НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ПЛАСТИЧЕСКИХ КОНСТРУКЦИЙ (ОБЗОР)

В. Д. Клюшников (Москва)

Развитие проблемы устойчивости конструкций за пределом упругости, как ни одной другой'проблемы для деформируемых твердых тел, насыщено драматическими и парадоксальными моментами. Надежды сменялись разочарованиями, одна трактовка явления выпучивания — другой. Грубо приближенные решения оказывались лучше точных, а простейшие и, как казалось, мало обоснованные теории пластичности становились предпочти тельными. Большая работа по развитию методов и отысканию решений сложных краевых задач в рамках опровергаемого впоследствии критерия оказывалась напрасной, а критика вновь выдвигаемых критериев часто приобретала эмоциональную окраску.

Только этим последним обстоятельством и можно, по-видимому, объяснить, что до сего времени не существует единой точки зрения по вопросу устойчивости упругопластических систем. Это, разумеется, ненормально и наносит определенный ущерб, особенно в становлении взглядов начинающих ученых, тем более, что сейчас имеется возможность описать выпучивание таких систем с единых позиций, естественным образом вытекающих из общемеханических проблем.

Именно эту цель и преследует настоящая статья. Опираясь на основополагающие работы данного направления, автор делает попытку показать эволюцию в подходе к проблеме устойчивости за пределом упругости и определить ее современное содержание. Поскольку при этом все внимание обращается на принципиальные вопросы, такие, как постановка задачи, обоснование критериев устойчивости и т. д., и почти не обсуждаются методы решения краевых задач, то отсутствуют и ссылки на работы такого характера.

1. ИСТОРИЯ ВОПРОСА

К тому моменту когда развитие техники потребовало поставить вопрос об определении критических нагрузок для конструкций, работающих за пределом упругости, теория устойчивости упругих систем в достаточной мере уже была разработана, и поскольку на первых этапах развития проблема упругопластической устойчивости многое заимствовала у теории упругой устойчивости, то нужно кратко остановиться на основных положениях последней.

В середине XVIII в. Эйлер показал, что прямой центрально-сжатый стержень при определенных значениях сжимающих сил наряду с прямолинейной может иметь и криволинейную (выпученную) форму равновесия. Можно было предвидеть, что наименьшая из таких сил — эйлерова критическая сила — определяет наблюдаемое выпучивание стержня, т.е. определяет момент, за которым прямолинейная форма равновесия становится неустойчивой.

Эффект потери устойчивости любой механической системы, нагружаемой некоторыми силами (силами основного состояния), состоит в появлении таких видов деформации (деформации выпучивания), которые не могут возникнуть без действия некоторой дополнительной системы сил (возмущающих сил). Естественно поэтому, что в основе определения устойчивости лежит концепция проб малыми дополнительными силами. Интуитивно ясно, что механическую систему нужно , признать неустойчивой, если при действии ничтожных дополнительных сил в ней возникнут ощутимые деформации выпучивания.

Классическое определение устойчивости исходит из указанного выше и состоит по существу в следующем. Состояние или движение механической системы является неустойчивым, если при действии как угодно малых возмущающих сил возникающее возмущение движения будет расходящимся от исходного состояния или движения. В противном случае состояние или движение системы считается устойчивым.

Прямые исследования возмущенных движений простейших упругих конструкций и многочисленные эксперименты под твердили, что эйлерова критическая сила действительно определяет границу устойчивых и неустойчивых исходных состояний и отвечает моменту выпучивания. Таким образом, если наряду с исходным невозмущенным состоянием существует равновесное возмущенное состояние, поддерживаемое теми же внешними силами, то соответствующее значение параметра нагрузок является критическим в том смысле, что оно разграничивает области устойчивых и неустойчивых состояний упругой системы.

Как выяснилось впоследствии [3, 37], критерий Эйлера является лишь достаточным, но не необходимым условием выпучивания. Так, если силы основного состояния меняют свое направление с изменением деформаций, то критерий Эйлера не выделяет какого-либо особого состояния и требуются дополнительные исследования. Однако если направление сил основного состояния не меняется или, как говорят, система подвержена действию “мертвой” нагрузки, то проблема выпучивания упругой системы полностью решается критерием Эйлера.

Принципиальная простота, логическая завершенность и достаточно широкая универсальность в приложении к упругим системам и были, по-видимому, теми причинами, по которым критерий Эйлера безоговорочно был перенесен на упругопластические системы, хотя специфическая особенность этих систем должна была потребовать некоторого уточнения критерия.

