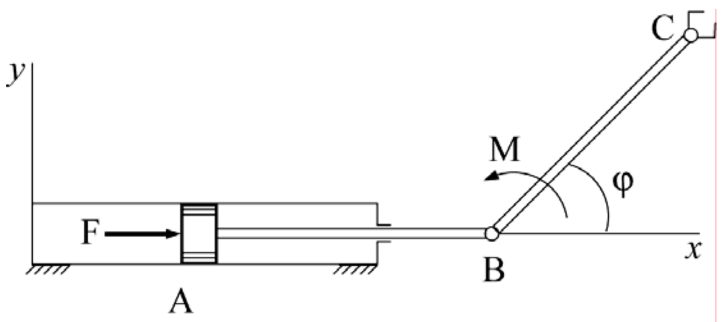
Зацепин М.Ф., Панкратьева Г.В.

Задачи управления движением манипулятора

1. Уравнения малых колебаний около положения равновесия

Задача 1.1

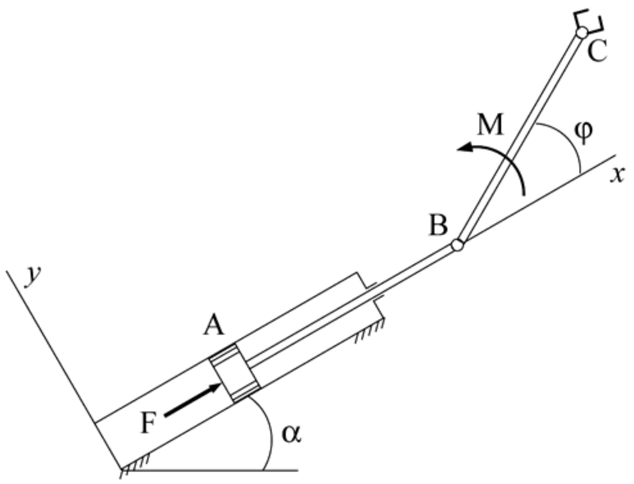


Манипулятор работает в вертикальной плоскости. Известно, что масса поршня А вместе со штоком АВ равна m_1, масса схвата С равна m_2, длина невесомого звена ВС = l, $F_x = -a_1\dot{x} - b_1 x$, момент: $M_z = M_{0z} + U_z - a_2\dot{\varphi}$, управление $U_z = -N(\varphi - \varphi_0)$, $a_1, a_2, b_1, N -$ константы. За обобщенные координаты принять угол φ и координату x поршня А, отсчитываемую от положения равновесия.

Требуется:

1. Составить уравнения движения в форме Лагранжа.
2. Определить M_{0z} из условия равновесия при $x = 0$ $\varphi = \varphi_0$ и $U_z = 0$.
3. Линеаризовать уравнения в окрестности положения равновесия.
4. Записать характеристический полином полученной линейной системы.

Задача 1.2

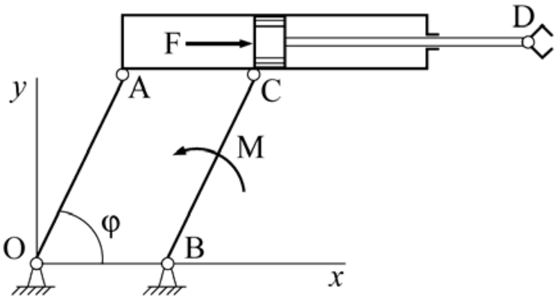


Манипулятор работает в вертикальной плоскости. Известно, что масса поршня А вместе со штоком АВ равна m_1, масса схвата С равна m_2, длина невесомого звена ВС = l, $\alpha -$ угол наклона цилиндра к горизонту, сила: $F_x = F_{0x} - a_1\dot{x} - b_1 x$, момент: $M_z = M_{0z} + U_z - a_2\dot{\varphi}$, управление: $U_z = -N(\varphi - \varphi_0)$, $a_1, a_2, b_1, N -$ константы. За обобщенные координаты принять угол φ и координату x поршня А, отсчитываемую от положения равновесия.

Требуется:

1. Составить уравнения движения в форме Лагранжа.
2. Определить M_{0z}, F_{0x} из условия равновесия при $x = 0$, $\varphi = \varphi_0$ и $U_z = 0$.
3. Линеаризовать уравнения в окрестности положения равновесия.
4. Записать характеристический полином полученной линейной системы.

Задача 1.3

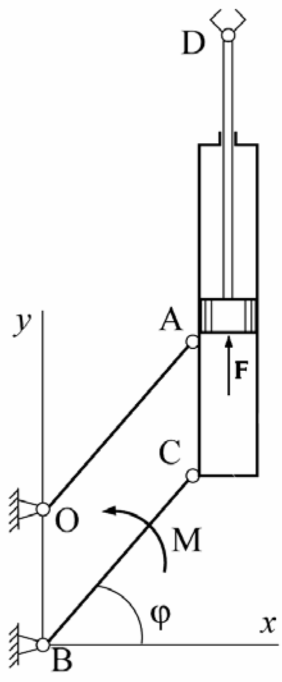


Манипулятор работает в вертикальной плоскости. Известно, что масса поршня вместе со штоком и схватом m_1, масса цилиндра m_2, звенья OA и BC длины l, их массой пренебречь; OB=AC; $F_x = -a_1\dot{x} - b_1 x$, момент: $M_z = M_{0z} + U_z - a_2\dot{\varphi}$, управление: $U_z = -N(\varphi - \varphi_0)$, $a_1, a_2, b_1, N -$ константы. За обобщенные координаты принять угол φ и координату x схвата D, отсчитываемую от положения равновесия.

Требуется:

1. Составить уравнения движения в форме Лагранжа.
2. Определить M_{0z} из условия равновесия при $x = 0$ $\varphi = \varphi_0$ и $U_z = 0$.
3. Линеаризовать уравнения в окрестности положения равновесия.
4. Записать характеристический полином полученной линейной системы.

Задача 1.4

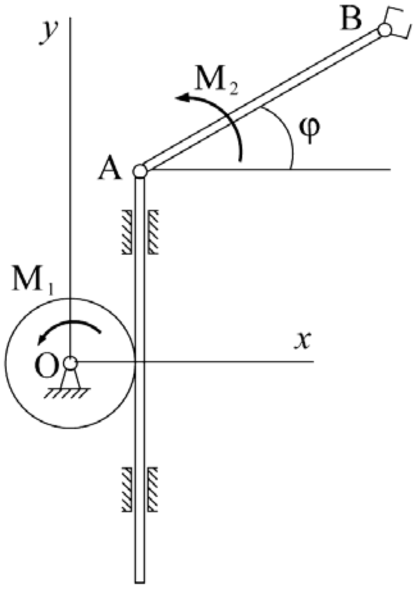


Манипулятор работает в вертикальной плоскости. Известно, что масса поршня A вместе со штоком AD и схватом D равна m_1, масса цилиндра m_2, звенья OA и BC длины l, их массой пренебречь; OB=AC; $F_y = F_{0y} - a_1\dot{y} - b_1 y$, $M_z = M_{0z} + U_z - a_2\dot{\varphi}$, управление $U_z = -N(\varphi - \varphi_0)$, $a_1, a_2, b_1, N -$ константы. За обобщенные координаты принять угол φ и координату y поршня A, отсчитываемую от положения равновесия.

Требуется:

1. Составить уравнения движения в форме Лагранжа.
2. Определить M_{0z} и F_{0y} из условия равновесия при $y = 0$ $\varphi = \varphi_0$ и $U_z = 0$.
3. Линеаризовать уравнения в окрестности положения равновесия.
4. Записать характеристический полином полученной линейной системы.

Задача 1.5

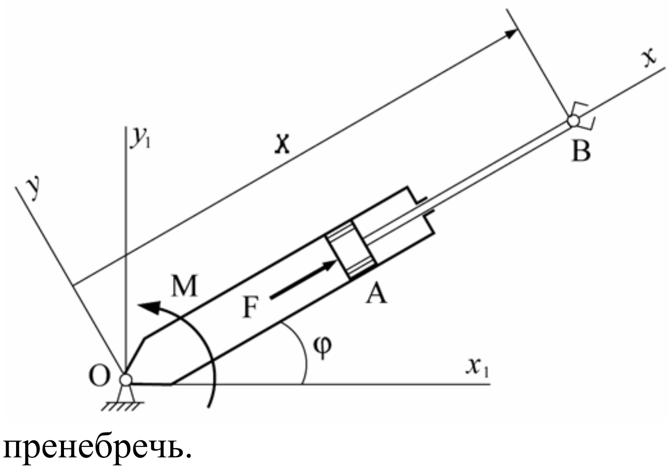


Манипулятор работает в вертикальной плоскости. Известно, что масса колеса m_1, его радиус *r,* масса схвата m_2, длина звена АВ = *l*, его массой и массой рейки пренебречь; моменты $M_{1z} = M_{01z} - a_1\omega_{1z}$, $M_{2z} = M_{02z} + U_z - a_2\dot{\varphi}$, управление $U_z = -N(\varphi - \varphi_0)$, $a_1, a_2, N -$ константы. За обобщенные координаты принять угол φ и координату *y* точки А, отсчитываемую от положения равновесия.

