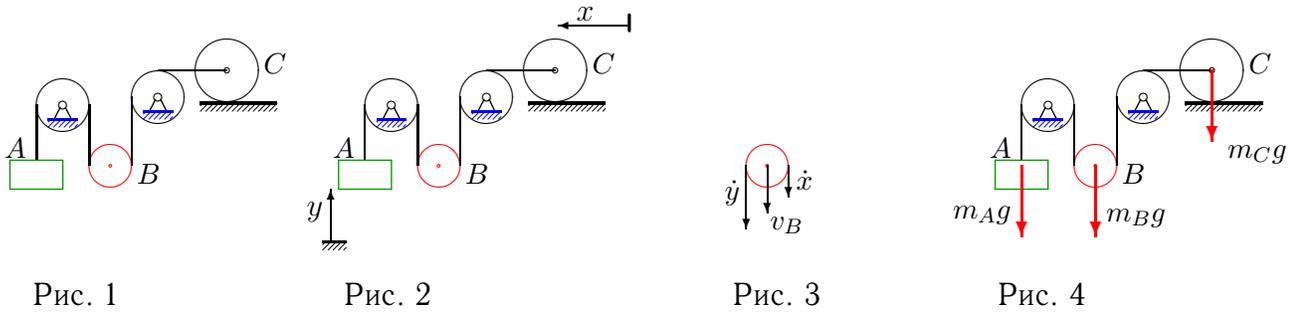


Задача. Механическая система (рис. 1) состоит из груза A массой m_A , двух невесомых блоков и однородных цилиндров с массами m_B и m_C . Система находится в вертикальной плоскости и приводится в движение силами тяжести груза A и цилиндра B . Найти ускорение груза A .



Решение

1. Выбираем две независимые переменные $q_1 = x$ и $q_2 = y$, однозначно описывающие положение системы. Пусть переменная x указывает положение груза A по отношению к неподвижной системе отсчета, а y — положение центра цилиндра C относительно той же неподвижной системы отсчета (рис. 2).

2. Выражаем кинетическую энергию системы через обобщенные скорости \dot{x} и \dot{y} .

Кинетическую энергию всей системы представляем в виде суммы кинетических энергий груза и цилиндров: $T = T_A + T_B + T_C$.

Кинетическая энергия груза

$$T_A = \frac{m_A \dot{x}^2}{2}.$$

Находим кинетическую энергию цилиндра, совершающего плоское движение:

$$T_B = \frac{m_B v_B^2}{2} + \frac{J \omega_B^2}{2}, \quad (1)$$

где v_B — скорость центра цилиндра. Очевидно, (рис. 3) $v_B = (\dot{x} + \dot{y})/2$. Угловая скорость ω_B зависит от разности скоростей \dot{x} и \dot{y} (рис. 3)

$$\omega_B = |\dot{x} - \dot{y}|/(2R).$$

Подставляем в (1) момент инерции однородного цилиндра относительно его оси, $J = m_B R^2/2$. В результате получаем выражение для кинетической энергии цилиндра:

$$T_B = \frac{m_B}{2} \left(\frac{\dot{x} + \dot{y}}{2} \right)^2 + \frac{m_B}{4} \left(\frac{\dot{x} - \dot{y}}{2} \right)^2.$$

Кинетическая энергия однородного цилиндра, катящегося без проскальзывания по поверхности

$$T_C = \frac{3m_C \dot{x}^2}{4}.$$

Кинетическая энергия всей системы

$$T = \dot{x}^2(3m_C/4 + 3m_B/16) + \dot{x}\dot{y}/4 + \dot{y}^2(m_A/2 + 3m_B/16).$$

3. Обобщенную силу Q_x вычисляем по формуле $Q_x = \delta A_x / \delta x$, где δA_x — элементарная работа всех сил на перемещении δx . При вычислении элементарной работы δA_x на приращении обобщенной координаты x фиксируется другая обобщенная координата, т.е. $\delta y = 0$. Очевидно, что на таком перемещении работу совершат только сила тяжести $m_B g$. Так как левый блок неподвижен, и МЦС цилиндра B находится в точке K , перемещение центра цилиндра $\delta x/2$ (рис. 5). $\delta A_x = m_B g \delta x/2$ и $Q_x = m_B g/2$. Аналогично, $Q_y = m_B g/2 - m_A g$ (рис. 6).

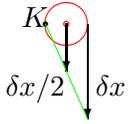


Рис. 5

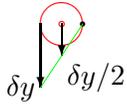


Рис. 6

4. Записываем уравнения Лагранжа и вычисляем входящие в них производные:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = \dot{x}(3m_C/2 + 3m_B/8) + \dot{y}/4 \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) = \ddot{x}(3m_C/2 + 3m_B/8) + \ddot{y}/4$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = \dot{x}/4 + \dot{y}(m_A + 3m_B/8), \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}} \right) = \ddot{x}/4 + \ddot{y}(m_A + 3m_B/8),$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0.$$

В результате уравнения Лагранжа принимают вид

$$\begin{aligned} \ddot{x}(3m_C/2 + 3m_B/8) + \ddot{y}/4 &= m_B g/2, \\ \ddot{x}/4 + \ddot{y}(m_A + 3m_B/8) &= m_B g/2 - m_A g. \end{aligned} \tag{2}$$

Решая линейную (относительно \ddot{x} и \ddot{y}) систему уравнений (2), находим ускорение груза A.