

МЕТОД ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ КОЛЛОКАЦИИ ДЛЯ ОЦЕНКИ ОСНОВНОЙ ЧАСТОТЫ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ФЕРМЫМ.Н. Кирсанов ¹Национальный исследовательский университет «МЭИ»¹
Россия, г. Москва

¹Д-р физ.-мат. наук, проф., тел.: +7(495)362-73-14; e-mail: c216@ya.ru

Предлагается вариант метода Рэлея для расчета первой собственной частоты колебаний фермы. Используется приближенная оценка потенциальной и кинетической энергии системы. Если потенциальная энергия рассчитывается по сумме потенциальных энергий всех масс, то суммарная кинетическая энергия масс заменяется приближенным выражением, рассчитанным по максимальной кинетической энергии одного из узлов. Для примера приводится вывод формулы для первой собственной частоты плоской статически определимой балочной фермы с треугольной решеткой с произвольным числом панелей. Предполагается что колебания масс, расположенных в узлах фермы, происходят только по вертикали. Жесткость фермы рассчитывается по формуле Максвелла – Мора. Сравниваются результаты, полученные по предлагаемому методу, методу Рэлея и методу Донкерлея. Все преобразования производятся в аналитическом виде с использованием системы компьютерной математики Maple. Результаты обобщаются на произвольное число панелей методом индукции. Показано хорошее совпадение предложенного метода с методом Рэлея и первой частотой, найденной численно с учетом всех степеней свободы фермы.

Ключевые слова: число панелей, ферма, индукция, Maple, собственная частота, метод Донкерлея, метод Рэлея.

Введение. Для расчета частот собственных колебаний ферм на практике, как правило, применяются численные методы на основе метода конечных элементов [1-3]. В тех же случаях, когда требуются только нижняя или верхняя оценки первой частоты, используются методы Донкерлея (оценка снизу) или Рэлея (оценка сверху) [4-7]. На основе этих оценок можно получить не только численные, но и аналитические выражения для границ частоты в зависимости от масс, размеров фермы и числа панелей. Для получения зависимости частоты от числа панелей применяется метод индукции и система компьютерной математики. Аналитические решения некоторых задач о частоте колебаний получены для плоских и пространственных регулярных ферм [8-11]. В большинстве таких решений используется метод Донкерлея [12,13]. Формулы на основе этого подхода сравнительно просты, но точность их не всегда удовлетворительна, и погрешность составляет от 10 до 50%. Значительно точнее метод Рэлея. Однако из-за сложности преобразований при суммировании конечных сумм для расчета регулярных ферм с произвольным числом панелей, этот метод дает или слишком громоздкие формулы, или не дает решения вообще, если формулы для конечных сумм не существует. В настоящей работе предлагается вариант метода Рэлея, имеющий сравнительно компактное аналитическое решение с хорошей точностью. Модифицированный метод Донкерлея для нижней оценки частоты собственных колебаний систем со многими степенями свободы рассмотрен в [14]. Метод динамической жесткости для нахождения аналитического решения задачи о продольных колебаниях стержней фермы на основе различных подходов использован в [15].

Конструкция фермы. Суть предлагаемого метода можно изложить на примере расчета собственной частоты простейшей плоской балочной фермы высотой h с $2n$ панелями по верхнему поясу. Во всех узлах фермы, кроме двух опорных, располагаются одинаковые массы m (рис. 1).

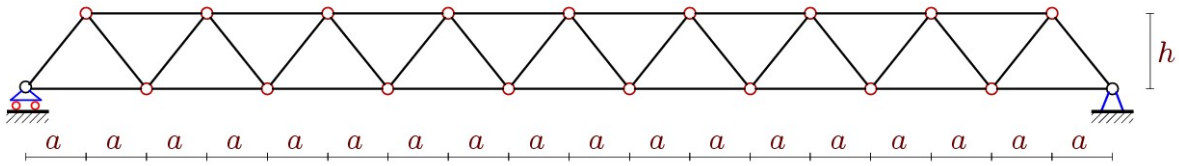


Рис 1. Схема фермы, $n=4$

Число внутренних узлов фермы равно числу степеней свободы системы с n панелями: $K = 4n + 1$. В это число не входят левый и правый опорные узлы. Ферма состоит из $\nu = 8n + 6$ упругих стержней, включая и три стержня, моделирующие опоры.

