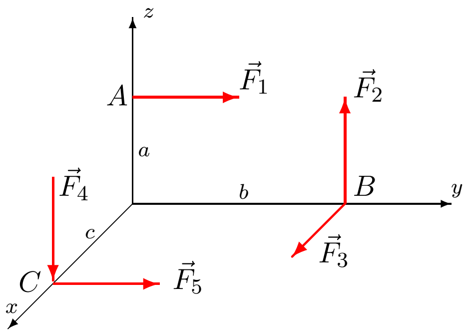
Московская городская олимпиада по теоретической механике. МЭИ(ТУ) - 2010

Задача 1. Система сил приложена к точкам $A(0,0,a)$, $B(0,b,0)$ и $C(c,0,0)$ твердого тела. Дано: $F_1 = 4F_2 - F_4$, $F_4 = 1$кН, $F_5 = 2F_3$. При каком соотношении между размерами a, b и c система сил имеет вектор главного момента относительно начала координат, лежащий на прямой, проходящей через начало координат и пересекающий прямые $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z}{4}$, $\frac{x+1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z}{5}$. **(10 баллов)**



Решение

Прямая, пересекающая прямую

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z}{4}, \tag{1}$$

должна лежать в плоскости, содержащей эту прямую и начало координат. Нормаль к этой плоскости получим как векторное произведение векторов, один из которых лежит на прямой (1), т.е. $[2,3,4]$, а другой соединяет начало координат и какую-нибудь точку на прямой (1), например, $[1,2,0]$. Итак, получим нормаль к плоскости

$$\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = [-8,4,1].$$

Аналогично, найдем нормаль к плоскости, содержащей начало координат и прямую

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z}{5}. \tag{2}$$

Получим $\vec{n}_2 = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & 5 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} = [10,-5,-1]$. Вектор $\vec{s}$ (назовем его так), лежащий на пересечении плоскостей, лежит и на искомой прямой, пересекающей прямые (1) и (2). Очевидно, он перпендикулярен к нормалям плоскостей, а потому получается как векторное произведение $\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -8 & 4 & 1 \\ 10 & -5 & -1 \end{pmatrix} = [1,2,0]$. Далее, находим главный момент системы

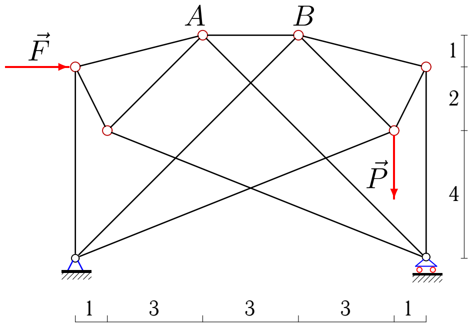
$$M_x = -F_1 a + F_2 b,$$
$$M_y = F_4 c,$$
$$M_z = -F_3 b + F_5 c.$$

По условию задачи $\vec{M}_0 = t\vec{s}$, где t — произвольный коэффициент пропорциональности. Отсюда получаем систему уравнений для a, b, c:

$$-F_1 a + F_2 b = t,$$
$$F_4 c = 2t,$$
$$-F_3 b + F_5 c = 0.$$

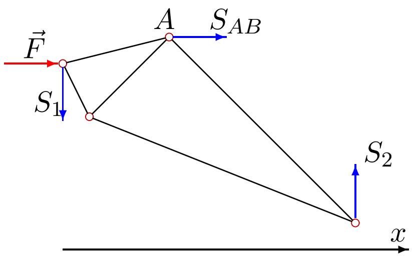
Решаем систему. Из второго уравнения $c = 2t$. Из третьего $b = cF_5/F_3 = 4t$, и, наконец, $a = (-t + F_2 b)/F_1 = (-t + 4tF_2)/F_1 = t$. Таким образом, искомое соотношение $c = 2a$, $b = 4a$.

