Предлагается аналитический метод расчета дискретных регулярных механических систем. В качестве примеров приводятся решения задачи оптимизации пространственных статически определимых ферм с учетом ползучести материала и задачи о колебании узла плоской фермы.

Численные методы, широко используемые при расчете стержневых систем, имеют хорошо известные недостатки. Во-первых, с увеличением числа стержней непропорционально быстро растет объем и время вычислений, во-вторых, падает точность. Аналитические методы развиты для модельных систем с ограниченным (хотя и большим) числом стержней и для реальных конструкций не подходят. Современные методы компьютерной алгебры [1] позволяют строить аналитические решения достаточно сложных задач. Однако, использование всей мощи компьютера для непосредственного решения сложной задачи чаще всего не дает результата, так как на аналитические преобразования требуется значительно большее время, чем на численный расчет той же системы. В предлагаемом методе формула простого решения, содержащее некоторое определенное натуральное число n, характеризующее уровень сложности системы (например, число стержней),обобщаются на произвольное n. Метод особенно эффективен там, где ищется какая-либо интегральная характеристика конструкции — вес, критическая нагрузка, собственная частота и т.п. Рассмотрим решения конкретных задач этим методом.

1. Оптимизация веса пространственной фермы.

Вычислим объем материала равнопрочной консольной фермы с поперечным сечением прямоугольной формы, загруженной на торцевом сечении вертикальными силами P (рис.1). Объем материала фермы составим отдельно из объема сжатых стержней V^- и объема растянутых V^+.

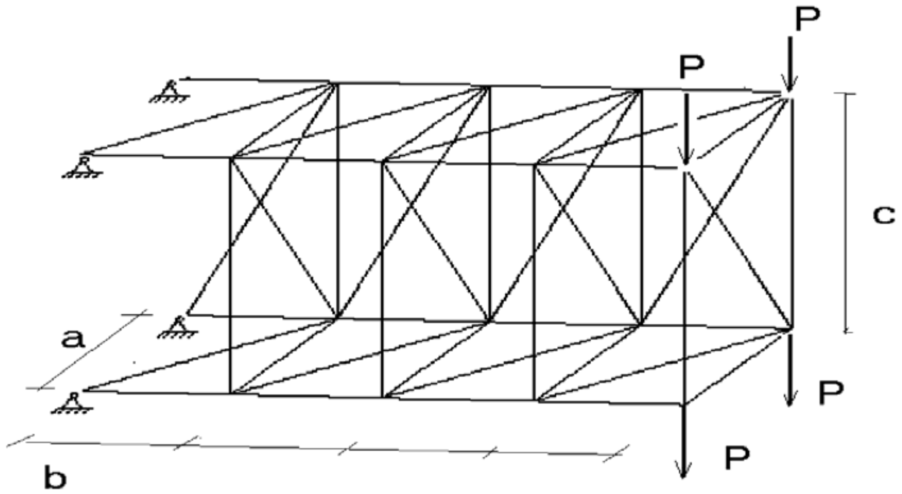

Рис.1

Все величины, относящиеся к сжатым стержням, будем отмечать знаком - , растянутые – знаком +. Предположим, что в сжатых стержнях напряжения достигли критической для потери устойчивости величины. При ползучести она зависит от времени t [2]

$$|N_i/F_i^-|\,(1+\nu t)/E=(\pi r/\,l_i)^2,$$

где N_i - усилие в i -м стержне l_i его длина, ν - вязкость материала, E - модуль упругости, r - радиус инерции одинаковый для всех сжатых стержней.

Объем i-го стержня $V_i = F_i^- l_i$. Отсюда выразим площадь сечения

$$F_i^- = |N_i|\,(\,l_i/a)^2/q,$$

где $q=(\pi r/a)^2 E/(1+\nu t)$. Просуммируем объемы всех сжатых стержней

$$V^- = \Sigma V^-_i = \Sigma F_i^- l_i \;= \Sigma |N_i|\,(l^3_i/(qa^2)),$$

Аналогичную формулу для растянутых стержней получим из условия достижения предельного напряжения на разрыв. Для ползущих материалов эта величина зависит от времени. Например, для дерева

$$N_i = RF_i^+(1-(1/)lg(t+1)) = F_i^+ D,$$

где $D=R(1-(1/\gamma)lg(t+1)))$, R, γ - константы материала.

Суммарный объем растянутых стержней найдем, выражая их площади из (1),

$$V^+ = {}_i V_i^+ = {}_i F_i^+ l_i = {}_i N_i l_i / D.$$

Для нахождения зависимости суммарного объема $V^+ + V^-$ от параметров конструкции необходимо знать выражения для усилий. Найдем их методами статики. Система уравнений равновесия узлов фермы может быть решена в **Maple** в натуральных числах, что существенно для индуктивного метода. Для $n=1,\ a=b=1$ после вычисления 12 усилий имеем

$$V = \frac{P}{c}\left(\frac{10+6(1+c^2)^2}{Q} + \frac{12+4c^2}{D}\right)$$

для n=2 $$V = \frac{P}{c}\left(\frac{40+16(1+c^2)^2}{Q} + \frac{44+12c^2}{D}\right)$$

где

$$Q = Q(t) = qa^2 = (\pi r)^2 E/(1+\nu t).$$

Для обобщения формулы на произвольное число n оказывается достаточным повторить расчет для 2 и 3, 4, 5 и 6 панелей, после чего образуется набор данных для получения рекуррентной зависимости. В данной задаче замечено две цепочки натуральных чисел (коэффициенты в решении)

k_1= 6, 10, 14, 18, 22 , 26 , k_2=10, 30, 58, 94, 138, 190.

