СТАБИЛЬНОСТЬ ДЕФОРМАЦИИ И ДВИЖЕНИЯ

Кирсанов М.Н.

Основные задачи

- Прочность
- Устойчивость
- Колебания
- Выносливость
- *Стабильность процесса*

Два направления

- Стабильность деформаций
- Стабильность движения

Математическое обоснование

- Обобщенная задача Коши
- Особые точки обобщенной задачи
- Нестабильность как существование особых точек обобщенной задачи Коши для уравнения возмущенного процесса

Обобщенная задача Коши

- Классическая задача Коши (A.L.Cauchy 1821)

$$f(y^{(n)}(x), y^{(n-1)}(x), \ldots y(x), x) = 0$$

$$y^{(n-1)}(x_0) = C_{n-1}, y^{(n-2)}(x_0) = C_{n-2},$$

$$\ldots.. y(x_0) = C_0.$$

- Обобщенная задача Коши (М.Н.К., 1997)

$$f(y^{(n)}(x), y^{(n-1)}(x), \ldots y(x), x) = 0$$

$$y^{(i_1)}(x_0) = C_{n-1}, y^{(i_2)}(x_0) = C_{n-2},$$

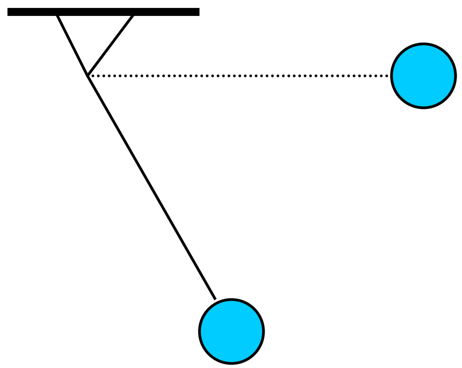
$$\ldots.. y^{(i_n)}(x_0) = C_0.$$

Особые точки

- Определение

Значение x_* является *особой точкой начальной задачи* дифференциального уравнения $f(y^{(n)}(x), y^{(n-1)}(x), \ldots y(x), x) = 0$, если для любого как угодно большого числа *M>0* и любых как угодно малых значениях $C_k, k = 0 \ldots n-1$ существует $\delta > 0$ такое, что $| y^{(j)}(x_0) | > M, \quad j \notin [i_1, i_2 .., i_n]$ как только $| x_* - x_0 | < \delta$.

Пример. Маятник



$$J\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mgl\sin\varphi \qquad (1)$$

$$\begin{aligned} &l\Delta\ddot{\varphi} + g\cos\varphi\Delta\varphi = 0, \\ &l\Delta\dddot{\varphi} + g\cos\varphi\Delta\dot{\varphi} - g\dot{\varphi}\sin\varphi\Delta\varphi = 0 \end{aligned} \qquad (2)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & l \\ g\cos\varphi & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Delta\dot{\varphi} \\ \Delta\ddot{\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -g\cos\varphi\Delta\varphi \\ g\sin\varphi\dot{\varphi}\Delta\varphi - l\Delta\dddot{\varphi} \end{bmatrix} \qquad (3)$$

$$g\cos\varphi = 0$$

Сферическое движение

$$A\dot{p}+(C-B)qr=M_1-a_{11}p-a_{12}q-a_{13}r,$$
$$B\dot{q}+(A-C)pr=M_2-a_{21}p-a_{22}q-a_{23}r,$$
$$C\dot{r}+(B-A)qp=M_3-a_{31}p-a_{32}q-a_{33}r$$

p,q,r - проекции угловой скорости на подвижные оси координат

$$A\Delta\dot{p}+(C-B)(q\Delta r+r\Delta q)=-a_{11}\Delta p-a_{12}\Delta q-a_{13}\Delta r,$$
$$B\Delta\dot{q}+(A-C)(p\Delta r+r\Delta p)=-a_{21}\Delta p-a_{22}\Delta q-a_{23}\Delta r,$$
$$C\Delta\dot{r}+(B-A)(q\Delta p+p\Delta q)=-a_{31}\Delta p-a_{32}\Delta q-a_{33}\Delta r$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}+(C-B)r & a_{13}+(C-B)q \\ a_{21}+(A-C)r & a_{22} & a_{23}+(A-C)p \\ a_{31}+(B-A)q & a_{32}+(B-A)p & a_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta p\\ \Delta q\\ \Delta r\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}A\Delta\dot{p}\\ B\Delta\dot{q}\\ C\Delta\dot{r}\end{bmatrix}$$

Частный случай $A = B$ $a_{13} = a_{31} = a_{23} = a_{32} = 0$

Условие нестабильности 1-го порядка

$$r^2(A-C)^2 + a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$$

Условие нестабильности 2-го порядка

$$A\Delta\ddot{p} + (C-B)(\dot{q}\Delta r + q\Delta\dot{r} + \dot{r}\Delta q + r\Delta\dot{q}) = -a_{11}\Delta\dot{p} - a_{12}\Delta\dot{q} - a_{13}\Delta\dot{r},$$

$$B\Delta\ddot{q} + (A-C)(\dot{p}\Delta r + p\Delta\dot{r} + \dot{r}\Delta p + r\Delta\dot{p}) = -a_{21}\Delta\dot{p} - a_{22}\Delta\dot{q} - a_{23}\Delta\dot{r},$$

$$C\Delta\ddot{r} + (B-A)(\dot{q}\Delta p + q\Delta\dot{p} + \dot{p}\Delta q + p\Delta\dot{q}) = -a_{31}\Delta\dot{p} - a_{32}\Delta\dot{q} - a_{33}\Delta\dot{r}$$

$$\begin{bmatrix} & [M_1] & & A & 0 & 0 \\ & & & 0 & B & 0 \\ & & & 0 & 0 & C \\ 0 & (C-B)\dot{r} & (C-B)\dot{q} & & & \\ (A-C)\dot{r} & 0 & (A-C)\dot{p} & & [M_1] & \\ (B-A)\dot{q} & (B-A)\dot{p} & 0 & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta p \\ \Delta q \\ \Delta r \\ \Delta\dot{p} \\ \Delta\dot{q} \\ \Delta\dot{r} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ A\Delta\ddot{p} \\ B\Delta\ddot{q} \\ C\Delta\ddot{r} \end{bmatrix}$$

$$a_{33}^2(4C^3\dot{r}(C\dot{r}-r(a_{11}+a_{22}))+a_*^4+C^2r^2(C^2r^2-2a_*^2))=0$$

$$a_*=\sqrt{a_{12}^2-a_{11}a_{22}}$$