Требуется:

1. Составить уравнения движения в форме Лагранжа.
2. Определить M_{01z}, M_{02z} из условия равновесия при $y = 0$, $\varphi = \varphi_0$ и $U_z=0$.
3. Линеаризовать уравнения в окрестности положения равновесия.
4. Записать характеристический полином полученной линейной системы.

Задача 1.6

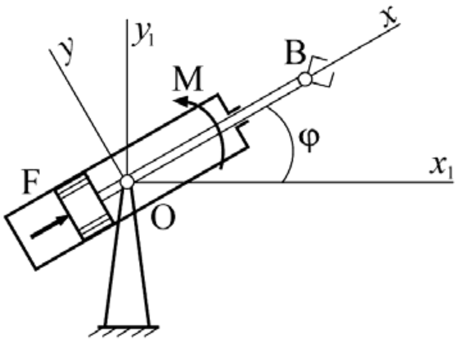


Манипулятор работает в горизонтальной плоскости. Известно, что масса схвата В равна m_1, момент инерции цилиндра I_{0z}, $F_x = F_{0x} - a_1\dot{x} - b_1 x$, $M_z = M_{0z} + U_z - a_2\dot{\varphi}$ управление $U_z = -N\left(A\varphi - B(x - x_0)\right)$, $a_1, a_2, b_1, N, A, B -$ константы. За обобщенные координаты принять угол φ и координату x схвата. Массой поршня пренебречь.

Требуется:

1. Составить уравнения движения в форме Лагранжа.
2. Определить F_{0x}, M_{0z} из условия равновесия при угле $\varphi = 0$, $U_z = 0$, $x = x_0$.
3. Линеаризовать уравнения в окрестности положения равновесия.
4. Записать характеристический полином полученной линейной системы.

Задача 1.7

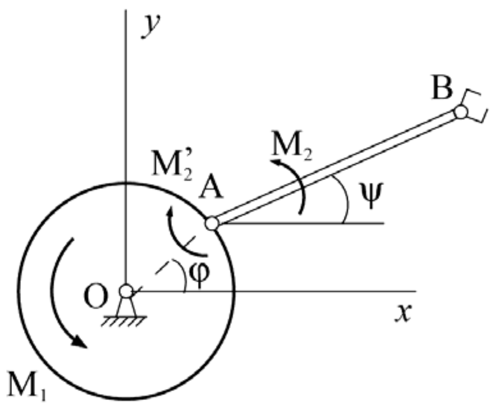


Манипулятор работает в вертикальной плоскости. Известно, что масса схвата B равна m_1, момент инерции цилиндра I_{0z}, его центр масс совпадает с шарниром O, $F_x = F_{0x} + U_x - \mu_1 \dot{x}$, $M_z = M_{0z} - \mu_2 \dot{\varphi}$ управление $U_z = -N\left(x - x_0\right)$, $\mu_1, \mu_2, N -$ константы. За обобщенные координаты принять угол φ и координату x схвата. Массой поршня пренебречь.

Требуется:

1. Составить уравнения движения в форме Лагранжа.
2. Определить F_{0x}, M_{0z} из условия равновесия при угле $\varphi = \varphi_0$, $U_z = 0$, $x = x_0$.
3. Линеаризовать уравнения в окрестности положения равновесия.
4. Записать характеристический полином полученной линейной системы.

Задача 1.8

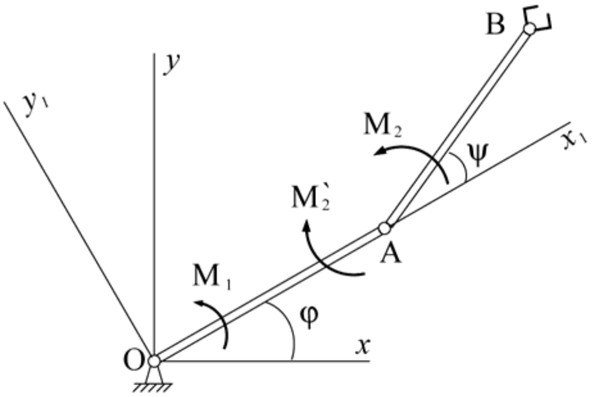


Манипулятор типа «Скара» работает в вертикальной плоскости. Известно, что масса диска m_1, его радиус *r*; масса схвата B m_2, длина звена AB равна 2*r,* его массой пренебречь; моменты: $M_{1z} = M_{01z} + U_z - \mu_1 \dot{\varphi}$, $M_{2z} = M_{02z} - \mu_2 \dot{\psi}$, $M'_{2z} = -M_{2z}$, $\mu_1, \mu_2, N -$ константы; управление $U_z = -N\left(\varphi - \varphi_0\right)$. За обобщенные координаты принять углы φ и ψ.

Требуется:

1. Составить уравнения движения в форме Лагранжа.
2. Определить M_{01z} и M_{02z} из условия равновесия при $\psi = 0$, $\varphi = \varphi_0$ и $U_z = 0$.
3. Линеаризовать уравнения в окрестности положения равновесия.
4. Записать характеристический полином полученной линейной системы.

Задача 1.9

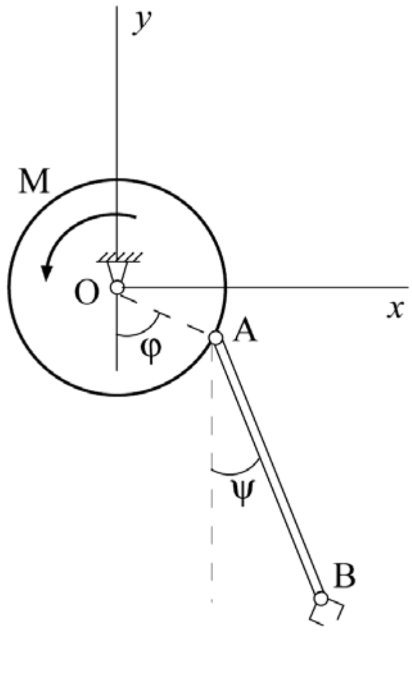


Манипулятор типа «Скара» работает в горизонтальной плоскости. Известно, что масса схвата В m_1, момент инерции звена ОА - I_{0z}, его длина l равна длине невесомого звена АВ; моменты: $M_{1z} = M_{01z} - \mu_1 \dot{\varphi}$, $M_{2z} = M_{02z} + U_z - \mu_2 \dot{\psi}$, управление $U_z = -N\left(A\varphi + B(\psi - \psi_0)\right)$, $\mu_1, \mu_2, N -$ константы. За обобщенные координаты принять углы φ и ψ.

Требуется:

1. Составить уравнения движения в форме Лагранжа.
2. Определить M_{01z} и M_{02z} из условия равновесия при $U_z = 0$, $\psi = \psi_0$, $\varphi = 0$.
3. Линеаризовать уравнения в окрестности положения равновесия.
4. Записать характеристический полином полученной линейной системы.

Задача 1.10



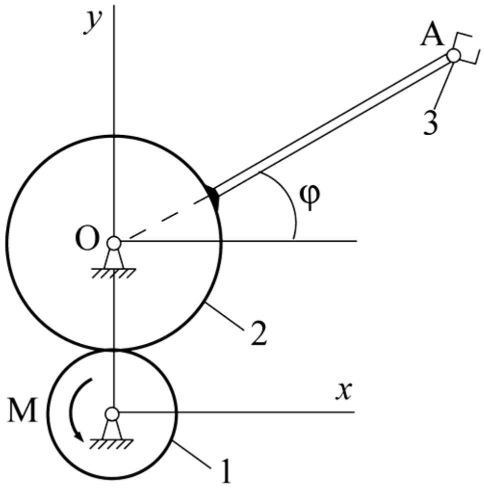
Манипулятор типа «Скара» работает в вертикальной плоскости. Известно, что масса диска m_1, его радиус r; масса схвата В m_2, длина звена АВ равна $2r$, его массой пренебречь; $M_z = M_{0z} + U_z - \mu \dot{\varphi}$, управление $U_z = -N\left(\varphi - \varphi_0\right), \mu, N -$ константы. За обобщенные координаты принять углы φ и ψ.

Требуется:

1. Составить уравнения движения в форме Лагранжа.
2. Определить M_{0z} из условия равновесия при $\psi = 0$ $\varphi = \varphi_0$.
3. Линеаризовать уравнения в окрестности положения равновесия.
4. Записать характеристический полином полученной линейной системы.