Задача 2. Плоская шарнирно-стержневая конструкция опирается на неподвижный шарнир и подвижный. На конструкцию действует горизонтальная сила $\vec{F}$ и вертикальная $\vec{P}$. Найти усилие в стержне AB. **(4 балла)**

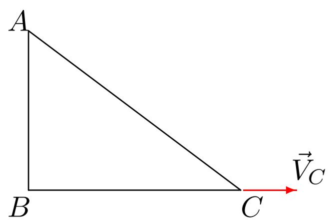


Решение

Выделяем стержневой четырехугольник. Действие стержней заменяем неизвестными усилиями S_1, S_2, S_{AB}. Из уравнения проекций на горизонтальную ось x получаем $F + S_{AB} = 0$. Находим $S_{AB} = -F$.



Задача 3. Прямоугольный треугольник ABC совершает плоское движение так, что в некоторый момент скорости вершин A и B равны по модулю, а вектор скорости вершины C направлен вдоль катета BC и равен 30 см/с. Даны размеры: $AB = 3$ см, $BC = 4$ см. Найти тремя способами угловую скорость треугольника. **(5 баллов)**



Решение

Первое очевидное решение $\omega = 0$, все скорости равны, их векторы параллельны $\vec{V}_c$.

Другое, ненулевое решение, найдем тремя способами.

Способ 1. МЦС. Так как скорости точек A и B равны, то МЦС равноудален от A и B, следовательно, МЦС лежит на перпендикуляре к середине AB (рис. 1). Восстанавливая перпендикуляр к $\vec{V}_c$ получаем МЦС, и значение $\omega = 30/1.5 = 20$ рад/с.

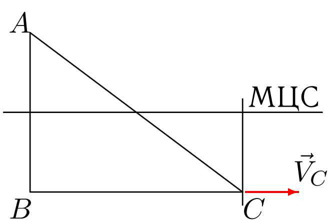


Рис. 1

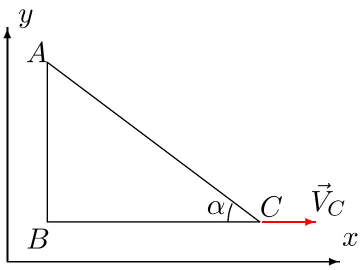


Рис. 2

Способ 2. Граф кинематический, или формула Эйлера.

Выражаем скорость точки C через скорость точки B (рис. 2) $\vec{V}_C = \vec{V}_B + \vec{\omega} \times \vec{BC}$. В проекциях:

$$
\begin{aligned}
V_{Cx} &= V_{Bx}, & (3)\\
V_{Cy} &= V_{By} + \omega_z BC = 0, & (4)
\end{aligned}
$$

Выражаем скорость точки C через скорость точки A: $\vec{V}_C = \vec{V}_A + \vec{\omega} \times \vec{AC}$.

В проекциях:

$$
\begin{aligned}
V_{Cx} &= V_{Ax} + \omega_z AC \sin\alpha, & (5)\\
V_{Cy} &= V_{Ay} + \omega_z AC \cos\alpha = 0, & (6)
\end{aligned}
$$

Вычитая из уравнения (6) уравнение (4), получаем $V_{Ay} = V_{By}$. Модули скоростей точек A и B по условию равны $V_{Bx}^2 + V_{By}^2 = V_{Ax}^2 + V_{ay}^2$. Отсюда $V_{Bx} = \pm V_{Ax}$. Имеем два решения. Первое решение: $V_{Bx} = V_{Ax}$. Из (5) и (3) получим $\omega_z = 0$. Второе решение: $V_{Bx} = -V_{Ax}$. Из (5) и (3) получим $2V_{Cx} = AC\omega_z \sin\alpha$. Отсюда

$$\omega_z = 2V_{Cx}/(AC\sin\alpha) = 60/3 = 20 \text{ рад/с}.$$

Способ 3. План скоростей.

