad \text{откуда} \quad S = m\sqrt{v_0^2 + v_1^2}.$$

Задача 96. Грузу, имеющему массу m и лежащему на горизонтальной плоскости, сообщают (толчком) начальную скорость $\bar{v}_0$ Последующее движение груза тормозится постоянной силой $\bar{F}$. Определить, через сколько времени груз остановится.

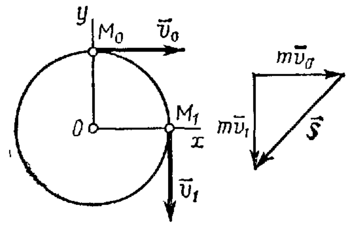

Рис. 222

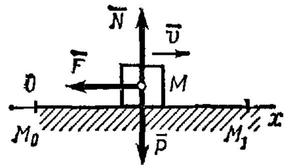

Рис. 223

Решение. По данным задачи видно, что для определения времени движения можно воспользоваться доказанной теоремой. Изображаем груз в произвольном положении (рис. 223). На него действуют сила тяжести $\bar{P}$, реакция плоскости $\bar{N}$ и тормозящая сила $\bar{F}$. Направляя ось Ox в сторону движения, составляем первое из уравнений (34)

$$mv_{1x} - mv_{0x} = \Sigma S_{kx}. \tag{а}$$

В данном случае $v_{1x} = 0$ (v_1 — скорость в момент остановки), а $v_{0x} = v_0$. Из сил проекцию на ось Ox дает только сила $\bar{F}$. Так как она постоянна, то $S_x = F_x t_1 = -Ft_1$, где t_1 — время торможения. Подставляя все эти данные в уравнение (а), получаем $-mv_0 = -Ft_1$, откуда искомое время

$$t_1 = mv_0/F. \tag{б}$$

Таким образом, время торможения растет пропорционально начальной скорости.

Решим эту же задачу, считая, что тормозящая сила равна Q и не постоянна, а с момента начала торможения растет пропорционально времени, т. е. $Q = kt$, где k — некоторый постоянный коэффициент, и становится равной F в момент остановки груза. Так как сила зависит от времени, то опять можно воспользоваться уравнением (а), определяя S_x по первой из формул (31). Учтя, что $Q_x = -Q = -kt$, получим

$$S_x = -\int_0^{t_1} kt \, dt = -kt_1^2/2.$$

Тогда уравнение (а) дает $mv_0 = kt_1^2/2$. Значение k найдем из условия, что при $t = t_1$ $Q = F$, т. е. $kt_1 = F$, откуда $k = F/t_1$ и окончательно будет

$$t_1 = 2mv_0/F. \tag{в}$$

Следовательно, в этом случае время торможения удваивается.

§ 85. ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ МОМЕНТА КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ (ТЕОРЕМА МОМЕНТОВ)

В некоторых задачах в качестве динамической характеристики движения точки вместо самого вектора количества движения $m\bar{v}$ рассматривают его момент относительно некоторого центра или оси.