2. Исследование условий асимптотической устойчивости позиционирования манипулятора в заданном положении

Задача 2.1

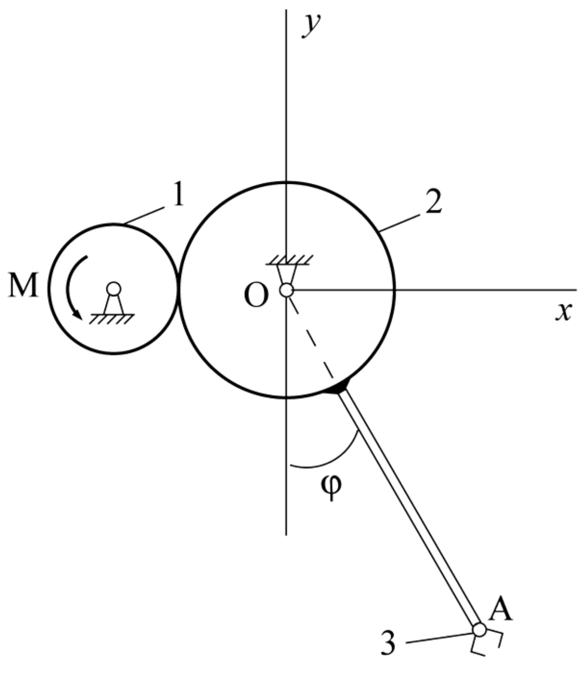


Одностепенной манипулятор работает в вертикальной плоскости. Дано: m_1, m_2, m_3, r, R, OA = l. Момент двигателя: $M_z = M_{0z} + U_z - \mu\omega_{1z}$, управление: $U_z = N(\varphi - \varphi_0)$, $\mu, N -$ константы. За обобщенную координату принять угол φ.

Требуется:

1. Составить уравнение движения в форме Лагранжа.
2. Определить M_{0z} из условия равновесия при $\varphi = \varphi_0$ и $U_z = 0$.
3. Линеаризовать уравнение в окрестности положения равновесия.
4. Записать характеристический полином полученного линейного уравнения.
5. Найти условия устойчивости позиционирования.

Задача 2.2

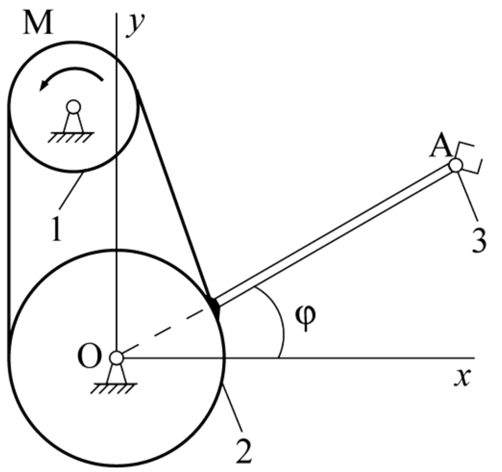


Одностепенной манипулятор работает в вертикальной плоскости. Дано: m_1, m_2, m_3, r, R, OA=l. Момент двигателя: $M_z = M_{0z} + U_z - \mu\omega_{1z}$, управление: $U_z = N(\varphi - \varphi_0)$, $\mu, N -$ константы. За обобщенную координату принять угол φ.

Требуется:

1. Составить уравнение движения в форме Лагранжа.
2. Определить M_{0z} из условия равновесия при $\varphi = \varphi_0$ и $U_z = 0$.
3. Линеаризовать уравнение в окрестности положения равновесия.
4. Записать характеристический полином линейного уравнения.
5. Найти условия устойчивости позиционирования.

Задача 2.3

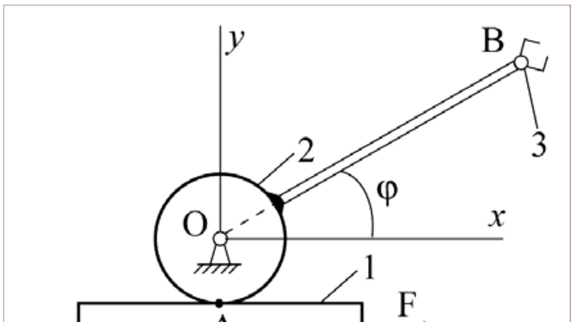


Одностепенной манипулятор работает в вертикальной плоскости. Дано: m_1, m_2, m_3, r, R, OA=l. Момент двигателя: $M_z = M_{0z} + U_z - \mu\omega_{1z}$, управление: $U_z = -N(\varphi - \varphi_0)$, $\mu, N -$ константы. За обобщенную координату принять угол φ.

Требуется:

1. Составить уравнение движения в форме Лагранжа.
2. Определить M_{0z} из условия равновесия при $\varphi = \varphi_0$ и $U_z = 0$.
3. Линеаризовать уравнение в окрестности положения равновесия.
4. Записать характеристический полином полученного линейного уравнения.
5. Найти условия устойчивости позиционирования.

Задача 2.4

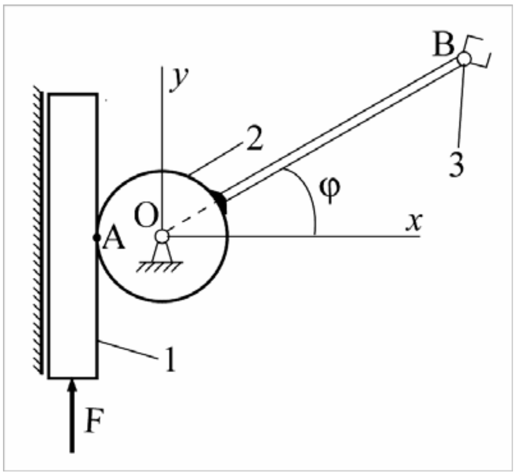


Одностепенной манипулятор работает в вертикальной плоскости. Известно, что масса рейки m_1, масса колеса m_2, его радиус r, масса схвата m_3, OB=3r, $F_x = F_{0x} + U_x - \mu V_{Ax}$, управление $U_x = -N(\varphi - \varphi_0)$, $\mu, N -$ константы. За обобщенную координату принять угол φ.

Требуется:

1. Составить уравнения движения в форме Лагранжа.
2. Определить F_{0x} из условия равновесия при $\varphi = \varphi_0$ и $U_x = 0$.
3. Линеаризовать уравнение в окрестности положения равновесия.
4. Записать характеристический полином полученного линейного уравнения.
5. Найти условия устойчивости позиционирования.

Задача 2.5

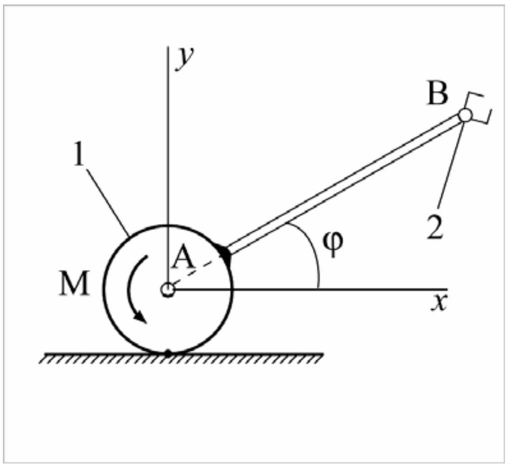


Одностепенной манипулятор работает в вертикальной плоскости. Известно, что масса рейки m_1, масса колеса m_2, его радиус *r*, масса схвата B равна m_3, OB=3*r,* сила: $F_y = F_{0y} + U_y - \mu V_{Ay}$, управление $U_y = N(\varphi - \varphi_0)$, $\mu, N -$константы. За обобщенную координату принять угол φ.

Требуется:

1. Составить уравнения движения в форме Лагранжа.
2. Определить F_{0y} из условия равновесия при $\varphi = \varphi_0$ и $U_y = 0$.
3. Линеаризовать уравнение в окрестности положения равновесия.
4. Записать характеристический полином линейного уравнения.
5. Найти условия устойчивости позиционирования.

Задача **2.6**

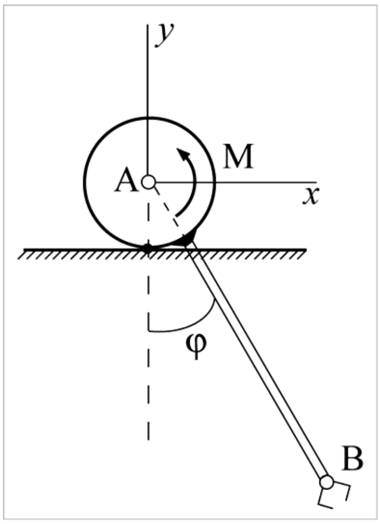


Одностепенной манипулятор работает в вертикальной плоскости. Известно, что масса колеса m_1, его радиус *r*; масса схвата m_2, AB=3*r,* $M_z = M_{0z} + U_z - \mu\dot{\varphi}$, управление: $U_z = -N(\varphi - \varphi_0)$, $\mu, N -$константы. За обобщенную координату принять угол φ.