Выбираем произвольную точку o на плоскости (рис. 3). Откладываем в масштабе вектор известной скорости $\vec{V}_C$. Конец вектора на плане скоростей помечаем строчной буквой c. Известно, что $bc \perp BC$ (свойство плана скоростей). Следовательно точка b лежит где-то на вертикали, которую проведем через c. Аналогично ищем точку a из условия $ac \perp AC$. Проводим эту прямую через c. Так как скорости точек A и B равны, то треугольник oab должен быть равнобедренным, и $ab \perp AB$. Проводим вертикальную прямую на расстоянии 30 (величина скорости C) слева от o (рис. 4). Из точки пересечения прямых проводим горизонталь ab. Треугольник oab получился равнобедренным (рис. 5). Следовательно, $\omega = ab/AB = 60/3 = 20$ рад/с.

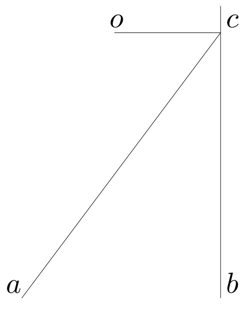


Рис. 3

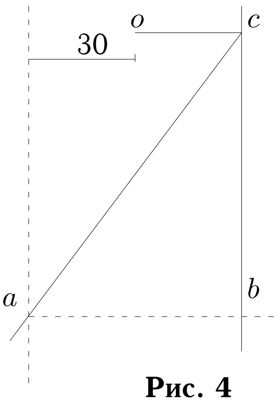


Рис. 4

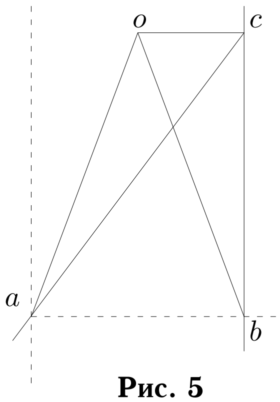
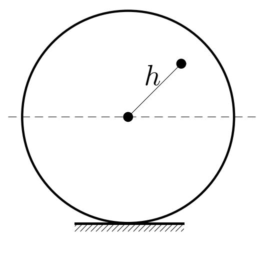


Рис. 5

Задача 4. Цилиндр радиусом R катится без проскальзывания по горизонтальной плоскости так, что точка, расположенная на расстоянии h от центра, имеет постоянную по модулю скорость v. Найти ускорение этой точки в момент, когда она находится на одной горизонтали с центром. **(5 баллов)**



Решение

Уравнение траектории в параметрической форме (параметр — угол поворота φ, отсчитываемый против часовой стрелки от вертикали) имеет вид (рис. 6)

$$x = -R\varphi + h\sin\varphi, \quad y = R - h\cos\varphi.$$

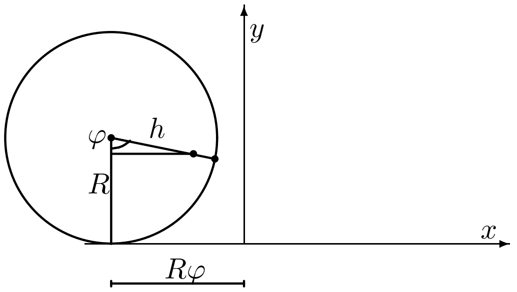


Рис. 6

Скорость точки имеет компоненты

$$v_x = \omega(h\cos\varphi - R), \quad v_y = \omega h\sin\varphi, \quad \omega = d\varphi/dt. \tag{7}$$

Ускорение точки имеет компоненты

$$a_x = \varepsilon(h\cos\varphi - R) - \omega^2 h\sin\varphi, \quad a_y = \varepsilon h\sin\varphi + \omega^2 h\cos\varphi, \ \varepsilon = d\omega/dt. \tag{8}$$

