Отсюда находим $x_A - x_O = 12$ см, $y_A - y_O = 5$ см. Определим длину стержня 1:

$$OA = \sqrt{(x_A - x_O)^2 + (y_A - y_O)^2} = 13 \text{ см}.$$

Из найденного решения и (2.36) следует:

$$x_B - x_C = x_A - x_C = x_A - x_O - OC = 12 - 16 = -4 \text{ см},$$
$$y_B - y_C = y_A - AB - y_C = y_A - AB - y_O = 5 - 2 = 3 \text{ см}.$$

Отсюда, длина стержня 3:

$$BC = \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2} = \sqrt{16 + 9} = 5 \text{ см}.$$

Заметим, что методом МЦС и с помощью плана скоростей эту задачу решить нельзя.

Задача 78. Механизм состоит из трех шарнирно скрепленных стержней и двух шарнирных опор O и C. В указанном положении механизма (рис. 198) стержень OA вертикальный, BC — горизонтальный. Известна постоянная угловая скорость $\omega_{OA_z} = 3$ с$^{-1}$ стержня OA и длины стержней $OA = BC = 2$ см, $AB = 5$ см. Размеры на рисунке даны в сантиметрах. Найти ускорения шарниров A, B и угловые ускорения звеньев AB и BC.

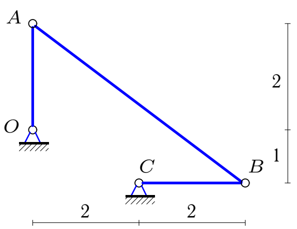

Рис. 198

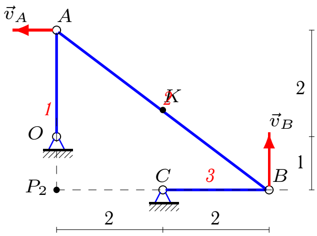

Рис. 199

Решение

1. Решение задачи начнем с определения угловых скоростей звеньев. Пронумеруем стержни (рис. 199). Вычислим скорость точки A, принадлежащей кривошипу OA. Известна угловая скорость вращения $\omega_1 = \omega_{OA_z} = 3$ с$^{-1}$. Имеем $v_A = \omega_1 OA = 3 \cdot 2 = 6$ см/с. Вектор скорости направим перпендикулярно стержню по направлению движения (против часовой стрелки). Для того, чтобы найти положение МЦС звена AB, необходимо указать направление вектора шарнира B. Этот вектор направлен перпендикулярно радиусу вращения BC, причем вверх, исходя из теоремы о проекциях векторов скоростей неизменяемого отрезка [1]. МЦС звена AB лежит на пересечении перпендикуляров к скоростям точек отрезка AB. Обозначим его P_2.

Скорости точек звена AB удовлетворяют соотношениям $v_A = \omega_2\, AP_2$, $v_B = \omega_2\, BP_2$.

Из первого соотношения при известной скорости $v_A = 6$ см/с с учетом $AP_2 = 3$ см найдем $\omega_2 = v_A/AP_2 = 6/3 = 2$ с$^{-1}$. Вычислим скорость точки B: $v_B = \omega_2\, BP_2 = 2 \cdot 4 = 8$ см/с. Угловая скорость стержня BC равна $\omega_3 = v_B/BC = 8/2 = 4$ с$^{-1}$.

2. Для вычисления угловых ускорений стержней воспользуемся формулой Ривальса

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}^{\,\text{вр}}_{BA} + \vec{a}^{\,\text{ц}}_{BA}. \tag{2.37}$$

Вектор ускорения по величине и направлению определяется легко. Кривошип OA, на конце которого находится точка A, вращается равномерно с известной угловой скоростью ω_1. Пользуясь формулой $a_A = \omega_1^2 OA = 9 \cdot 2 = 18$ см/с^2, получаем величину ускорения. Вектор этого ускорения (центростремительного) направлен к центру O (рис. 200). Если бы в условии было дано угловое ускорение, то у этой точки была бы еще вращательная компонента ускорения, направленная перпендикулярно OA и равная $\varepsilon_1 OA$.