В первом случае зависимость очевидна $k_1(n)=4n+2.$ Для нахождения рекуррентной зависимости во втором случае используем оператор **rgf findrecur** из пакета **genfunc** системы **Maple**. В результате имеем уравнение

$$k_2(n) =3k_2(n-1)-3k_2(n-2)+k_2(n-3).$$

Решение уравнения получим оператором **rsolve**

$$k_2(n)=4n(n+2)+2.$$

В итоге

$$V=\frac{2P}{c}\left(\frac{2n(n+2)-1+(2n+1)(1+c^2)^2}{Q}+2n\frac{n+2+nc^2}{D}\right).$$

Найти минимум функции $V(c,n)$ и определить условие оптимальности геометрии фермы в зависимости от параметров материала и гарантийного времени *t* не составляет труда [2].

Аналогично, для фермы с треугольным поперечным сечением (рис.2)

Имеем следующую зависимость объема от числа панелей

$$b\,V=\frac{K_1\,h^4+K_2\,h^2\,(1+b^2)+K_3\,b^4+2\,K_3\,b^2+K_4}{Q\,n^3}$$

$$+\frac{K_1\,h^2+K_5\,(1+b^2)}{n\,\tau},$$

где

$$K_1=\frac{(n+2)\,(n+1)}{2}$$

$$K_2=3\,n^2\,(n+1)$$

$$K_3 = \frac{3\,n^4\,(n+1)}{2}$$

$$K_4 = \frac{n^4\,(3\,n+19)}{2}$$

$$K_5 = \frac{n^2\,(3\,n+1)}{2}$$

.

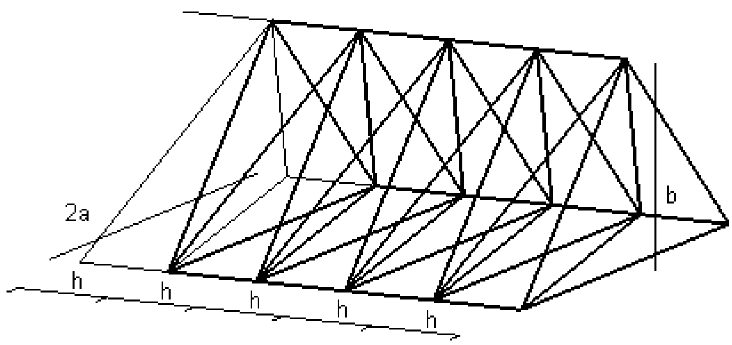

Рис. 2

На рис.3 изображены зависимости объема (веса) фермы для различных гарантийных сроков и размера b. Кривые 1,2 рассчитаны для 1000 часов, кривые 3,4 - 200 часов. При этом для кривых 1, 3 принято b=2м, для 2,4 - b=1м. Наблюдается характерный минимум, значение которого можно вычислить аналитически или численно.

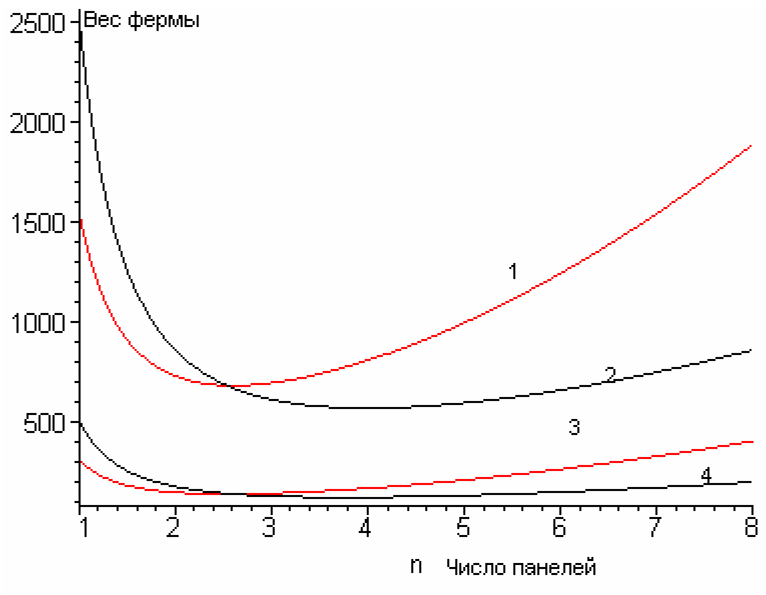

Рис. 3

На рис. 4 показана зависимость веса фермы от размера b и числа панелей n.