Если для упругих систем способ перехода из одного состояния в другое несуществен, то при необратимых пластических деформациях это не так. Свойства сравнимого с исходным выпученного состояния зависят от пути перехода. Поэтому формальное перенесение критерия Эйлера может привести к тривиальному выводу о неустойчивости упругопластических систем сразу после выхода в пластическую область. Ведь при необратимых деформациях всегда можно создать два деформированных состояния, равновесных с одними и теми же внешними силами. Следовательно, используя критерий Эйлера, нужно оговорить способ переходами естественно потребовать, чтобы такой переход совершался по множеству равновесных с внешними силами состояний.

Именно в такой трактовке критерия Эйлера впервые была решена Карманом [41, 42] задача о сжатии упругопластического стержня[1].

Как известно [29], равновесность изогнутой формы первоначально прямо-

[1]Первой работой по упругопластической устойчивости является исследование Энгессера [38], однако его результат содержал формальную ошибку.

го сжатого силой P стержня определяется системой уравнений

$$\int_F \sigma z dF + Pw = 0, \quad \int_F \sigma dF = P, \quad w(0) = w(l) = 0, \tag{1.1}$$

где σ — осевое напряжение, F — площадь поперечного сечения, z — координата, отсчитываемая в плоскости изгиба по нормали от линии центров тяжести сечения, w — прогиб, l – длина стержня. Исходное прямолинейное состояние стержня определяется уравнениями

$$\int_F \sigma^0 z dF = 0, \quad \int_F \sigma^0 dF = P, \quad w^0 = 0. \tag{1.2}$$

(Здесь и всюду в дальнейшем исходное состояние отмечается индексом 0.) Определение критических сил в смысле Эйлера состоит в определении тех значений P, при которых имеет место нетривиальное решение для разностей

$$\delta\sigma = \sigma - \sigma^0, \quad \delta w = w - w^0 = w, \tag{1.3}$$

находимых из очевидной системы уравнений

$$\int_F \delta\sigma z dF + P\delta w = 0, \quad \int_F \delta\sigma dF = 0, \quad \delta w(0) = \delta w(l) = 0. \tag{1.4}$$

Очевидно, что в условиях равновесного перехода второе уравнение может быть удовлетворено только в том случае, если приращение $\delta\sigma$ меняет знак в площади поперечного сечения, т. е. при таком переходе наряду с областями догрузки F_p обязательно должны возникать области разгрузки F_e, так что

$$\delta\sigma = \begin{cases} E\delta e \ \text{ в } \ F_e, \ \delta e \leq 0, \\ E'\delta e \ \text{ в } \ F_p, \ \delta e > 0, \end{cases} \tag{1.5}$$

где E и E' — упругий и касательный модули.

Поскольку для приращений $\delta\sigma$, так же как и для состояний деформирования, выполняется гипотеза плоских сечений

$$\delta e = \delta\varepsilon + z\delta w'', \tag{1.6}$$

где $\delta\varepsilon$ — приращение осевой деформации, а штрихами обозначено дифференцирование по координате вдоль стержня, то для определения границы $z = \xi$ раздела зон F_e и F_p служит уравнение

$$\delta\varepsilon + \xi\delta w'' = 0. \tag{1.7}$$

Техника определения критических значений P как собственных значений первого уравнения из системы (1.4) в данной задаче проста потому, что второе уравнение этой системы в силу соотношений (1.5) — (1.7) сводится к уравнению, содержащему лишь неизвестную ξ, модули E и E' и параметры геометрии сечения. Таким образом, для стержня постоянного сечения граница ξ не зависит от , что и позволяет легко найти критическую нагрузку

$$P^* = \frac{\pi^2 E^* I}{l^2}, \quad I = \int_F z^2 dF, \tag{1.8}$$

где через E^* обозначен приведенный модуль, зависящий от E, E' и формы сечения, причем

$$E \geq E^* \geq E'. \tag{1.9}$$

Постоянство по координатам системы распределения упругих и пластических зон, обнаруженное для стержня оказалось случаем, чрезвычайно редким. В более сложных системах, даже при однородном докритическом состоянии, очертания границы раздела оказываются весьма сложными и их определение, а значит и вычисление нагрузок могут быть только приближенными.