Согласно формуле (2.37) изобразим вектора $\vec{a}^{\,\text{вр}}_{BA}$, $\vec{a}^{\,\text{ц}}_{BA}$. Центростремительное ускорение $\vec{a}^{\,\text{ц}}_{BA}$ направлено по стержню AB к условному полюсу A, вращательное $\vec{a}^{\,\text{вр}}_{BA}$ перпендикулярно AB, а так как знак углового ускорения стержня неизвестен, то направляем это ускорение в положительном направлении ускоренного вращения стержня вокруг полюса A, т.е. вверх.

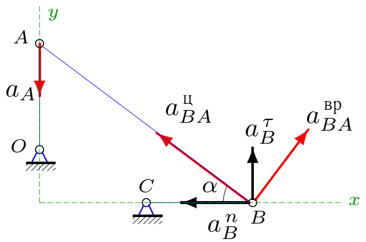

Рис. 200

Величина вектора центростремительного ускорения известна $a^{\text{ц}}_{BA} = \omega_2^2 AB = 4 \cdot 5 = 20$ см/с^2. Направление его, также как направление вращательного ускорения $\vec{a}^{\,\text{вр}}_{BA}$, также известно. Следовательно, в векторной формуле (2.37) содержатся три неизвестные величины: модуль ускорения $\vec{a}^{\,\text{вр}}_{BA}$ и две компоненты искомого ускорения шарнира

[1] **Теорема**. Проекции скоростей концов отрезка твердого тела на направление самого отрезка совпадают [7].

B. Три неизвестные из двух скалярных уравнений, соответствующих векторному (2.37) найти не получится. Для решения задачи требуется еще какая-то информация. Такой информацией является то, что точка B движется по окружности. Поэтому про ускорение точки B известно, что одна его компонента a_B^n направлена к шарниру C. Более того, учитывая, что угловые скорости звеньев в первой части задачи найдены, известна и величина $a_B^n = \omega_2^2 BC = 16 \cdot 2 = 32$ см/с^2.

Таким образом, добавляем к уравнению (2.37) разложение вектора ускорения $\vec{a}_B$:

$$\vec{a}_B^n + \vec{a}_B^\tau = \vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^{\text{вр}} + \vec{a}_{BA}^{\text{ц}}. \tag{2.38}$$

Теперь в этом векторном уравнении только две неизвестные: угловые ускорения стержней AB и BC, через которые выражаются вращательное ускорение $a_{BA}^{\text{вр}} = AB\varepsilon_{2z}$ и касательное $a_B^\tau = BC\varepsilon_{3z}$. Записываем это уравнение в проекциях на оси координат:

$$\begin{aligned} -a_B^n &= a_{BA}^{\text{вр}} \cos\alpha - a_{BA}^{\text{ц}} \sin\alpha, \\ a_B^\tau &= -a_A + a_{BA}^{\text{вр}} \sin\alpha + a_{BA}^{\text{ц}} \cos\alpha, \end{aligned} \tag{2.39}$$

где $\sin\alpha = 3/5 = 0,6$, $\cos\alpha = 4/5 = 0,8$. Решение системы дает следующие ускорения механизма в заданном положении:

$$a_B^\tau = -82/3 = -27,33 \text{ см/с}^2, \quad a_{BA}^{\text{вр}} = -80/3 = -26,67 \text{ см/с}^2.$$

Знак минус в ответах показывает, что действительные направления искомых ускорений противоположны принятым на рисунке 200.

Отсюда находим и угловые ускорения:

$$\varepsilon_{2z} = -16/3 = -5,33 \text{ с}^{-2}, \quad \varepsilon_{3z} = -41/3 = -13,67 \text{ с}^{-2}. \tag{2.40}$$

Ускорение шарнира B

$$a_B = \sqrt{(a_B^n)^2 + (a_B^\tau)^2} = 42.08 \text{ см/с}^2.$$

3. Графический метод решения. Фактически задача сводится к графическому решению векторного уравнения (2.38).