Расчет усилий в стержнях. В программу расчета усилий, написанную на языке символьной математики Maple, вносятся координаты узлов и порядок соединения стержней, образующих решетку фермы. Узлы фермы и стержни нумеруются (рис. 2). Начало координат выбирается в левой опоре:

$$x_i = 2a(i - 1), y_i = 0, i = 1, \dots, 2n + 2,$$

$$x_{i+2n+2} = a(2i - 1), y_{i+2n+2} = h, i = 1, \dots, 2n + 1.$$

Для задания структуры решетки в программе используются специальные списки с номерами концов стержней. Для стержней нижнего пояса это следующие списки: $Z_i = [i, i + 1], i = 1, \dots, 2n + 1$. Раскосы задаются списками узлов: $Z_{i+2n+1} = [i, i + 2n + 2], Z_{i+4n+2} = [i + 1, i + 2n + 2], i = 1, \dots, 2n + 1$. Верхнему поясу соответствуют списки $Z_{i+6n+3} = [i + 2n + 2, i + 2n + 3], i = 1, \dots, 2n$.

Система уравнений равновесия узлов записывается в векторном виде: $\mathbf{GS} = \mathbf{R}$, где \mathbf{G} — матрица системы уравнений равновесия размером $\nu \times \nu$, \mathbf{R} — вектор узловых нагрузок, \mathbf{S} — вектор, составленный из неизвестных усилий в стержнях и трех опорных реакций. Элементы матрицы \mathbf{G} — это направляющие косинуса усилий, рассчитанные по координатам концов стержней, соединенных с соответствующим узлом.

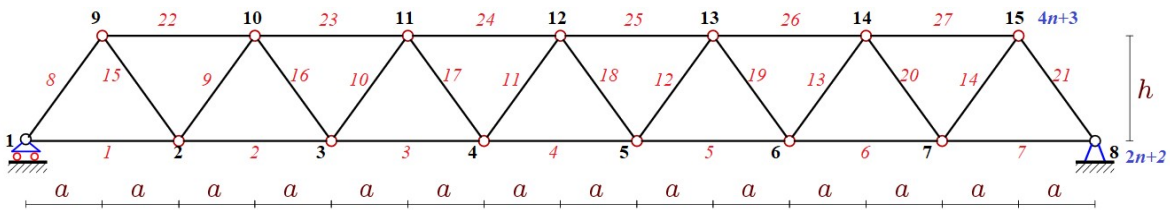


Рис 2. Номера узлов и стержней, $n = 3$

Нижняя оценка первой частоты собственных колебаний по методу Донкерлея. Для расчета частот колебаний система уравнений движения массивных узлов фермы записывается в матричной форме:

$$mI_K \ddot{Y} + D_K Y = 0, \quad (1)$$

где Y — вектор вертикальных смещений узлов фермы длиной K , \ddot{Y} — вектор ускорений, I_K — единичная матрица, D_K — матрица жесткости. С помощью замены $\ddot{Y} = -\omega^2 Y$,

справедливой для гармонических колебаний с частотой ω , умножением слева уравнения (1) на матрицу податливости B_K , задача сводится к проблеме поиска собственных значений матрицы B_K : $B_K Y = \lambda Y$, имеющей собственные числа $\lambda = 1 / (\omega^2 m)$. Матрица податливости является матрицей, обратной матрице жесткости: $B_K = 1 / D_K$, значения которой вычисляются по формуле Максвелла – Мора:

$$b_{i,j} = \sum_{\alpha=1}^{\nu-3} S_{\alpha}^{(i)} S_{\alpha}^{(j)} l_{\alpha} / (EF), \quad (2)$$

где $S_{\alpha}^{(i)}$ — усилие в стержне с номером $\alpha = 1, \dots, \nu - 3$ от действия единичной вертикальной силы, приложенной к узлу i . Жесткость EF всех стержней в ферме одинаковая. В общем случае для вычисления собственных чисел матрицы и спектра частот используются численные методы.

По формуле Донкерлея находится нижняя граница ω_D основной частоты ω_1 :

$$\omega_D^{-2} = \sum_{p=1}^K \omega_p^{-2}, \quad (3)$$

где ω_p — парциальная частота груза в узле p , вычисленная из уравнения его движения:

$$m \ddot{y}_p + D_p y_p = 0, \quad p = 1, 2, \dots, K. \quad (4)$$

Коэффициент жесткости D_p есть величина обратная податливости, которая вычисляется по формуле Максвелла – Мора:

$$\delta_p = 1 / D_p = \sum_{\alpha=1}^{\nu-3} (S_{\alpha}^{(p)})^2 l_{\alpha} / (EF). \quad (5)$$