Модуль скорости

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \tag{9}$$

Из (7) и (9) получим

$$\omega = v/\sqrt{R^2 + h^2 - 2Rh\cos\varphi} \tag{10}$$

Касательное ускорение по условию равно нулю

$$(v_x a_x + v_y a_y)/v = 0. \tag{11}$$

Подставим сюда (7) и (8). Получим

$$\varepsilon = -Rh\omega^2\sin\varphi/(R^2 + h^2 - 2Rh\cos\varphi). \tag{12}$$

При $\varphi = \pi/2$ имеем

$$\omega = v/\sqrt{R^2 + h^2}, \quad \varepsilon = -Rh\omega^2/(R^2 + h^2), \ a_x = -\varepsilon R - \omega^2 h, \ a_y = \varepsilon h. \tag{13}$$

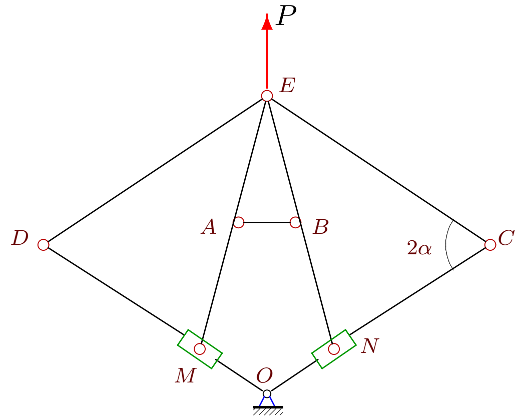
Отсюда получаем

$$a_x = -v^2h^3/(R^2 + h^2)^2, \ a_y = -Rv^2h^2/(R^2 + h^2)^2, \ a = v^2h^2/(R^2 + h^2)^{3/2}. \tag{14}$$

Ответ.

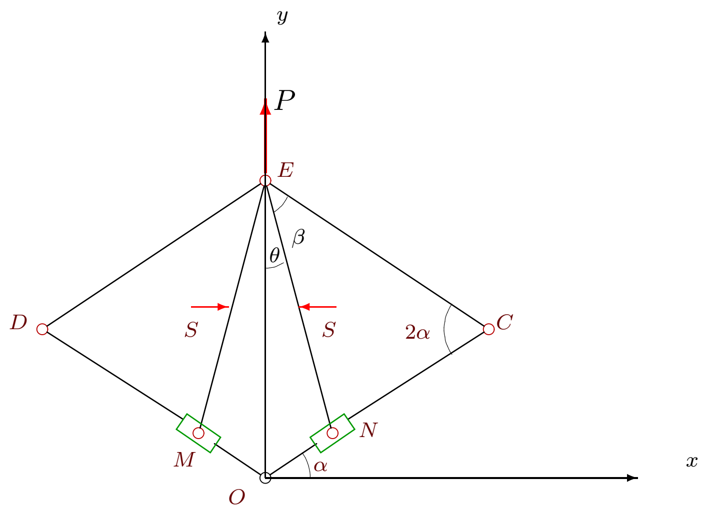
$$a = \frac{v^2h^2}{(R^2 + h^2)^{3/2}}.$$

Задача 5. Стержневая система состоит из шести стержней одинаковой длины, двух муфт M и N и стержня AB. Муфты надеты без трения на стержни OD и OC. Стержень AB скрепляет середины стержней ME и NE. К шарниру E приложена вертикальная сила P, в точке O система закреплена на неподвижном шарнире. Задан угол α. Найти усилие в стержне AB двумя способами. **(7 баллов)**



Решение

Пусть стержни имеют длину b.



Способ 1.