Для начала надо, как это сделано в п. 2., вычислить значения ускорений $a_A = \omega_1^2 OA = 18$ см/с^2, $a_B^n = \omega_2^2 BC = 32$ см/с^2, $a_{BA}^{\text{ц}} = \omega_2^2 AB = 20$ см/с^2. Это длины векторов, известных и по направлению. Затем от произвольной точки плоскости (на рисунке 201 это точка P_1) надо отложить вниз вертикальный вектор $\vec{a}_A$. От его конца (точка P_3) следует отложить вектор $\vec{a}_{BA}^{\text{ц}}$ по направлению стержня AB, т. е. под углом α к горизонту. От этой точки в продолжении суммы правой части уравнения (2.38) надо бы отложить и вектор $\vec{a}_{BA}^{\text{вр}}$, перпендикулярно вектору $\vec{a}_{BA}^{\text{ц}}$, но длина этого вектора неизвестна, поэтому проводим через точку P_4 первую прямую, перпендикулярную отрезку AB.

Далее рассматриваем левую часть векторного равенства (2.38). Начинаем опять от точки P_1 и откладываем горизонтальный вектор $\vec{a}_B^n$ известной длины. Получаем точку P_2. Вектор $\vec{a}_B^\tau$ неизвестной длины должен быть перпендикулярен стержню BC. Проводим эту прямую.

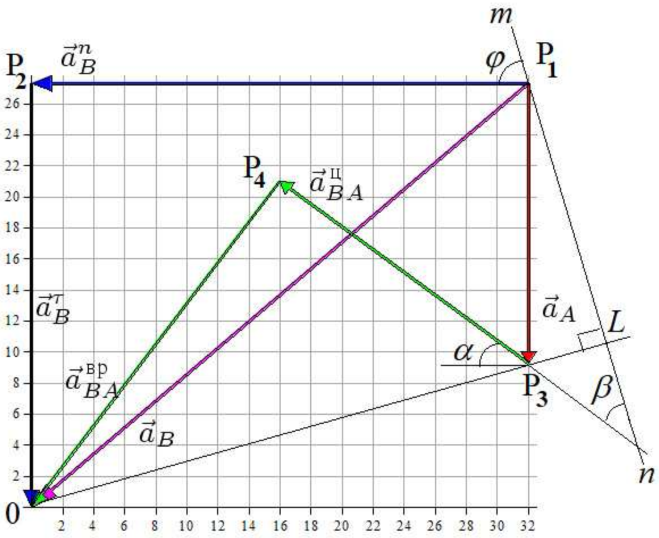

Рис. 201 [1]

На пересечении этой прямой и первой прямой в точке O в силу равенства правой и левой части уравнения (2.38) находится конец искомого вектора $\vec{a}_B$. Векторные «маршруты» $P_1 - P_3 - P_4 - 0$ и $P_1 -$ $- P_2 - 0$ совпадают в начальной и конечных точках. Теперь остается измерить длины построенных векторов $\vec{a}_B^\tau$ и $\vec{a}_{BA}^{вр}$, поделить эти величины на длины стержней BC и AB соответственно, и получить угловые ускорения звеньев ε_3 и ε_2.

Часто в таких задачах бывает еще один дополнительный вопрос — найти ускорение середины стержня AB. Зная угловое ускорение звена AB, эту задачу можно решить с помощью уравнения Ривальса. Если

[1] Этот рисунок выполнен в основном средствами Maple. Использованы пакеты plots и plottools. Для изображения стрелок применялся оператор arrow из пакета plottools. Так, например, задавалось изображение вектора $\vec{a}_B^n$: arrow(P1,P2, k,color=blue), где P1:=[32,27.3], P2:=[0, 27.3] — координаты точек, k:=0.15, 1,0.04 — параметры стрелки. Изображение на экран выводит оператор display(Z,Abn,Abt,Abav,Abac,Aa,Ab,tickmarks=[tm,tm],gridlines=true).

K — середина отрезка AB (рис. 199), то

$$\vec{a}_K = \vec{a}_A + \vec{a}_{KA}^{\,\text{вр}} + \vec{a}_{KA}^{\,\text{ц}},$$

где $a_{KA}^{\text{вр}} = \varepsilon_2 AK$, $a_{KA}^{\text{ц}} = \omega_2^3 AK$.