Если принять форму колебаний в виде $y_p = A_p \sin(\omega_p t + \varphi)$, где A_p — амплитуда колебаний массы, то из (4) следует выражение $\omega_p = \sqrt{D_p / m}$. Отсюда и из (3) получается формула для нижней границы первой собственной частоты по Донкерлею:

$$\omega_D^{-2} = m \sum_{p=1}^K \delta_p = m \Delta_n. \quad (6)$$

Расчет сумм $\Delta_n = \sum_{\alpha=1}^{\nu-3} (S_{\alpha}^{(p)})^2 l_{\alpha} / (EF)$ для ферм с последовательно увеличивающимся числом панелей дает:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= 4(17a^3 + 3c^3) / (9h^2 EF), \\ \Delta_2 &= 4(93a^3 + 7c^3) / (5h^2 EF), \\ \Delta_3 &= 8(281a^3 + 11c^3) / (7h^2 EF), \\ \Delta_4 &= 8(3161a^3 + 75c^3) / (27h^2 EF), \dots \end{aligned}$$

В общем случае:

$$\Delta_n = (C_1 a^3 + C_2 c^3) / (h^2 EF),$$

где с помощью операторов системы Maple вычисляются общие члены последовательностей коэффициентов:

$$C_1 = (4n + 5)(2n + 3)(4n + 7)(32n^2 + 96n + 79) / 90,$$

$$C_2 = (4n + 5)(2n + 3)(4n + 7) / 6.$$

Таким образом, уравнение для нахождения нижней оценки первой частоты по методу Донкерлея получается в виде:

$$\omega_D^{-2} = m(C_1 a^3 + C_2 c^3) / (h^2 EF). \quad (7)$$

Оценка первой частоты собственных колебаний по методу Рэлея. Формула Рэлея для верхней оценки первой частоты следует из равенства максимальных значений кинетической и потенциальной энергий:

$$T_{\max} = \Pi_{\max}. \quad (8)$$

Кинетическая энергия системы K одинаковых масс m , расположенных в узлах конструкции записывается в виде суммы:

$$T = \sum_{i=1}^K m v_i^2 / 2.$$

Для гармонических колебаний $y_i = u_i \sin(\omega t + \varphi)$ вертикальная скорость массы i имеет вид:

$$v_i = \dot{y}_i = \omega u_i \cos(\omega t + \varphi).$$

При $\cos(\omega t + \varphi) = 1$ кинетическая энергия максимальная:

$$T_{\max} = \omega^2 m \sum_{i=1}^K u_i^2 / 2. \quad (9)$$

По формуле Максвелла – Мора вычисляется амплитуда смещения u_i :

$$u_i = \sum_{\alpha=1}^{\nu-3} S_{\alpha}^{(P)} \tilde{S}_{\alpha}^{(i)} l_{\alpha} / (EF) = P \sum_{\alpha=1}^{\nu-3} \tilde{S}_{\alpha}^{(P)} \tilde{S}_{\alpha}^{(i)} l_{\alpha} / (EF) = P \tilde{u}_i.$$

Обозначения: $S_{\alpha}^{(P)}$ — усилие в стержне α от действия равномерно распределенной по всем узлам нагрузки P , $\tilde{S}_{\alpha}^{(i)}$ — усилие в стержне от единичной вертикальной силы, приложенной к узлу i , $\tilde{S}_{\alpha}^{(P)} = S_{\alpha}^{(P)} / P$. При такой нагрузке форма прогиба конструкции близка форме колебаний системы грузов по первой частоте. Формула (9) переписывается в виде:

$$T_{\max} = P^2 \omega^2 \sum_{i=1}^K m \tilde{u}_i^2 / 2, \quad (10)$$

где $\tilde{u}_i = u_i / P = \sum_{\alpha=1}^{\nu-3} \tilde{S}_{\alpha}^{(P)} \tilde{S}_{\alpha}^{(i)} l_{\alpha} / (EF)$ — относительные амплитуды смещений масс в узлах с номером i при действии равномерно распределенной узловой нагрузки.

Деформация стержня по закону Гука равна $\Delta l_{\alpha} / l_{\alpha} = S_{\alpha}^{(P)} / (EF)$. С учетом этого суммарная потенциальная энергия деформации всех стержней фермы от действия распределенной нагрузки имеет вид: $\Pi_{\max} = \sum_{\alpha=1}^{\nu-3} S_{\alpha}^{(P)} \Delta l_{\alpha} / 2 = \sum_{\alpha=1}^{\nu-3} (S_{\alpha}^{(P)})^2 l_{\alpha} / (2EF)$. В силу