Среди прочих приближенных методов решения значительное распространение получил довольно грубый (в рамках критерия Эйлера) метод оценки критических нагрузок без учета зон разгрузок. По существу упругопластическая система заменялась нелинейно-упругой системой с той же связью напряжения — деформации, как и при активном пластическом процессе. Применительно к стержню это означает замену модуля E в первой строке соотношения (1.5) касательным модулем E' и, следовательно, замену модуля E^*, в формуле (1.8) модулем E'.

Полученная таким образом касательно-модульная нагрузка P' или ее аналоги для других упругопластических систем были, естественно, ниже, чем приведенно-модульные, определяемые строго по критерию Эйлера, и им приписывалась роль нижних оценок нагрузок выпучивания.

Может быть, такое отношение к касательно-модульным нагрузкам осталось бы и до настоящего времени, если бы не странное, как тогда казалось, обстоятельство, обнаруженное экспериментаторами. В подавляющем большинстве опытов по выпучиванию упругопластических систем[2] было установлено, что экспериментальные результаты располагаются между расчетными данными по приведенно-модульным и касательно- модульным нагрузкам, но лежат ближе к последним.

Как правило, в экспериментах по выпучиванию измерению подлежат значение результирующей силы и перемещение. В более детальном эксперименте Шенли [48] замерялись также деформации по поверхности стержня и было обнаружено, что при выпучивании прирост деформации со стороны вогнутости значительно превосходил уменьшение деформаций на. выпуклой стороне стержня, так что мгновенная ось относительно поворота сечения в процессе выпучивания плавно двигалась от кромки сечения с выпучивающейся стороны в противоположность требованию критерия Эйлера. Особенно же важным обстоятельством, впервые отмеченным Шенли, было то, что нарастание

[2]См., например, работы [44, 49, 51], а также книгу А. С. Вольмира [4].

прогибов коррелировалось с ростом сжимающей нагрузки; приостановка нагружения вела к консервации прогиба.

Используя эти данные, Шенли [36] попытался на примере идеализированного стержня получить теоретическую зависимость прогиба от прироста сжимающей силы, т. е. изучить послекритическую стадию выпучивания. Полученный им результат можно сформулировать так: при нагрузках, больших касательно-модульной, существует однопараметрическое множество кривых $(P - P^0) \sim w$, монотонно возрастающих и таких, что $w = 0$ при $P = P^0$. В области нагрузок, меньших касательно-модульной, таких кривых не существует.

Этот вполне строгий результат позволяет приписать касательно-модульной нагрузке P' уже особый смысл: это минимальная из нагрузок, начиная с которой $(P^0 = P')$ возможно изгибание стержня при росте внешней нагрузки.

К мысли о возможности выпучивания упругопластического стержня при продолжающемся нагружении независимо от Шенли, исходя из качественных соображений о "стесненном" изгибании сжатой консольной балки, пришел Ю. Н. Работнов. Анализ, проведенный им для более сложной модели стержня [25], привел к аналогичным результатам и, в частности, к заключению о критическом смысле касательно-модульной нагрузки.

Полученные, в этих работах результаты, как видно, имеют, с одной стороны, негативный характер: для упругопластического стержня критерий Эйлера не имеет силы, а с другой — указывают принципиальную возможность выделения некоторых других нагрузок, критических в ином, чем по Эйлеру, смысле. Эти результаты положили начало новому этапу в развитии теории устойчивости за пределом упругости, в котором наряду с продолжением работ старого направления начинаются исследования по реализации нового взгляда на выпучивание упругопластических систем как на процесс, развивающийся с ростом внешней нагрузки.

Однако на этом пути имелись существенные трудности. Прямое перенесение методов исследования послекритического поведения, которыми пользовались Шенли и Ю. Н. Работнов, на реальные упругопластические системы практически невозможно из-за огромных математических трудностей[3], и поэтому на первых порах реализация новых взглядов заключалась в перенесении на общий случай заключения о том, что при продолжающемся нагружении критическими силами, отвечающими началу выпучивания, являются касательно-модульные нагрузки. Поскольку же вычисление касательно-модульных нагрузок ведется без учета зон разгрузок, то, для того чтобы придать сделанному заключению видимость логического утверждения, часто приводился довод о том, что продолжающееся осевое нагружение так коррелировано с возникающими от выпучивания напряжениями, что зон разгрузок не возникает. Таким образом, возникла так называемая "концепция продолжающегося нагружения", которая в известной мере истолковывала исходные положения наоборот, В своей основе она содержала высказанное выше

[3]Некоторые частные задачи были исследованы таким путем А. Пфлюгером [46, 47] и Ю. Р. Лепиком [21, 22].