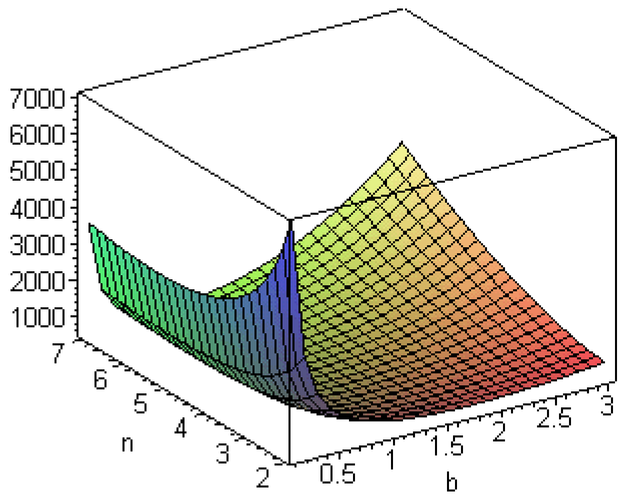

Рис. 4

2. Частоты колебаний узла плоской фермы.

Рассмотрим балочную ферму с четным числом панелей *2k,*

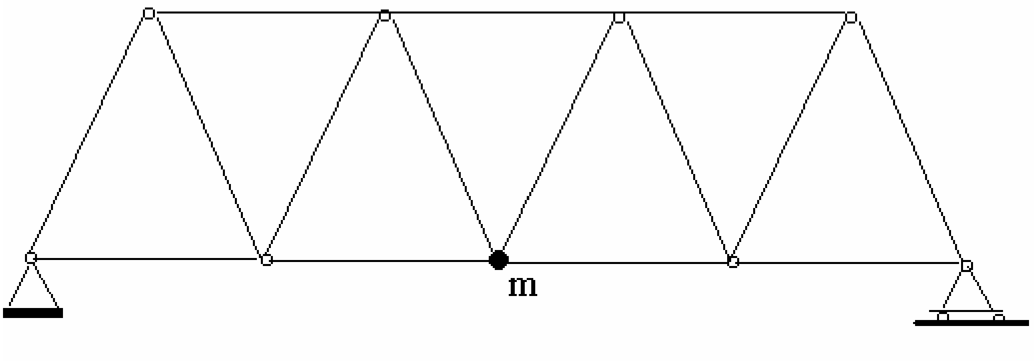

Рис.5.

составленную из *8k-1* стержней одинаковой длины *l* и точечной массой *m*, помещенной в центральном узле нижнего пояса (рис. 2, *k=2*).Уравнение малых линейных колебаний имеет вид

$$A\,W = -\delta\,X,$$

где X - вектор смещений, $W=d^2X/dt^2$ - вектор ускорений, A - матрица инерции, δ - матрица коэффициентов влияния [3] (гибкости), элементы которой определим по формуле Мора

$$\delta_{ij}=\sum_{s=1}^{8k-1} N_{si}N_{sj}l_s/(EF_s).$$

N_1^s *и* N_2^s - усилия в *s* - м стержне фермы от действия горизонтальной и вертикальной единичной силы в узле, содержащем массу.

Последовательно вычисляя усилия в ферме с различным числом панелей, так же как и в предыдущем примере, имеем следующее обобщение

$EF\delta_{11}=k$,

$EF\delta_{12}=k^2\sqrt{3}/6$,

$EF\delta_{21}= k^2\sqrt{3}/6$,

$EF\delta_{22}=k(25+k^2)/18$,

Решая характеристическое уравнение, найдем собственные частоты для фермы с произвольным числом панелей

$$\omega_{1,2}^{\ 2}=\frac{43+8k^2+\sqrt{49+220k^2+64k^4}}{k(13k^2+50)}\frac{EF}{ml} .$$

Проанализируем полученные решения. В первом случае (объем пространственной фермы) задача имела один характерный натуральный параметр — число панелей, по которому проводились шаги индукции (однопараметрическая задача индукции). Во втором случае (задача о колебаниях) помимо k можно было бы ввести второй независимый натуральный параметр задачи k^* - число масс. Полагая k^*=k двухпараметрическую задачу можно свести к однопараметрической. Однако здесь возникает проблема бесконечного увеличения порядка результирующего выражения — уравнения частот, коэффициенты в котором методами индукции необходимо искать. Такие задачи назовем задачами нестационарной индукции. В первом приведенном примере подобная проблема возникает в ферме с непараллельными поясами. Одним из способов сведения нестационарных задач к стационарным является способ выделения и фиксации дополнительного натурального параметра задачи. Например, рассматривается одна масса в узле, проводится индукция по числу стержней (панелей) и определяется формула для частоты, затем, аналогично, решается задача для двух масс и т.д. Так может быть решена двух- и более параметрическая задача.

ЛИТЕРАТУРА

1. Матросов А.В. Maple 6 . Решение задач высшей математики и механики.— СПб.: 2001. - 528 с.

2. Кирсанов М.Н. Оптимальная высота балочной фермы с учетом линейной ползучести материала//Известия Вузов. Строительство. 2000. N5, с.141-144.

3. Яблонский А.А., Норейко С.С. Курс теории колебаний — М.: 1975.- 248 с.