линейности задачи по нагрузкам: $S_{\alpha}^{(P)} = P \sum_{i=1}^K \tilde{S}_{\alpha}^{(i)}$. Отсюда:

$$\Pi_{\max} = P^2 \sum_{\alpha=1}^{\nu-3} \tilde{S}_{\alpha}^{(P)} \sum_{i=1}^K \tilde{S}_{\alpha}^{(i)} l_{\alpha} / (2EF) = P^2 \sum_{i=1}^K \sum_{\alpha=1}^{\nu-3} \tilde{S}_{\alpha}^{(P)} \tilde{S}_{\alpha}^{(i)} l_{\alpha} / (2EF) = P^2 \sum_{i=1}^K \tilde{u}_i / 2. \quad (11)$$

Из соотношений (10) и (11) имеем формулу для оценки сверху первой частоты колебаний фермы по методу Рэлея:

$$\omega_R^2 = \sum_{i=1}^K \tilde{u}_i / \sum_{i=1}^K m \tilde{u}_i^2. \quad (12)$$

Значения сумм в числителе и знаменателе этого выражения как функции числа панелей получаются методом индукции. Числитель в (12) имеет вид:

$$\sum_{i=1}^K \tilde{u}_i = (C_{a3} a^3 + C_{c3} c^3) / (h^2 EF),$$

где из решения рекуррентных уравнений следует:

$$\begin{aligned} C_{c3} &= (32n^4 + 80n^3 + 70n^2 + n + 6) / (3(2n + 1)), \\ C_{a3} &= (1536n^6 + 5120n^5 + 7040n^4 + 5200n^3 - 206n^2 + 1335n - 90)(45(2n + 1)). \end{aligned} \quad (13)$$

Знаменатель в (12) несколько сложнее:

$$\sum_{k=1}^N m \tilde{u}_k^2 = m(C_{a6} a^6 + C_{ac} a^3 c^3 + C_{c6} c^6) / (h^4 E^2 F^2), \quad (14)$$

где коэффициенты также получены методом индукции:

$$\begin{aligned} C_{a6} &= (1015808n^{11} + 5586944n^{10} + 14202880n^9 + 22010880n^8 + 23110272n^7 + \\ &\quad + 17277120n^6 + 9397672n^5 - 2887100n^4 + 6944120n^3 - 1893384n^2 + \\ &\quad + 327303n - 17010) / (2835(2n + 1)^2), \\ C_{c6} &= (512n^7 + 1792n^6 + 2816n^5 + 2560n^4 + 1438n^3 - 107n^2 + 334n - \\ &\quad - 30) / (15(2n + 1)^2), \\ C_{ac} &= (69632n^9 + 313344n^8 + 642560n^7 + 786688n^6 + 633360n^5 + 347816n^4 - \\ &\quad - 57760n^3 + 154872n^2 - 27162n + 2520) / (315(2n + 1)^2). \end{aligned} \quad (15)$$

Таким образом, верхняя оценка первой частоты фермы по Рэлею зависит от числа панелей и имеет вид:

$$\omega_R = h \sqrt{\frac{EF(C_{a3} a^3 + C_{c3} c^3)}{m(C_{a6} a^6 + C_{ac} a^3 c^3 + C_{c6} c^6)}}. \quad (16)$$

Модификация метода Рэлея (метод коллокации кинетической энергии). В формуле (16) для верхней оценки основной частоты наибольшую сложность при выводе зависимости частоты колебаний от числа панелей представляет знаменатель. Числитель выражения относительно прост и от метода Донкерлея отличается только тем, что прогибы, входящие в сумму, вычисляются не от единичной силы, приложенной к каждому узлу с массой, а от нагрузки, распределенной по всем узлам с массами. Знаменатель же представляет собой сумму квадратов этих прогибов. В рассмотренной ферме в решение входят только два ее геометрических размера a и h , поэтому знаменатель (16) содержит только три слагаемых и три коэффициента. Для нахождения зависимости этих коэффициентов от числа панелей используется метод индукции с довольно-таки громоздкими результатами (15). Если в решение для более сложной конструкции фермы войдут три размерных параметра, то число слагаемых в знаменателе (16) будет уже шесть. В задаче с k размерами сумма в (14) будет содержать $k(k + 1) / 2$ коэффициентов, конечно, в том случае, если удастся найти искомые закономерности изменения коэффициентов от числа панелей. Однако это бывает не всегда, и метод Рэлея для регулярных ферм произвольного порядка во многих случаях реализовать не удастся.

Предлагается упростить вычисление знаменателя в классическом выражении (12).

Сумма $\sum_{i=1}^K \tilde{u}_i^2$ в знаменателе (14) — это фактически сумма ординат кривой зависимости \tilde{u}_i^2 от номера узла (рис. 3).