Требуется:

1. Составить уравнения движения в форме Лагранжа.
2. Определить M_{0z} из условия равновесия при $\varphi = \varphi_0$ и $U_z = 0$.
3. Линеаризовать уравнение в окрестности положения равновесия.
4. Записать характеристический полином линейного уравнения.
5. Найти условия устойчивости позиционирования.

Задача 2.7

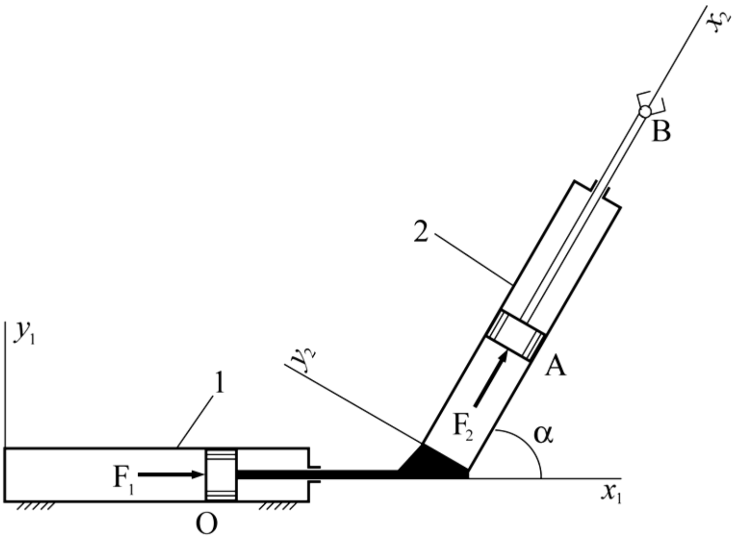


Одностепенной манипулятор работает в вертикальной плоскости. Известно, что масса колеса m_1, его радиус r; масса схвата В равна m_2, АВ=3r, $M_z = M_{0z} + U_z - \mu\dot{\varphi}$, управление: $U_z = -N\left(\varphi - \varphi_0\right)$, $\mu, N -$ константы. За обобщенную координату принять угол φ.

Требуется:

1. Составить уравнения движения в форме Лагранжа.
2. Определить M_{0z} из условия равновесия при $\varphi = \varphi_0$ и $U_z = 0$.
3. Линеаризовать уравнение в окрестности положения равновесия.
4. Записать характеристический полином линейного уравнения.
5. Найти условия устойчивости позиционирования.

Задача 2.8

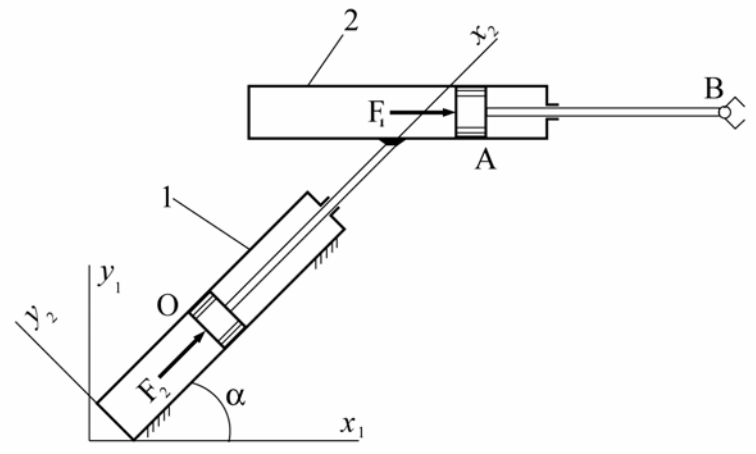


Манипулятор работает в горизонтальной плоскости. Известно, что масса поршня А, штока АВ и схвата В равна m_2; масса поршня О, штока и цилиндра 2 равна m_1; $F_{1x_1} = -b\,x_1$, $F_{2x_2} = U_{x_2} - a\,\dot{x}_2$, управление $U_{x2} = -N\,x_2$, a, b, N - константы. Угол между осями цилиндров α. За обобщенные принять координаты x_1, x_2 поршней О и А соответственно, отсчитываемые от положения равновесия.

Требуется:

1. Составить уравнения движения в форме Лагранжа.
2. Записать характеристический полином полученной линейной системы.
3. Найти условия устойчивости позиционирования (по Гурвицу).

Задача 2.9

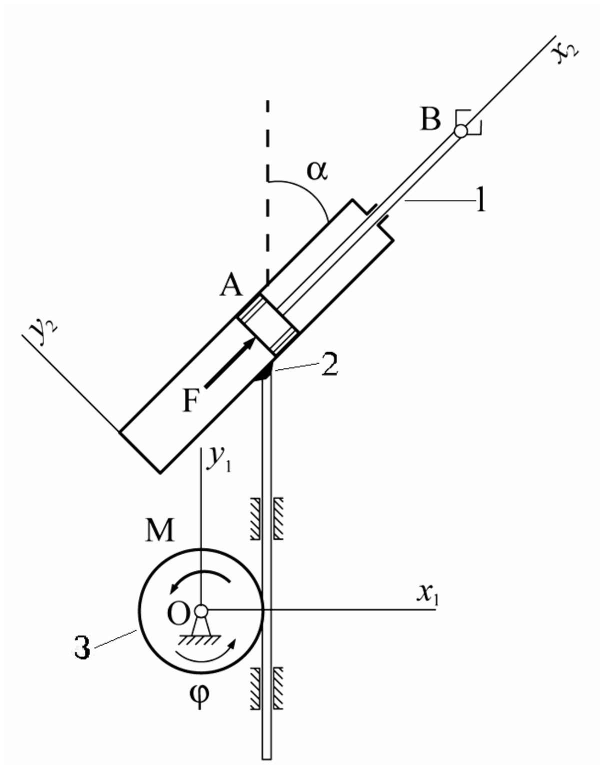


Манипулятор работает в горизонтальной плоскости. Известно, что масса поршня А вместе со штоком АВ и схватом В равна m_1, масса поршня О, штока и цилиндра 2 - m_2; $F_{1x_1} = -bx_1$, $F_{2x_2} = U_{x_2} - a\dot{x}_2$, управление $U_{x_2} = -Nx_2$, a, b, N константы. Угол между осями цилиндров α. За обобщенные принять координаты x_1, x_2 поршней А и О соответственно, отсчитываемые от положения равновесия.

Требуется:

1. Составить уравнения движения в форме Лагранжа.
2. Записать характеристический полином полученной линейной системы.
3. Найти условия устойчивости позиционирования (по Гурвицу).

Задача 2.10



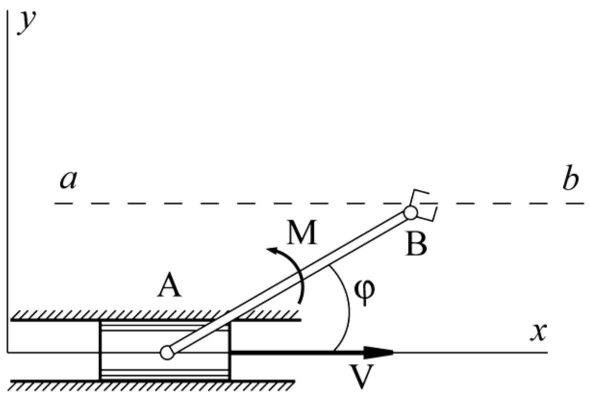
Манипулятор работает в горизонтальной плоскости. Известно, что масса поршня А, штока АВ и схвата В равна m_1, масса цилиндра и рейки - m_2; масса колеса - m_3, его радиус r; $F_{x_2} = -bx_2$, $M_z = U_z - a\dot{\varphi}$; управление $U_z = -N\varphi$, a, b, N - константы, α – угол между осями x_1, x_2. За обобщенные координаты принять координату x_2 поршня А и угол φ поворота колеса, которые отсчитываются от положения равновесия.

Требуется:

1. Составить уравнения движения в форме Лагранжа.
2. Записать характеристический полином полученной линейной системы.
3. Найти условия устойчивости позиционирования (по Гурвицу).

3. Исследование условий устойчивости движения схвата манипулятора по заданной траектории

Задача 3.1

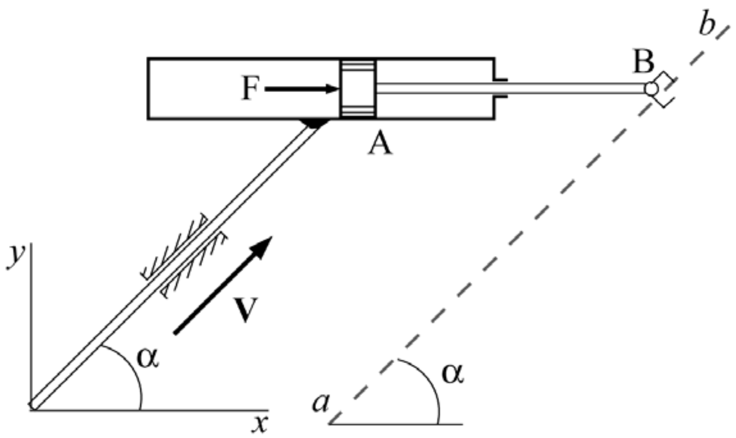


Манипулятор работает в вертикальной плоскости. Известно, что поршень А движется по оси *x* с постоянной скоростью V, а схват B движется вблизи линии *ab.* Масса схвата равна *m*, AB=*l*, момент: $M_z = M_{0z} + U_z - \mu\dot{\varphi}$, управление $U_z = -N(\varphi - \varphi_0)$, $\mu, N -$ константы. За обобщенную координату принять угол φ.