Треугольник NCE равнобедренный, поэтому

$$\beta = \pi - 4\alpha,\ \ \theta = \pi/2 - \alpha - \beta = 3\alpha - \pi/2.$$

Вычислим координаты

$$x_B = BE\sin\theta = -b/2\cos 3\alpha,$$

$$y_E = 2OC\sin\alpha = 2b\sin\alpha.$$

Скорости:

$$V_{Bx} = (3/2)b\dot{\alpha}\sin 3\alpha,$$

$$V_{Ey} = 2b\dot{\alpha}\cos\alpha.$$

Обозначим S — усилие в стержне AB. Согласно принципу возможных мощностей

$$PV_{Ey} - 2SV_{Bx} = 0.$$

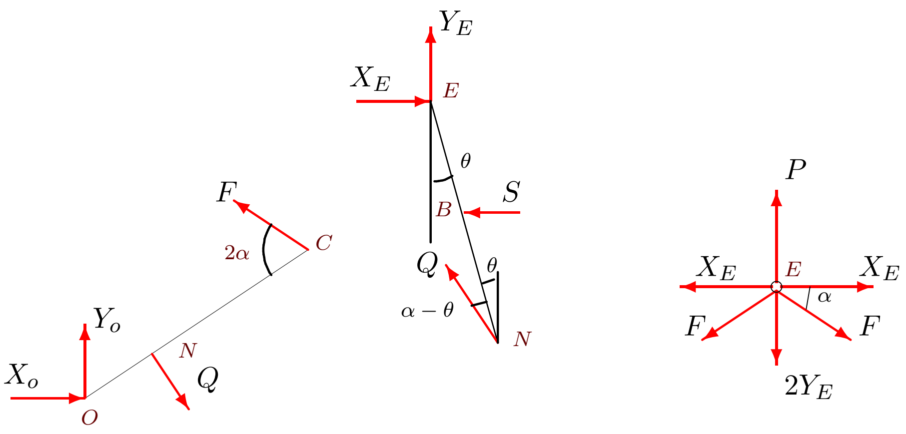
Отсюда

$$S = 2P\cos\alpha/(3\sin 3\alpha). \tag{15}$$

Так как $\theta > 0$, то $\alpha \geq \pi/6$. Кроме того $2\alpha \leq \pi/2$, отсюда имеем ограничение

$$\pi/6 \leq \alpha \leq \pi/4.$$

Способ 2. Обозначим Q — давление муфты на стержень OC, F — усилие в стержнях CE и DE.



Равновесие стержня OC

$$\sum M_O = Fb\sin(2\alpha) - Q\cdot ON = 0, \tag{16}$$

где $ON = b - 2b\cos(2\alpha)$. Равновесие стержня NE

$$\sum M_E = (b/2)S\cos(\theta) + Qb\sin(\alpha-\theta) = 0, \tag{17}$$

Так как $\alpha - \theta = \alpha - (3\alpha - \pi/2)$, то $\sin(\alpha-\theta) = \cos(2\alpha)$.

$$\sum Y_k = Y_E + Q\cos(\alpha) = 0. \tag{18}$$

Равновесие стержня узла E

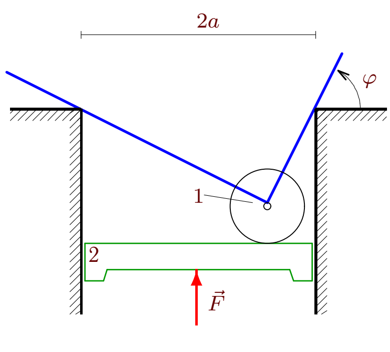
$$\sum Y_k = P - 2F\sin(\alpha) - 2Y_E = 0 \tag{19}$$

Решаем систему (16–19), получаем

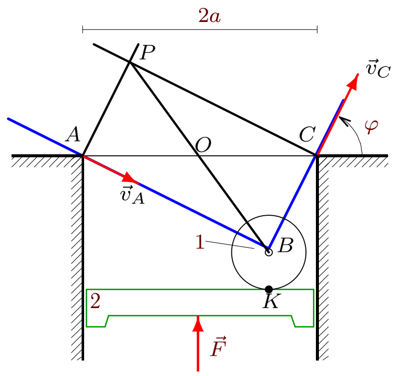
$$Q = -\frac{P\cos\alpha}{3\cos(2\alpha)},\quad Y_E = \frac{P\cos^2\alpha}{3\cos(2\alpha)}.$$

и ответ (15).