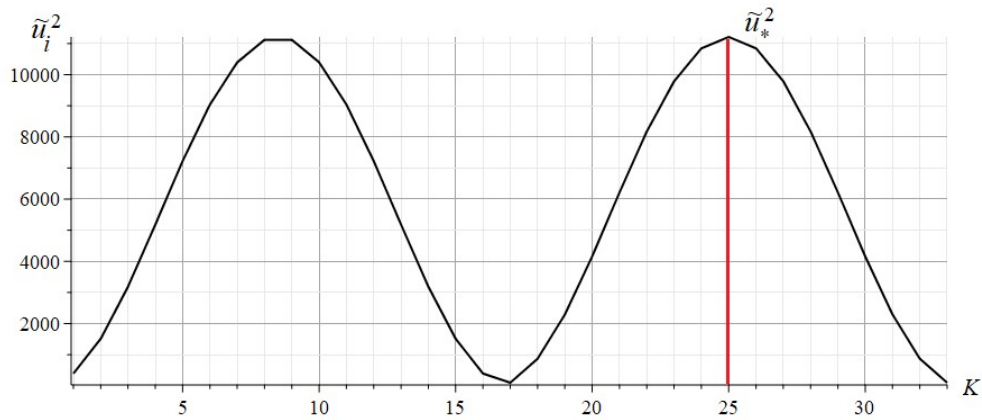


Рис 3. Зависимость \tilde{u}_i^2 от номера узла i с массой

Приняты размеры фермы: $a = 3\text{м}$, $h = 2\text{м}$. Продольная жесткость стальных стержней сечением $F = 4 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$ равна $EF = 0,8 \cdot 10^5 \text{ кН}$, число панелей $n=8$, число степеней свободы $K=33$. На оси абсцисс отложены номера узлов. Максимальная ордината обозначена \tilde{u}_*^2 . Если ранжировать по увеличению слагаемые \tilde{u}_i^2 (рис. 4), то площадь кривой на рисунке

3 можно заменить на площадь треугольника: $\sum_{i=1}^K \tilde{u}_i^2 = \tilde{u}_*^2 K / 2$ (метод коллокации).

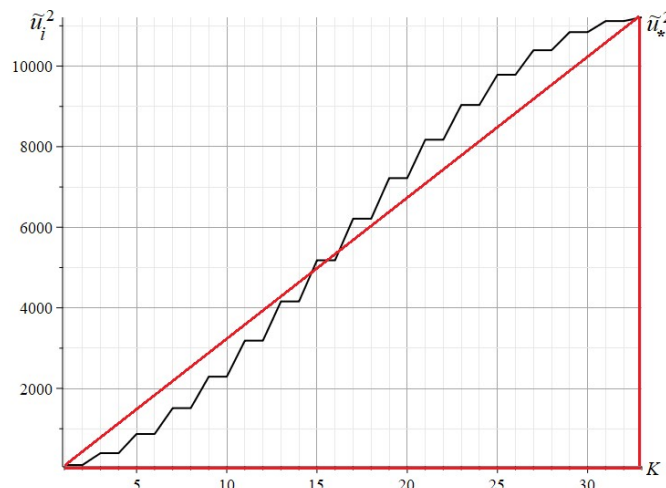


Рис 4. Ранжированная зависимость \tilde{u}_i^2 от номера узла i с массой

При этом треугольник оказывается вписанно-описанной фигурой исходной площади, что делает такую замену оправданной. В этом случае на рисунке 4 на оси абсцисс уже отмечены не номера узлов, а номера ранжированного по увеличению списка значений \tilde{u}_i^2 . Пробные вычисления величины \tilde{u}_i^2 при различных n показывают, что максимальное значение \tilde{u}_*^2 приходится на средний узел верхнего пояса фермы, имеющий номер $3n+1$.

Вычисление величины $\tilde{u}_* = \tilde{u}_{3n+1}$ для различных порядков фермы дает следующую последовательность:

$$\begin{aligned} n = 2 : \tilde{u}_* &= (525a^3 + 25c^3) / (2h^2EF), \\ n = 3 : \tilde{u}_* &= (2009a^3 + 49c^3) / (2h^2EF), \\ n = 4 : \tilde{u}_* &= (5481a^3 + 81c^3) / (2h^2EF), \\ n = 5 : \tilde{u}_* &= (12221a^3 + 121c^3) / (2h^2EF), \dots \end{aligned}$$

Общий член последовательности имеет вид:

$$\tilde{u}_* = (2n + 1)^2(10a^3(n + 1) + 3(a^3 + c^3)) / (6h^2EF).$$

Таким образом, формула для основной частоты по методу коллокации имеет вид:

$$\omega_*^2 = \frac{2 \sum_{i=1}^K \tilde{u}_i}{m \tilde{u}_*^2 K} = \frac{72(C_{a3}a^3 + C_{c3}c^3)h^2EF}{mK(2n + 1)^4(10a^3(n + 1) + 3(a^3 + c^3))^2}. \quad (17)$$

Коэффициенты C_{a3} и C_{c3} в числителе этой формулы вычисляются по формулам (13).