Требуется:

1. Составить уравнение движения в форме Лагранжа.
2. Определить M_{0z} из условия равновесия $U_z = 0$ и при значении угла φ_0, отвечающему движению схвата по линии *ab.*
3. Линеаризовать уравнение в окрестности траектории равномерного движения схвата B.
4. Записать характеристический полином полученного линейного уравнения.
5. Найти условия устойчивости движения схвата по линии *ab.*

Задача 3.2

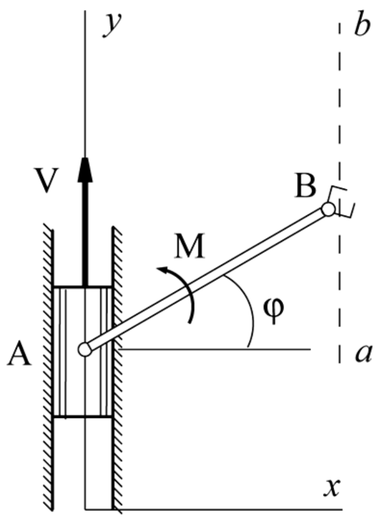


Манипулятор работает в горизонтальной плоскости. Известно, что цилиндр движется с постоянной скоростью V, направленной под углом α к оси *x*. Схват B движется вблизи линии *ab*. Масса поршня А вместе со штоком AB и схватом B равна m, $F = U_x - a\dot{x}$, управление $U_x = -Nx$, a, N - константы. За обобщенную координату принять координату x, отсчитываемую от положения схвата B на траектории *ab*.

Требуется:

1. Составить уравнения движения в форме Лагранжа.
2. Записать характеристический полином полученного линейного уравнения.
3. Найти условие устойчивости движения схвата по линии *ab.*

Задача 3.3

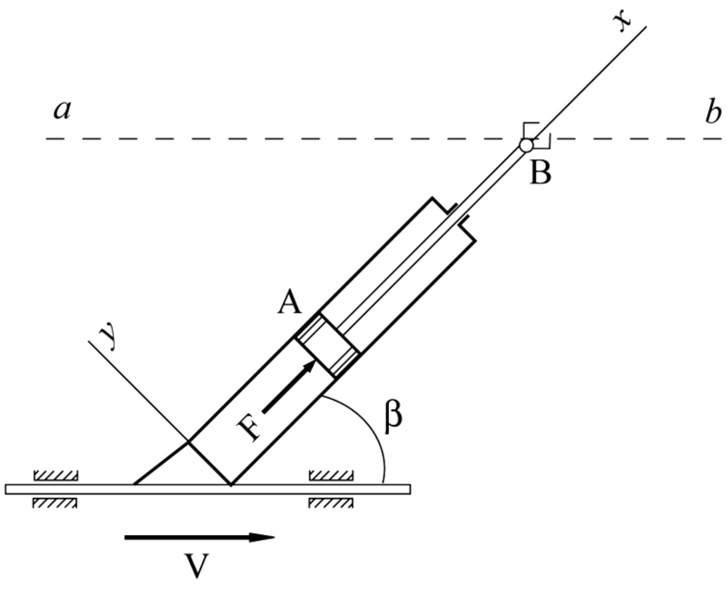


Манипулятор работает в вертикальной плоскости. Известно, что поршень A движется по оси y с постоянной скоростью V, а схват B движется вблизи линии *ab*. Масса схвата m, AB = l, момент: $M_z = M_{0z} + U_z - \mu\dot{\varphi}$, управление $U_z = -N(\varphi - \varphi_0)$, $\mu, N -$ константы. За обобщенную координату принять угол φ.

Требуется:

1. Составить уравнение движения в форме Лагранжа.
2. Определить M_{0z} из условия равновесия $U_z = 0$ и при значении угла φ_0, отвечающему движению схвата по линии *ab*.
3. Линеаризовать уравнение в окрестности траектории равномерного движения схвата B.
4. Записать характеристический полином полученного линейного уравнения.
5. Найти условия устойчивости движения схвата по линии *ab*.

Задача 3.4

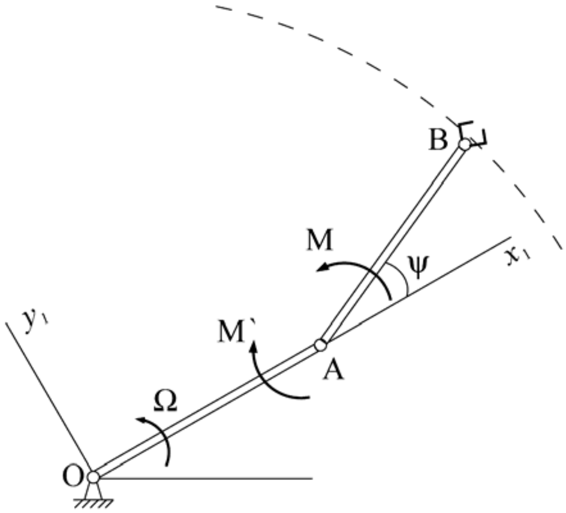


Манипулятор работает в горизонтальной плоскости. Известно, что цилиндр движется с постоянной скоростью V, направленной под углом β к оси x . Схват B движется вблизи линии *ab*. Масса поршня A, штока AB и схвата B равна m, сила $F = U_x - a\dot{x}$, управление $U_x = -Nx$, $a, N -$ константы. За обобщенную координату принять координату x, отсчитываемую от положения схвата B на траектории *ab*.

Требуется:

1. Составить уравнения движения в форме Лагранжа.
2. Записать характеристический полином полученного линейного уравнения.
3. Найти условие устойчивости движения схвата по линии *ab*.

Задача 3.5



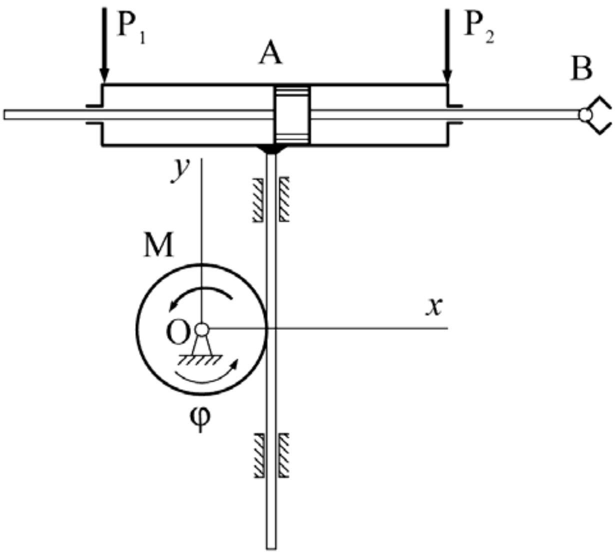
Манипулятор типа «Скара» работает в горизонтальной плоскости. Известно, что звено OA вращается с постоянной угловой скоростью Ω, а схват B движется вблизи круговой траектории, радиус которой отвечает длине звеньев OA и AB и углу ψ_0. Масса схвата B равна m, OA=AB=l, момент: $M_z = M_{0z} + U_z - \mu\dot{\psi}$, $U_z = -N(\psi - \psi_0)$ - управление, $\mu, N -$константы. За обобщенную координату принять угол ψ.

Требуется:

1. Составить уравнения движения в форме Лагранжа.
2. Определить M_{0z} из условия равновесия при $U_z = 0$, $\psi = \psi_0$.
3. Линеаризовать уравнение в окрестности траектории равномерного движения схвата B.
4. Записать характеристический полином полученного линейного уравнения.
5. Найти условия устойчивости движения схвата по траектории.