Задача 6. Невесомый уголок, составленный из двух жестко соединенных взаимно перпендикулярных стержней, опирается на гладкие опоры одной высоты. Расстояние между опорами равно $2a$. Однородный диск, закрепленный на шарнире в угловой точке, катится по поверхности поршня, скользящего без сопротивления в вертикальных направляющих. Масса диска m_1 в два раза больше массы поршня m_2. К поршню приложена вертикальная сила $F = 9m_2g$. При $\varphi = \varphi_0$ система была в покое. Найти угловую скорость уголка при $\varphi = \varphi_1 > \varphi_0 > \pi/4$.**(8 баллов)**



Решение



Составим уравнение Лагранжа 2-го рода

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot\varphi} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q$$

Кинетическая энергия системы

$$T = \frac{m_1 v_B^2}{2} + \frac{J\omega_1^2}{2} + \frac{m_2 v_K^2}{2}$$

K — точка касания диска и поршня, $J = m_1 R^2/2$.

Составим граф $A \underset{\varphi-\pi/2}{\longrightarrow} B \underset{\varphi}{\longrightarrow} C$

Запишем уравнения

$$v_{Cx} = v_{Ax} - AB\dot\varphi\sin(\varphi - \pi/2) - BC\dot\varphi\sin(\varphi),$$

$$v_{Cy} = v_{Ay} + AB\dot\varphi\cos(\varphi - \pi/2) + BC\dot\varphi\cos(\varphi).$$

Очевидно,

$$BC = 2a\cos\varphi,\ AB = 2a\sin\varphi,$$

$$v_{Cx} = v_C\cos\varphi,\ v_{Cy} = v_C\sin\varphi,$$

$$v_{Ax} = v_A\sin\varphi,\ v_{Ay} = -v_A\cos\varphi$$

Отсюда получаем

$$v_C\cos\varphi = v_A\sin\varphi,$$

$$v_C\sin\varphi = -v_A\cos\varphi + 2a\dot\varphi.$$

Решаем систему уравнений и находим

$$v_A = 2a\dot\varphi\cos\varphi,\ v_C = 2a\dot\varphi\sin\varphi.$$

Эти же значения можно получить проще, используя МЦС уголка в точке P, тем более, что расстояния известны $PC = AB$, $PA = BC$. Скорость точки B можно легко посчитать, если ввести фиктивный центр, соединяющий центр окружности, по которой движется точка B, с точкой B. Радиус окружности a, угловая скорость фиктивного стержня $2\dot\varphi$. Получим

$$v_B = 2a\dot\varphi.$$

Найдем скорость точки B с помощью кинематического графа $A \underset{\varphi-\pi/2}{\longrightarrow} B$. Запишем уравнения

$$v_{Bx} = v_{Ax} - AB\dot\varphi\sin(\varphi - \pi/2) = a\dot\varphi\sin 2\varphi + a\dot\varphi\sin 2\varphi = 2a\dot\varphi\sin 2\varphi,$$

$$v_{By} = v_{Ay} + AB\dot\varphi\cos(\varphi - \pi/2) = -2a\dot\varphi\cos^2\varphi + 2a\dot\varphi\sin^2\varphi = -2a\dot\varphi\cos 2\varphi.$$