Численное решение. Три полученные оценки зависимости основной частоты колебаний от порядка фермы необходимо сравнить с минимальным значением всего спектра частот, полученным численно. Приняты размеры $a = 4\text{м}$, $h = 2\text{м}$. Площадь поперечного сечения стержней $F = 4\text{см}^2$, модуль упругости материала стержней $E = 2,1 \cdot 10^5\text{ МПа}$, массы в узлах $m = 350\text{ кг}$. На рисунке 5 сопоставлены кривые зависимости частот ω_D , ω_R и ω_* от числа панелей по формулам (10), (16) и (17) с первой частотой спектра ω_1 , полученной численно.

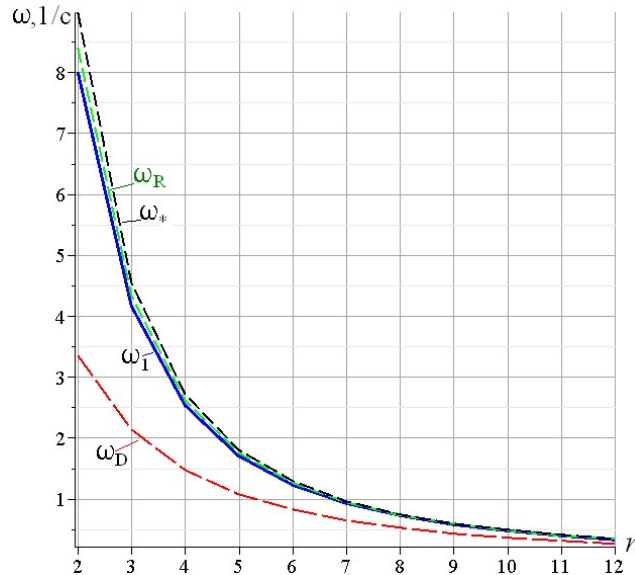


Рис 5. Сравнение аналитических решений с численным. Первая частота колебаний фермы ω_1 и её нижняя оценка ω_D по Донкерлею (7), ω_R — верхняя оценка по Рэлею (16), ω_* — метод энергетической коллокации (17)

Аналитическое решение по методу Донкерлея оказывается значительно меньше численного, хотя с увеличением числа панелей погрешность уменьшается. Метод Рэлея и предлагаемый его вариант (метод коллокации) имеют значительно большую точность. Для

более точной оценки погрешностей методов введем величины $\varepsilon_D = (\omega_1 - \omega_D) / \omega_1$, $\varepsilon_R = (\omega_R - \omega_1) / \omega_1$ и $\varepsilon_{R^*} = (\omega_* - \omega_1) / \omega_1$. На рисунке 6 представлены зависимости относительных погрешностей от числа панелей.

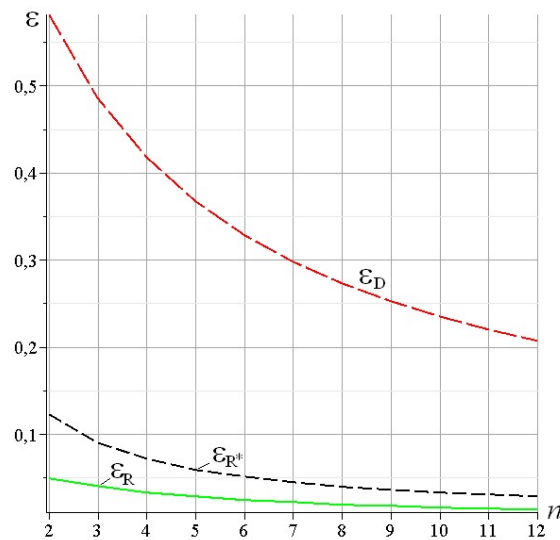


Рис 7. Погрешность оценки по Донкерлею ε_D , Рэлею ε_R и метод коллокации ε_{R^*}

Заключение. Предложен метод вывода аналитического решения для оценки первой частоты собственных колебаний регулярной фермы. Метод применим и для любых других регулярных механических систем с многими степенями свободы. Можно сделать следующие выводы:

1. Формула для вычисления частоты по предлагаемому методу проще, чем по методу Рэлея, а точность полученного результата сравнительно с численным методом расчета всего спектра частот значительно выше, чем по методу Донкерлея и сопоставима с методом Рэлея.
2. С увеличением числа панелей в ферме точность предлагаемого метода растёт.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ 22-21-00473.