4. Динамика манипулятора с пневмоцилиндром

Задача 4.1

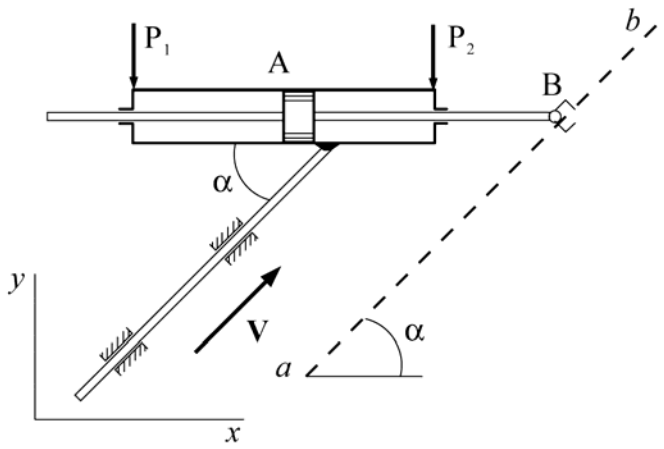


Манипулятор на базе пневмоцилиндра работает в вертикальной плоскости. Известно, что масса поршня А вместе со штоком АВ и схватом В равна m_1; масса цилиндра и зубчатой рейки m_2; масса колеса m_3, его радиус *r*. Давление воздуха в левой и правой полостях цилиндра P_1 и P_2 соответственно; площадь сечения цилиндра *S*; момент: $M_z = M_{0z} - a_1\dot{\varphi} - b_1\varphi$, $a_1, b_1 -$константы. За обобщенные координаты принять угол φ и координату *x* поршня, отсчитываемую от положения равновесия.

Требуется:

1. Составить уравнения движения в форме Лагранжа.
2. Определить M_{0z}, из условия равновесия при $\varphi = \varphi_0$.
3. Записать характеристический полином полученной линейной системы.

Задача 4.2

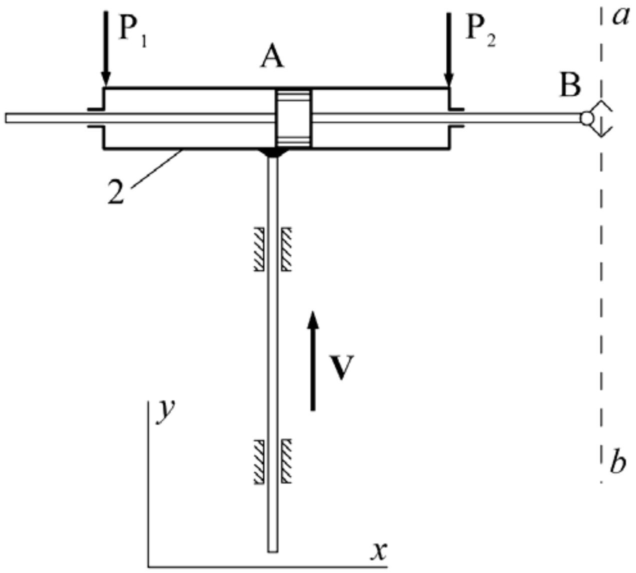


Манипулятор на базе пневмоцилиндра работает в горизонтальной плоскости. Известно, что цилиндр движется с постоянной скоростью V, направленной под углом α к оси *x*. Схват В движется вблизи линии *ab*. Масса поршня А вместе со штоком АВ и схватом В равна m; давление воздуха в левой и правой полостях цилиндра P_1 и P_2 соответственно; площадь сечения цилиндра *S*. За обобщенную координату принять координату x, отсчитываемую от положения схвата на траектории *ab*.

Требуется:

1. Составить уравнения движения в форме Лагранжа.
2. Записать характеристический полином полученного линейного уравнения.
3. Найти условие устойчивости движения схвата по линии *ab*.

Задача 4.3



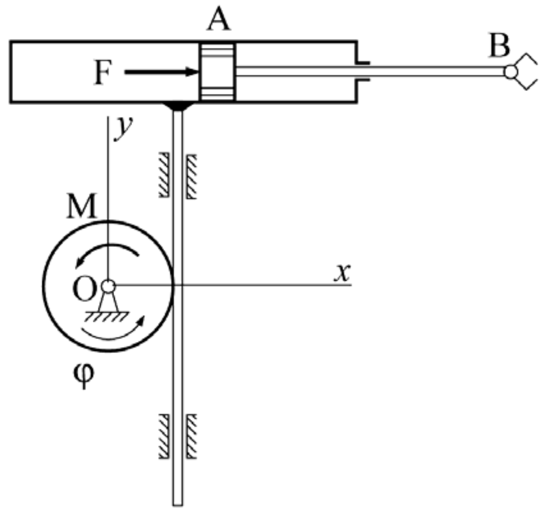
Манипулятор на базе пневмоцилиндра работает в горизонтальной плоскости. Известно, что цилиндр движется с постоянной скоростью V, направленной по оси *y*. Схват B движется вблизи линии *ab*. Масса поршня A, штока AB и схвата B равна *m*. Давление воздуха в левой и правой полостях цилиндра P_1 и P_2 соответственно; площадь сечения цилиндра *S*. За обобщенную координату принять координату x, отсчитываемую от положения схвата на траектории *ab*.

Требуется:

1. Составить уравнения движения в форме Лагранжа.
2. Записать характеристический полином полученного линейного уравнения.
3. Найти условие устойчивости движения схвата по линии *ab*.

5. Исследование управляемости колебаний около положения равновесия

Задача 5.1

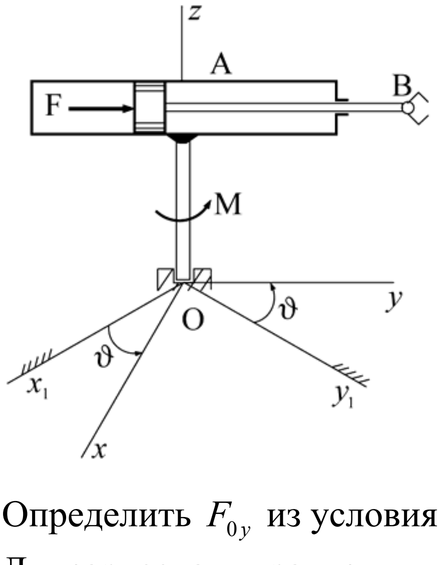


Манипулятор работает в горизонтальной плоскости. Известно, что масса поршня А, штока АВ и схвата В равна m_1; масса цилиндра и рейки m_2; масса колеса m_3, его радиус r; сила: $F_x = -a_1 V_{Ax} - b_1 x$; момент: $M_z = U_z - a_2 \omega_z - b_2 \varphi$, U_z – управление, a_1, a_2, b_1, b_2 – константы. За обобщенные координаты принять координату x поршня А и угол φ, которые отсчитываются от положения равновесия.

Требуется:

1. Составить уравнения движения в форме Лагранжа.
2. Записать полученные уравнения в форме Коши.
3. Проверить управляемость системы со скалярным управлением (по Калману).

Задача 5.2

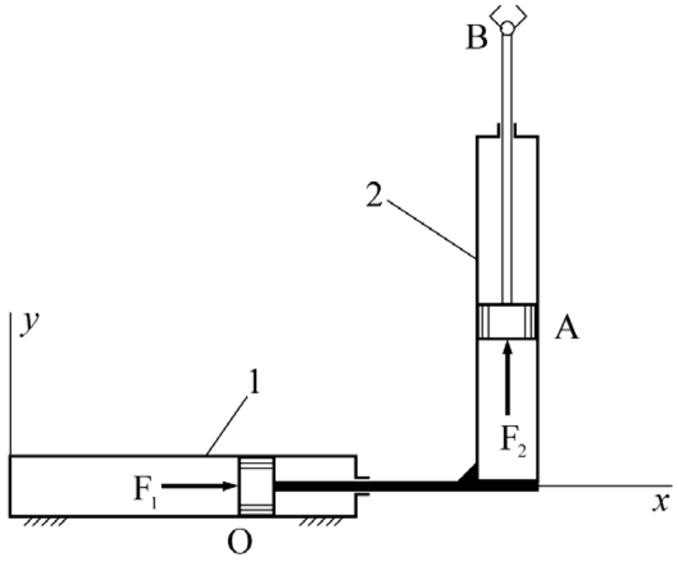


Манипулятор работает в горизонтальной плоскости. Известно, что масса схвата В равна m_1, момент инерции цилиндра I_{0z}, сила: $F_y = F_{0y} - a_1 \dot{y} - b_1 y$, момент: $M_z = U_z - a_2 \dot{\vartheta}$, U_z – управление, a_1, a_2, b_1 – константы. За обобщенные координаты принять координату y захвата В и угол ϑ, отсчитываемый от положения равновесия. Массой поршня и штока пренебречь.

Требуется:

1. Составить уравнения движения в форме Лагранжа.
2. Определить F_{0y} из условия равновесия при $\vartheta = 0$, $U_z = 0$, $y = y_0$.
3. Линеаризовать уравнения в окрестности положения равновесия.
4. Записать линейные уравнения в форме Коши.
5. Проверить управляемость системы со скалярным управлением (по Калману).