Получаем то же значение

$$v_B = \sqrt{v_{Bx}^2 + v_{By}^2} = 2a|\dot\varphi|.$$

Чтобы найти угловую скорость диска составим граф $K \xrightarrow[\pi/2]{} B$ Получим

$$v_{Bx} = v_{Kx} - R\omega_{1z}\sin(\pi/2) = 2a|\dot\varphi\sin 2\varphi|.$$

Отсюда при $v_{Kx} = 0$ найдем

$$\omega_{1z} = -(2a/R)\dot\varphi\sin 2\varphi.$$

Кинетическая энергия системы ($v_K = |v_{By}| = 2a|\dot\varphi\cos 2\varphi|$) имеет вид

$$T = \frac{m_1 v_B^2}{2} + \frac{J\omega_1^2}{2} + \frac{m_2 v_K^2}{2} = \frac{m_1 4a^2\dot\varphi^2}{2} + \frac{m_1 4a^2\dot\varphi^2\sin^2 2\varphi}{4} + \frac{m_2 4a^2\dot\varphi^2\cos^2 2\varphi}{2}.$$

По условию $m_1 = 2m_2$. Отсюда

$$T = 4m_2a^2\dot\varphi^2 + 2m_2a^2\dot\varphi^2 = 6m_2a^2\dot\varphi^2.$$

Обобщенная сила

$$Q = \frac{(-m_1g - m_2g + F)v_{By}}{\dot\varphi} = \frac{2a\dot\varphi\cos 2\varphi(2m_2g + m_2g - 9m_2g)}{\dot\varphi} = -12m_2ga\cos 2\varphi.$$

Уравнение Лагранжа дает

$$12m_2a^2\ddot\varphi = -12m_2ga\cos 2\varphi$$

или

$$a\ddot\varphi = -g\cos 2\varphi.$$

Так как $\omega = \dot\varphi$, то уравнение перепишем в виде $a\omega dw/d\varphi = -g\cos 2\varphi$ или $a\omega dw = -g\cos 2\varphi d\varphi$. Интегрируем

$$\int\limits_0^w a\omega dw = -g\int\limits_{\varphi_0}^{\varphi_1}\cos 2\varphi d\varphi$$

и получаем

$$a\omega^2/2 = -(1/2)\sin 2\varphi|_{\varphi_0}^{\varphi_1},$$

Ответ. $\omega = \sqrt{(g/a)(\sin 2\varphi_0 - \sin 2\varphi_1)}$.

Задача 7. Механическая система имеет s степеней свободы. В некоторый момент известны величины

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot q_i} = \alpha,\ \frac{\partial\dot T}{\partial\dot q_i} = \beta,$$

где T — кинетическая энергия системы, , $\dot T = dT/dt$, q_i — обобщенная координата, $\dot q_i = dq_i/dt$ — обобщенная скорость. Найти обобщенную силу Q_i в этот момент времени. **(9 баллов)**

Решение

$$T = T(q_i, \dot q_i, t),\ \ i = 1..s.$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot q_i} = \frac{\partial^2 T}{\partial\dot q_i\partial t} + \sum_{j=1}^{s}\frac{\partial^2 T}{\partial\dot q_i\partial q_j}\dot q_j + \sum_{j=1}^{s}\frac{\partial^2 T}{\partial\dot q_i\partial\dot q_j}\ddot q_j. \tag{20}$$

$$\dot{T} = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial T}{\partial q_j}\dot{q}_j + \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\ddot{q}_j + \frac{\partial T}{\partial t}. \tag{21}$$

Дифференцируем (21)

$$\frac{\partial \dot{T}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_i \partial t} + \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_i \partial q_j}\dot{q}_j + \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}\ddot{q}_j. \tag{22}$$

Из (20) и (22) следует

$$\frac{\partial \dot{T}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}. \tag{23}$$

Уравнение Лагранжа 2-го рода имеет вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i. \tag{24}$$

Складываем (23) и (25)

$$2\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = Q_i + \frac{\partial \dot{T}}{\partial \dot{q}_i}. \tag{25}$$

Получаем

$$Q_i = 2\alpha - \beta.$$

Всего $10 + 4 + 5 + 5 + 7 + 8 + 9 = 48$ баллов
Статика 14 баллов
Кинематика 10 баллов
Динамика 24 балла

Москва, МЭИ, 2010