Библиографический список

1. Коваленко Г. В., Макеев В. Б., Дементьева В. В. Исследование частот собственных колебаний ферм на основе метода конечных элементов (МКЭ) // Молодая мысль: Наука, технологии, инновации. 2015. С. 44-48.
2. Игнатьев В.А., Игнатьев А.В. Метод конечных элементов в форме классического смешанного метода строительной механики (теория, математические модели и алгоритмы). М.: Издательство АСВ, 2022. 306 с.
3. Vatin N.I., Sinelnikov A.S. Footway bridges: cold formed steel cross-section // Construction of Unique Buildings and Structures. 2012. 3(3). Pp. 39–51. doi:10.18720/CUBS.3.5. URL: <https://unistroy.spbstu.ru/article/2012.3.5> (date of application: 17.04.2021)
4. Vorobev O. Bilateral analytical estimation of first frequency of a plane truss // Construction of Unique Buildings and Structures. 2020. Vol. 92. Article No 9204 doi: 10.18720/CUBS.92.4
5. Воробьев О.В. Оценка основной частоты двузвенного манипулятора // В книге: Радиоэлектроника, электротехника и энергетика. Тезисы докладов двадцать седьмой

- международной научно-технической конференции студентов и аспирантов. Москва, 2021. С. 1013.
6. Петриченко Е.А. Оценка частоты собственных колебаний фермы Финка // В книге: Радиоэлектроника, электротехника и энергетика. Тезисы докладов двадцать седьмой международной научно-технической конференции студентов и аспирантов. Москва, 2021. С. 999.
 7. Petrenko V. The natural frequency of a two-span truss // AlfaBuild. 2021. 20. Article No 2001. doi: 10.34910/ALF.20.1
 8. Sviridenko O., Komerzan E. The dependence of the natural oscillation frequency of the console truss on the number of panels // Construction of Unique Buildings and Structures; 2022; 101 Article No 10101. doi: 10.4123/CUBS.101.1
 9. Kirsanov, M., Luong C.L. Deformations and natural frequency spectrum of a planar truss with an arbitrary number of panels // AlfaBuild. 2022. 25 Article No 2507. doi: 10.57728/ALF.25.7
 10. Kirsanov, M. Model of a hexagonal prismatic truss. Oscillation frequency spectrum // Construction of Unique Buildings and Structures. 2023; 106. Article No 10601. doi: 10.4123/CUBS.106.01
 11. Kirsanov M.N., Safronov V.S. Analytical estimation of the first natural frequency and analysis of a planar regular truss oscillation spectrum // Magazine of Civil Engineering. 2022. 111(3). Article No. 11114. doi: 10.34910/MCE.111.14
 12. Levy, C. An iterative technique based on the Dunkerley method for determining the natural frequencies of vibrating systems // Journal of Sound and Vibration. 1991. 150(1). Pp. 111–118. doi:10.1016/0022-460X(91)90405-9.
 13. Trainor, P.G.S., Shah, A.H., Popplewell, N. Estimating the fundamental natural frequency of towers by Dunkerley's method // Journal of Sound and Vibration. 1986. 109(2). Pp. 285–292. doi:10.1016/S0022-460X(86)80009-8.
 14. Low, K.H. A modified Dunkerley formula for eigenfrequencies of beams carrying concentrated masses // International Journal of Mechanical Sciences. 2000. 42(7). Pp. 1287–1305. doi:10.1016/S0020-7403(99)00049-1
 15. Liu, X., Zhao, Y., Zhou, W., Banerjee, J.R. Dynamic stiffness method for exact longitudinal free vibration of rods and trusses using simple and advanced theories // Applied Mathematical Modelling. 2022. 104. Pp. 401–420. doi:10.1016/J.APM.2021.11.023.