Задача 5.3

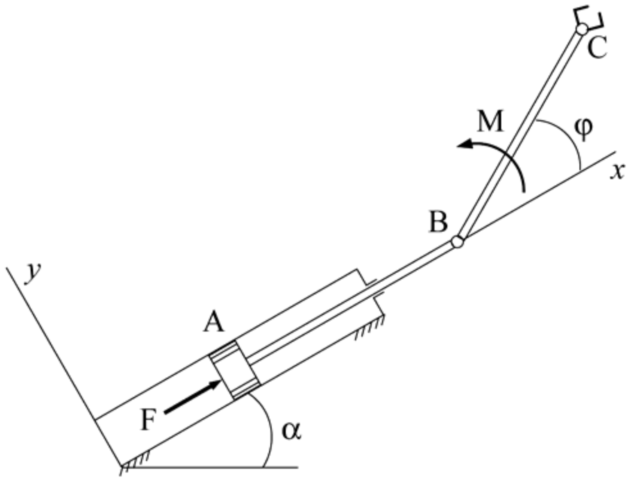


Манипулятор работает в горизонтальной плоскости. Известно, что масса поршня A, штока AB и схвата B равна m_1; масса поршня O, штока и цилиндра 2 равна m_2; $F_{1x} = U_x - a_1 V_{ox} - b_1 x$, $U_x -$ управление, $F_{2y} = -a_2 V_{Ay} - b_2 y$, $a_1, a_2, b_1, b_2 -$ константы. За обобщенные принять координаты *x, y* поршней O и A соответственно, отсчитываемые от положения равновесия.

Требуется:

1. Составить уравнения движения в форме Лагранжа.
2. Записать полученные уравнения в форме Коши.
3. Проверить управляемость системы со скалярным управлением (по Калману).

6. Пример решения



Манипулятор работает в вертикальной плоскости. Известно, что масса поршня A вместе со штоком m_1, масса схвата C m_2, длина невесомого звена BC= *l*. $\alpha -$ угол наклона цилиндра к горизонту, $F_x = F_{0x} - a\dot{x} - bx$, $M_z = M_{0z} + U_z$, *a*, *b* константы, $U_z = -N(\varphi - \varphi_0)$ управление. За обобщенные координаты принять угол φ и координату *x* поршня, отсчитываемую от положения равновесия.

Требуется:

1. Составить уравнения движения в форме Лагранжа.
2. Определить M_{0z}, F_{0x} из условия равновесия при $x_0 = 0$, $\varphi = \varphi_0$ и $U_z = 0$.
3. Линеаризовать уравнения в окрестности положения равновесия.
4. Записать характеристический полином полученной линейной системы.
5. Исследовать устойчивость позиционирования (по Гурвицу).

1. Вывод уравнений движения

Рассматриваемый механизм представляет собой механическую систему с двумя степенями свободы, движение которой ограничено идеальными голономными связями. Уравнения движения манипулятора могут быть записаны в виде уравнений Лагранжа II рода

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_x, \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_\varphi \tag{1}$$

В (1) $T(x,\dot{x},\varphi,\dot{\varphi})$ кинетическая энергия системы, равная сумме кинетической энергии T_1 поршня А со штоком, совершающего поступательное движение,

$$T_1 = \tfrac{1}{2} m_1 V_A^2, \tag{2}$$

и кинетической энергии T_2 точечного схвата С

$$T_2 = \tfrac{1}{2} m_2 V_C^2. \tag{3}$$

Определим скорости точек А и С. В проекции на оси Oxy

$$V_{Ax} = \dot{x}, \quad V_{Ay} = 0, \quad V_A^2 = \dot{x}^2, \tag{4}$$
$$V_{Cx} = \dot{x} - l\sin\varphi\,\dot{\varphi}, \quad V_{Cy} = l\cos\varphi\,\dot{\varphi},$$
$$V_C^2 = \dot{x}^2 + l^2\dot{\varphi}^2 - 2\dot{x}l\sin\varphi\,\dot{\varphi}.$$

Тогда общая кинетическая энергия системы

$$T = \tfrac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{x}^2 + \tfrac{1}{2} m_2 l^2\dot{\varphi}^2 - m_2 l\dot{x}\sin\varphi\dot{\varphi} \tag{5}$$

Обобщенные силы Q_x и Q_φ, входящие в уравнения Лагранжа (1), найдем, вычисляя суммарную мощность активных сил и моментов $N_a^в$ на возможном движении:

$$N_a^в = (\vec{F},\vec{V}_A^в) + (\vec{M},\vec{\omega}_{BC}^в) + (m_1\vec{g},\vec{V}_A^в) + (m_2\vec{g},\vec{V}_C^в). \tag{6}$$

Проектируя вектора в формулах (5) на оси Oxy, получим

$$N_A^в = F_x V_{Ax}^в + m_1 g_x V_{Ax}^в + m_2 g_x V_{Cx}^в + m_2 g_y V_{Cy}^в + M_z\omega_{BCz}^в \tag{7}$$

Принимая во внимание, что

$$\omega_{BCz}^в = \dot{\varphi}^в, \quad V_{Ax}^в = \dot{x}^в, \quad V_{Cx}^в = \dot{x}^в - l\sin\varphi\dot{\varphi}^в,$$
$$V_{Cy}^в = l\cos\varphi\,\dot{\varphi}^в, \quad g_x = -g\sin\alpha, \quad g_y = -g\cos\alpha, \tag{8}$$

получим разложение для мощности $N_a^в$ по обобщенным возможным скоростям

$$N_A^{в} = (F_x - m_1 g \sin\alpha - m_2 g \sin\alpha)\dot{x}^{в} + (M_z - m_2 g l \cos(\varphi+\alpha))\dot{\varphi}^{в}. \qquad (9)$$

Следовательно, обобщенные силы будут равны соответственно:

$$Q_x = F_x - m_1 g \sin\alpha - m_2 g \sin\alpha\,,$$
$$Q_\varphi = M_z - m_2 g l \cos(\varphi+\alpha). \qquad (10)$$

Так, как по условию задачи

$$F_x = F_{0x} - a\dot{x} - bx\,,\; M_z = M_{0z} + U_z\,,$$

получим обобщенные силы в виде:

$$Q_x = F_{0x} - a\dot{x} - bx - (m_1+m_2) g \sin\alpha\,,$$
$$Q_\varphi = M_{0z} - N(\varphi-\varphi_0) - m_2 g l \cos(\varphi+\alpha). \qquad (11)$$

Вычислим необходимые для построения уравнений Лагранжа производные:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0\,, \qquad \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = (m_1+m_2)\dot{x} - m_2 l \sin\varphi\,\dot{\varphi}\,,$$
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = (m_1+m_2)\ddot{x} - m_2 l \sin\varphi\,\ddot{\varphi} - m_2 l \cos\varphi\,\dot{\varphi}^2\,, \qquad (12)$$
$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = -m_2 l \dot{x} \cos\varphi\,\dot{\varphi}\,, \qquad \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = m_2 l^2 \dot{\varphi} - m_2 l \dot{x} \sin\varphi\,,$$
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = m_2 l^2 \ddot{\varphi} - m_2 l \ddot{x} \sin\varphi - m_2 l \dot{x}\dot{\varphi} \cos\varphi.$$

В соответствии с полученными в (11) и (12) результатами запишем уравнения Лагранжа

$$(m_1+m_2)\ddot{x} - m_2 l \sin\varphi\,\ddot{\varphi} - m_2 l \cos\varphi\,\dot{\varphi}^2 = F_{0x} - a\dot{x} - bx - (m_1+m_2) g \sin\alpha\,,$$
$$m_2 l^2 \ddot{\varphi} - m_2 l \ddot{x} \sin\varphi = M_{0z} - N(\varphi-\varphi_0) - m_2 g l \cos(\varphi+\alpha). \qquad (13)$$

2. Определение силовых воздействий в положении равновесия

Уравнения равновесия системы в положении, соответствующем заданным значениям обобщенных координат:

$$x_0 = 0\,,\;\; \dot{x} = 0\,,\;\; \varphi = \varphi_0\,,\;\; \dot{\varphi} = 0\,, \qquad (14)$$

получаются из уравнений (13), если положить значения первых и вторых производных обобщенных координат равными нулю. Уравнения равновесия можно также получить из условия равенства нулю обобщенных сил (11) в положении равновесия (14):

$$F_{0x} - (m_1 + m_2) g \sin\alpha = 0\,,$$
$$M_{0z} - m_2 g\, l \cos(\varphi_0 + \alpha) = 0\,. \qquad (15)$$

Таким образом, формулы (15) определяют значения силы F_{0x} и момента M_{0z}, при которых манипулятор будет позиционирован в заданном положении.