Есть и другой более простой способ нахождения скорости точки K, особенно удобный, когда точка K находится точно в середине стержня. Используем теорему о концах векторов ускорений точек неизменяемого отрезка, согласно которой эти точки лежат на одной прямой и делят ее на части, пропорциональные расстояниям между точками отрезка. В данном случае это деление пополам. Находим:

$$a_{Kx} = (a_{Ax} + a_{Bx})/2, \;\; a_{Ky} = (a_{Ay} + a_{By})/2.$$

Для ускорений, в отличие от скоростей, нет теоремы о равенстве их проекций на ось, соединяющую точки. Но есть теорема о равенстве проекций ускорений на ось, повернутую относительно отрезка на угол $\beta = \arctan(\omega^2/\varepsilon_z)$ [25].

В данной задаче угол отрицательный, т. к. стержень имеет ускоренное вращение по часовой стрелке. Согласно (2.40)

$$\varepsilon_{2z} < 0, \quad \beta = -\arctan(4/(16/3)) = -\arctan(3/4) = -0,643.$$

На рисунке 201 эта ось лежит на прямой m-n, наклоненной к оси x на угол $\varphi = \alpha + \beta$. Концы векторов ускорений $\vec{a}_A$ и $\vec{a}_B$ проецируются на прямую m-n в точку L.

Угол β не следует путать с углом $\gamma = \arctan(\varepsilon_z/\omega^2)$, необходимым для определения мгновенного центра ускорений. Эта точка, как правило, обозначается Q. Отличие поиска мгновенного центра ускорений от поиска мгновенного центра скоростей небольшое. Если для определения мгновенного центра скоростей от известных направлений векторов скоростей восстанавливаются перпендикуляры, на пересечении которых лежит эта точка, то здесь к векторам ускорений проводятся прямые под углом γ против часовой стрелки при $\varepsilon_z > 0$ и по часовой стрелке при $\varepsilon_z < 0$ (рис. 202).

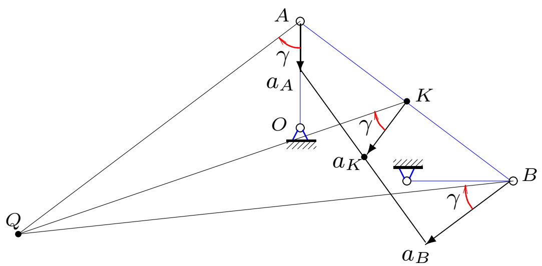

Рис. 202

Если все вектора изображать в масштабе, то концы векторов ускорений точек A, B, K будут лежать на одной прямой, а конец вектора $\vec{a}_K$ попадет на середину отрезка между концами векторов $\vec{a}_A$ и $\vec{a}_B$. Величины ускорений определяются также равенствами:

$$a_A = QA\sqrt{\varepsilon_2^2+\omega_2^4},$$
$$a_K = QK\sqrt{\varepsilon_2^2+\omega_2^4},$$
$$a_B = QB\sqrt{\varepsilon_2^2+\omega_2^4}.$$

4. Решение поставленной задачи с помощью уравнения трех угловых скоростей (2.20), с. 94 значительно проще.

Вводим систему координат, нумеруем шарниры, оставляя нумерацию стержней прежней. Номера шарниров приписываем нижним индексом к соответствующим буквам (рис. 203).

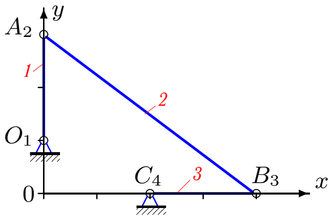

Рис. 203

Определяем координаты шарниров (в сантиметрах): $x_1 = 0$, $y_1 = 1$, $x_2 = 0$, $y_2 = 3$, $x_3 = 4$, $y_3 = 0$, $x_4 = 2$, $y_4 = 0$.

В уравнение трех угловых ускорений входят квадраты угловых скоростей, поэтому знак проекции этих величин не важен. Решение для скоростей с помощью уравнений трех угловых скоростей (2.19) с. 93 выполним для проверки:

$$\begin{aligned}&\omega_{1z}(x_2-x_1)+\omega_{2z}(x_3-x_2)+\omega_{3z}(x_4-x_3)=0,\\&\omega_{1z}(y_2-y_1)+\omega_{2z}(y_3-y_2)+\omega_{3z}(y_4-y_3)=0,\end{aligned}\tag{2.41}$$

где x_i, y_i и x_{i+1}, y_{i+1}, $i = 1,...,3$, — координаты шарниров на концах звена, имеющего угловую скорость ω_{iz}. Шарниры 1 и 4 — опорные.