утверждение о компенсации разгрузки, а заключение о критическом смысле касательно-модульных нагрузок рассматривалось уже как вытекающий отсюда факт.

Как видно, даже по внешним признакам этот подход не схож с подходом Эйлера, и если последний основывался на решении задачи о бифуркации состояния и, по крайней мере для консервативных систем, определял границы устойчивых и неустойчивых состояний равновесия, то концепция продолжающегося нагружения, казалось, лежала в стороне от традиционных постановок задач механики и являлась лишь мнемоническим правилом вычисления критических нагрузок, ничем в общем случае теоретически не подтвержденным. Действительно, утверждение о том, что переход из исходного в выпученное состояние происходит без возникновения зон разгрузки (или другим заранее предписываемым образом), само по себе не дает возможности выделения каких бы то, ни было критических сил. Очевидно, что для замыкания задачи может-служить лишь условие равновесности выпученного состояния, но в рамках продолжающегося нагружения нужно учесть, что выпученное состояние равновесно не с теми силами, с которыми было равновесно исходное состояние, а с другими, хотя и мало, но нарощенными. Реализация этих условий в случае неоднородного докритического состояния даже для стержней [20] приводит к системе уравнений, содержащих приращения внешних сил несократимым образом; порядки малости этих сил и деформаций выпучивания одинаковы. Только в случае однородного докритического состояния указанная система уравнений вырождается в однородную, не содержащую приращений внешних сил и поэтому пригодную для непосредственного выделения критических сил как собственных значений. Эта система оказывается совпадающей с той, которая получается по критерию Эйлера при формальном пренебрежении зонами разгрузки, и, следовательно, действительно приводит к касательно-модульным нагрузкам.

Поскольку вплоть до последнего времени задачи о выпучивании упругопластических систем решались лишь для однородного докритического состояния, то отмеченная выше ограниченная действенность концепции продолжающегося нагружения как логически обоснованного на базе сопоставления свойств состояний при разных внешних нагрузках не бросалась в глаза. Заботило другое. Возможно ли выпучивание без разгрузки в произвольной упругопластической системе и можно ли оправдать критический смысл касательно-модульных нагрузок без априорного предположения о виде выпучивания. Наконец, вставал вопрос о том, в каком отношении находится новая концепция с общетеоретическими проблемами механики и, в частности, с теорией устойчивости.

Нужно сразу признать, что выпучивание как процесс даже в простейших упругопластических конструкциях сопровождается разгрузкой. Однако, отправляясь от данных эксперимента Шенли, можно надеяться, что зоны разгрузки в этом процессе плавно нарастают, так что в начальный момент выпучивания их объем равен нулю. Только в этом предельном смысле и надо понимать термин “компенсация”, использованный выше в связи с концепцией продолжающегося нагружения, и можно предвидеть, что сложные кинематические связи, наложенные на систему, сделают и такую компенсацию невозможной.

Однако основная слабость концепции продолжающегося нагружения состояла в том, что она в противоположность концепции Эйлера — Кармана не находила себе места в ряду традиционных проблем механики[4] и, что особенно важно, в теории устойчивости. Складывалось мнение, что новый подход не является (в противоположность старому) следствием общего подхода к устойчивости. Известны примеры, когда это признавали и сторонники нового подхода. Так, в работе [45] факт раздвоения траекторий деформирования, обнаруженный в указанных выше первых исследованиях по продолжающемуся нагружению, считается критерием устойчивости более предпочтительным, чем тот, который может быть основан на расширении общепринятого понятия устойчивости. Принося сомнительную пользу новому подходу, подобные высказывания открывали дорогу вольной трактовке критериев выпучивания и даже таким взглядам [33], когда допустимым принималось любое инженерное определение смысла критических сил.

Разрешить создавшуюся ситуацию могло лишь прямое исследование устойчивости упругопластических конструкций, основанное на анализе их возмущенных движений. Такой анализ, по-видимому, впервые был проведен в работах автора [11, 14] и, кроме всего прочего, послужил толчком к формулировке нового критерия устойчивости упругопластических конструкций.

[4]Определение критических сил на основе сравнения состояний, отвечающих состояниям с разными значениями внешних параметров, не принадлежащих к чисто бифуркационной проблеме, и таит в себе опасные подвохи. Попытки обосновать новый подход на базе некоторой модернизации проблемы бифуркации состояния предпринимались, и, в частности, автором [8]. Однако эти попытки по ряду причин нельзя признать удачными