3. Линеаризация уравнений движения около положения равновесия

При линеаризации уравнений движения предполагается, что отклонения от положения равновесия являются малыми величинами. Обозначим отклонения от положения равновесия:

$$y_1 = x - x_0\,, \quad y_2 = \varphi - \varphi_0\,. \qquad (16)$$

Тогда справедливы следующие соотношения:

$$\varphi = \varphi_0 + y_2\,, \quad x = x_0 + y_1\,, \quad \dot{y}_1 = \dot{x}\,, \quad \ddot{y}_1 = \ddot{x}\,, \quad \dot{y}_2 = \dot{\varphi}\,, \quad \ddot{y}_2 = \ddot{\varphi}\,. \qquad (17)$$

Для тригонометрических функций, входящих в уравнения (13) имеем:

$$\sin\varphi = \sin(\varphi_0 + y_2) = \sin\varphi_0 \cos y_2 + \cos\varphi_0 \sin y_2\,,$$
$$\cos\varphi = \cos(\varphi_0 + y_2) = \cos\varphi_0 \cos y_2 - \sin\varphi_0 \sin y_2\,, \qquad (18)$$
$$\cos(\varphi + \alpha) = \cos(\varphi_0 + \alpha + y_2) = \cos(\varphi_0 + \alpha)\cos y_2 - \sin(\varphi_0 + \alpha)\sin y_2\,.$$

Принимая во внимание только линейные по малым отклонениям y_2 слагаемые, из (18) получим:

$$\sin\varphi = \sin\varphi_0 + y_2 \cos\varphi_0\,, \quad \cos\varphi = \cos\varphi_0 - y_2 \sin\varphi_0\,,$$
$$\cos(\varphi + \alpha) = \cos(\varphi_0 + \alpha) - y_2 \sin(\varphi_0 + \alpha)\,. \qquad (19)$$

Подставим в (13) результаты (17), (19) и отбросим нелинейные слагаемые $\ddot{y}_1 y_2, \dot{y}_2^2, \dot{y}_2^2 y_2, \ddot{y}_2 y_2$. Тогда придем к уравнениям, содержащим только линейные по отклонениям y_1, y_2 слагаемые

$$(m_1 + m_2)\,\ddot{y}_1 - m_2 l\, \ddot{y}_2 \sin\varphi_0 = F_{0x} - a\dot{y}_1 - b y_1 - (m_1 + m_2) g \sin\alpha\,, \qquad (20)$$
$$m_2 l^2 \ddot{y}_2 - m_2 l\, \ddot{y}_1 \sin\varphi_0 = M_{0z} - N y_2 - m_2\, g\, l \cos(\varphi_0 + \alpha) + m_2 g\, l\, y_2 \sin\varphi_0\,.$$

С учетом формул (15), определяющих величины F_{0x} и M_{0z}, окончательно получим линейные уравнения малых колебаний около положения равновесия:

$$(m_1+m_2)\,\ddot{y}_1 - m_2\,l\,\ddot{y}_2\sin\varphi_0 + a\,\dot{y}_1 + b\,y_1 = 0,$$
$$m_2\,l^2\ddot{y}_2 - m_2\,l\,\ddot{y}_1\sin\varphi_0 + (N - m_2 g\,l\sin\varphi_0)\,y_2 = 0. \qquad (21)$$

4. Вывод характеристического уравнения системы уравнений малых колебаний

Линейная система дифференциальных уравнений (21) может быть записана в матричной форме с использованием матрицы $\mathbf{f}(D)$ оператора дифференцирования по времени $D=\dfrac{d}{dt}$:

$$\mathbf{f}(D)\mathbf{y} = 0, \qquad (22)$$

где $\mathbf{y} = (y_1, y_2)^T$ - вектор переменных состояния, а $\mathbf{f}(D)$ - матрица (2×2):

$$\mathbf{f}(D) = \begin{pmatrix} (m_1+m_2)D^2 + aD + b & -m_2 l\sin\varphi_0 D^2 \\ -m_2 l\sin\varphi_0 D^2 & m_2 l^2 D^2 + N - m_2 g\,l\sin\varphi_0 \end{pmatrix}. \qquad (23)$$

По определению, характеристическое уравнение системы дифференциальных уравнений (22) есть: $\det\mathbf{f}(\lambda)=0$, значит, в нашем случае:

$$\det\mathbf{f}(\lambda) = \det\begin{pmatrix} (m_1+m_2)\lambda^2 + a\lambda + b & -m_2 l\sin\varphi_0\lambda^2 \\ -m_2 l\sin\varphi_0\lambda^2 & m_2 l^2\lambda^2 + N - m_2 g\,l\sin\varphi_0 \end{pmatrix} = 0.$$

Вычисляя определитель, получим:

$$\begin{aligned} &m_2(m_1+m_2\cos^2\varphi_0)\,l^2\lambda^4 + m_2 l^2 a\,\lambda^3 + ((m_1+m_2)(N-m_2 g l\sin\varphi_0)+m_2 l^2 b)\lambda^2 \\ &+(N - m_2 g l\sin\varphi_0)\,a\lambda + (N - m_2 g l\sin\varphi_0)\,b = 0 \end{aligned}. \qquad (24)$$

Многочлен четвертого порядка (24) и есть характеристическое уравнение системы (21).

5. Исследование устойчивости позиционирования

Известно, что поведение решения системы линейных дифференциальных уравнений определяется значениями корней ее характеристического уравнения. Если все корни имеют отрицательные действительные части, то решение асимптотически убывает. Такая система уравнений называется асимптотически устойчивой.

Согласно критерию Гурвица, корни многочлена с положительным коэффициентом при старшей степени лежат в левой полуплоскости тогда и только тогда, когда все главные диагональные миноры матрицы Гурвица положительны.

Возьмем уравнение четвертого порядка

$$a_0\lambda^4 + a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda + a_4 = 0, \quad a_0 > 0.$$

Матрица Гурвица для него имеет вид:

$$\mathbf{H}=\begin{pmatrix} a_1 & a_3 & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 \end{pmatrix},$$

а условия Гурвица отрицательности действительных частей корней будут:

$$\Delta_1 = a_1 > 0\,,\ \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} > 0\,,\ \ \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} > 0\,,\ \ \Delta_4 = \Delta_3 a_4 > 0\,. \qquad (26)$$

Матрица Гурвица для характеристического уравнения (24) имеет вид:

$$\begin{pmatrix} m_2 l^2 a & (N - m_2 g l \sin\varphi_0) a & 0 & 0 \\ m_2 l^2 (m_1 + m_2 \cos^2\varphi_0) & (m_1 + m_2)(N - m_2 g l \sin\varphi_0) + m_2 l^2 b & (N - m_2 g l \sin\varphi_0) b & 0 \\ 0 & m_2 l^2 a & (N - m_2 g l \sin\varphi_0) a & 0 \\ 0 & m_2 l^2 (m_1 + m_2 \cos^2\varphi_0) & (m_1 + m_2)(N - m_2 g l \sin\varphi_0) + m_2 l^2 b & (N - m_2 g l \sin\varphi_0) b \end{pmatrix}$$

Главные диагональные миноры равны:

$$\Delta_1 = m_2 l^2 a\,,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} m_2 l^2 a & (N - m_2 g l \sin\varphi_0) a \\ m_2 l^2 (m_1 + m_2 \cos^2\varphi_0) & (m_1 + m_2)(N - m_2 g l \sin\varphi_0) + m_2 l^2 b \end{vmatrix}, \qquad (27)$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} m_2 l^2 a & (N - m_2 g l \sin\varphi_0) a & 0 \\ m_2 l^2 (m_1 + m_2 \cos^2\varphi_0) & (m_1 + m_2)(N - m_2 g l \sin\varphi_0) + m_2 l^2 b & (N - m_2 g l \sin\varphi_0) b \\ 0 & m_2 l^2 a & (N - m_2 g l \sin\varphi_0) a \end{vmatrix},$$

$$\Delta_4 = \Delta_3 (N - m_2 g l \sin\varphi_0) b\,.$$

В результате вычислений получим:

$$\begin{aligned} &\Delta_1 = m_2 l^2 a \\ &\Delta_2 = m_2^2 a l^2 ((N - m_2 g l \sin\varphi_0) \sin^2\varphi_0 + b l^2), \\ &\Delta_3 = (N - m_2 g l \sin\varphi_0)^2 m_2^2 l^2 a^2 \sin^2\varphi_0, \\ &\Delta_4 = (N - m_2 g l \sin\varphi_0)^3 m_2^2 l^2 a^2 b \sin^2\varphi_0\,. \end{aligned} \qquad (28)$$

Как следует из (26) и (28), условия Гурвица выполняются, если

$$a > 0,\ \ (N - m_2 g l \sin\varphi_0) \sin^2\varphi_0 + b l^2 > 0\,,$$

$$(N - m_2 g l \sin\varphi_0) b > 0 , \quad \sin\varphi_0 \neq 0 . \tag{29}$$

Таким образом, константы a, b, N, задающие силы и моменты, действующие на манипулятор, должны удовлетворять требованиям:

$$a > 0 , \quad b > 0 , \quad N > m_2 g l \sin\varphi_0 , \quad \sin\varphi_0 \neq 0 . \tag{30}$$

В случае, когда $\sin\varphi_0 = 0$, условия Гурвица не могут быть выполнены.