References

1. Kovalenko G. V., Makeev V. B., Dementieva V. V. Investigation of natural frequencies of trusses based on the finite element method (FEM). Young thought: Science, technology, innovation. 2015. Pp. 44-48.
2. Ignatiev V.A., Ignatiev A.V. Finite element method in the form of a classical mixed method of structural mechanics (theory, mathematical models and algorithms). Moscow: ASV Publishing House, 2022. 306 p.
3. Vatin N.I., Sinelnikov A.S. Footway bridges: cold formed steel cross-section. Construction of Unique Buildings and Structures. 2012. 3(3). Pp. 39–51. doi:10.18720/CUBS.3.5. URL: <https://unistroy.spbstu.ru/article/2012.3.5> (date of application: 17.04.2021)
4. Vorobev O. Bilateral analytical estimation of first frequency of a plane truss. Construction of Unique Buildings and Structures. 2020. Vol. 92. Article No 9204 doi: 10.18720/CUBS.92.4
5. Vorobyov O.V. Estimation of the fundamental frequency of a two-link manipulator. In the book: Radioelectronics, electrical engineering and energy. Abstracts of the twenty-seventh

- international scientific and technical conference of students and graduate students. Moscow, 2021. Pp. 1013.
6. Petrichenko E.A. Estimation of the natural oscillation frequency of the Fink truss. In the book: Radioelectronics, electrical engineering and energy. Abstracts of the twenty-seventh international scientific and technical conference of students and graduate students. Moscow, 2021, Pp. 999.
 7. Petrenko V. The natural frequency of a two-span truss. AlfaBuild. 2021. 20 Article No 2001. doi: 10.34910/ALF.20.1
 8. Sviridenko O., Komerzan E. The dependence of the natural oscillation frequency of the console truss on the number of panels. Construction of Unique Buildings and Structures. 2022. 101Article No 10101. doi: 10.4123/CUBS.101.1
 9. Kirsanov, M., Luong C.L. Deformations and natural frequency spectrum of a planar truss with an arbitrary number of panels. AlfaBuild. 2022. 25. Article No 2507. doi: 10.57728/ALF.25.7
 10. Kirsanov, M. Model of a hexagonal prismatic truss. Oscillation frequency spectrum. Construction of Unique Buildings and Structures. 2023. 106. Article No 10601. doi: 10.4123/CUBS.106.01
 11. Kirsanov M.N., Safronov V.S. Analytical estimation of the first natural frequency and analysis of a planar regular truss oscillation spectrum. Magazine of Civil Engineering. 2022. 111(3). Article No. 11114. doi: 10.34910/MCE.111.14
 12. Levy, C. An iterative technique based on the Dunkerley method for determining the natural frequencies of vibrating systems. Journal of Sound and Vibration. 1991. 150(1). Pp. 111–118. doi:10.1016/0022-460X(91)90405-9.
 13. Trainor, P.G.S., Shah, A.H., Popplewell, N. Estimating the fundamental natural frequency of towers by Dunkerley's method. Journal of Sound and Vibration. 1986. 109(2). Pp. 285–292. doi:10.1016/S0022-460X(86)80009-8.
 14. Low, K.H. A modified Dunkerley formula for eigenfrequencies of beams carrying concentrated masses. International Journal of Mechanical Sciences. 2000. 42(7). Pp. 1287–1305. doi:10.1016/S0020-7403(99)00049-1
 15. Liu, X., Zhao, Y., Zhou, W., Banerjee, J.R. Dynamic stiffness method for exact longitudinal free vibration of rods and trusses using simple and advanced theories. Applied Mathematical Modelling. 2022. 104. Pp. 401–420. doi:10.1016/J.APM.2021.11.023.

ENERGY COLLOCATION METHOD FOR THE TRUSS FUNDAMENTAL FREQUENCY ESTIMATION

M. N. Kirsanov

National Research University "MPEI

Moscow, Russia

Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Department of Robotics, Mechanotronics, Dynamics and Strength of Machines, tel.: +7(495)362-73-14, e-mail: c216@ya.ru

A variant of the Rayleigh method for calculating the first natural frequency of the truss oscillations is proposed. An approximate estimate of the potential and kinetic energy of the system is used. If the potential energy is calculated from the sum of the potential energies of all masses, then the total kinetic energy of all masses is replaced by an approximate expression calculated from the maximum kinetic energy of one of the nodes. A recommendation is given on the choice of this node. For example, the derivation of the

formula for the first natural frequency of a plane statically determined truss with a triangular lattice is given. It is assumed that the oscillations of the masses located in the truss nodes occur only along the vertical. Truss stiffness is calculated using the Maxwell – Mohr formula. The results obtained by the proposed method, the Rayleigh method and the Dunkerley method are compared. All transformations are performed in an analytical form using the Maple computer mathematics system. The results are generalized to an arbitrary number of panels by induction. A good agreement between the proposed method and the Rayleigh method and the first frequency found numerically, taking into account all degrees of freedom of the truss, is shown.

Key words: number of panels, truss, induction, Maple, natural frequency, Dunkerley method, Rayleigh method.