С учетом известных координат и известной угловой скорости $\omega_{1z} = 3$ с$^{-1}$ имеем отсюда:

$$\begin{aligned}&4\,\omega_{2z}-2\,\omega_{3z}=0,\\&6-3\,\omega_{2z}=0.\end{aligned}\tag{2.42}$$

Решаем систему и находим $\omega_{2z} = 2$ с$^{-1}$, $\omega_{3z} = 4$ с$^{-1}$.

Записываем уравнения трех угловых ускорений (2.20) с. 94:

$$\varepsilon_{1z}(x_2-x_1)+\varepsilon_{2z}(x_3-x_2)+\varepsilon_{3z}(x_4-x_3)-$$
$$-\omega_{1z}^2(y_2-y_1)-\omega_{2z}^2(y_3-y_2)-\omega_{3z}^2(y_4-y_3)=0,$$
$$\varepsilon_{1z}(y_2-y_1)+\varepsilon_{2z}(y_3-y_2)+\varepsilon_{3z}(y_4-y_3)+$$
$$+\omega_{1z}^2(x_2-x_1)+\omega_{2z}^2(x_3-x_2)+\omega_{3z}^2(x_4-x_3)=0.$$

С учетом известных координат и $\varepsilon_{1z}=0$ эти уравнения примут вид:

$$4\,\varepsilon_{2z}-2\,\varepsilon_{3z}-2\,\omega_{1z}^2+3\,\omega_{2z}^2=0,$$
$$-3\,\varepsilon_{2z}+4\,\omega_{2z}^2-2\,\omega_{3z}^2=0.$$

Подставляя сюда угловые скорости $\omega_{1z}=3$ с$^{-1}$, $\omega_{2z}=2$ с$^{-1}$, $\omega_{3z}=-4$ с$^{-1}$, получаем систему:

$$\begin{aligned}4\,\varepsilon_{2z}-2\,\varepsilon_{3z}-6=0,\\ -3\,\varepsilon_{2z}-16=0.\end{aligned}\qquad(2.43)$$

Решение системы дает угловые ускорения звеньев механизма в заданном положении $\varepsilon_{2z}=-5,33$ с$^{-2}$, $\varepsilon_{3z}=-13,67$ с$^{-2}$. Ответ совпадает с (2.40). Заметим, что определители систем (2.42) и (2.43) одинаковые. Это упрощает решение задачи и является дополнительной проверкой правильности записи уравнений.

Задача 79. Механизм из четырех звеньев закреплен на двух неподвижных шарнирах. В указанном положении механизма заданы угловые скорости $\omega_{OAz}=1$ с$^{-1}$, $\omega_{CDz}=4$ с$^{-1}$ и ускорения $\varepsilon_{OAz}=20$ с$^{-2}$, $\varepsilon_{CDz}=30$ с$^{-2}$ звеньев. Длины звеньев: $OA=3$ см, $AB=2\sqrt{2}$ см, $BC=1$ см, $CD=2$ см. Звенья OA, BC вертикальные, звено CD — горизонтальное (рис. 204). Найти угловые ускорения звеньев AB и BC.

Решение

Вводим систему координат с началом в точке A (рис. 205). Нумеруем шарниры, номера обозначаем индексом у соответствующих букв. Последовательно нумеруем стержни: OA — 1, AB — 2, BC — 3, CD — 4. Вычисляем координаты шарниров (в см): $x_1=x_2=0$, $x_3=x_4=2$, $x_5=4$, $y_1=3$, $y_2=0$, $y_3=2$, $y_4=y_5=3$.

Составляем уравнения угловых скоростей, проходя последовательно по всем звеньям от шарнира 1 до шарнира 5,

$$\sum_{k=1}^{4}\omega_{kz}(x_k-x_{k+1})=0,$$
$$\sum_{k=1}^{4}\omega_{kz}(y_k-y_{k+1})=0.$$