ЛЕКЦИИ по курсу
“ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА”

Статика

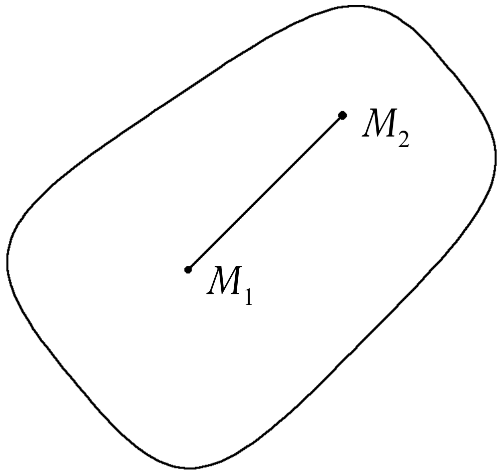
Теоретическая механика – наука об общих законах движения и равновесия тел.

В теоретической механике изучают не сами реальные тела, а их модели.

Основные модели:

1°. **Материальная точка** – тело малых размеров, обладающее *массой*.

2°. **Абсолютно твердое тело** (АТТ) – материальное тело, у которого расстояния между любыми двумя точками остаются постоянными, каким бы воздействиям это тело не подвергалось.



$$|M_1 M_2| = \text{const} .$$

Основоположники классической механики: Галилей, Ньютон, Эйлер, Лагранж .

Рекомендуемая литература

1. Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р. Курс теоретической механики. СПб.: Лань, 1998. 736 с.
2. Кирсанов М.Н. Решебник. Теоретическая механика. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. 384 с.

§ 1. Основные понятия и аксиомы статики

Начнем с определения статики.

Статика – раздел теоретической механики, в котором изучается равновесие материальных тел под действием приложенных сил.

Уже в самом этом определении мы встречаемся с нетривиальными понятиями силы и равновесия. Поэтому начнем с анализа основных, наиболее фундаментальных понятий механики.

1. Основные понятия механики

Начнем с первого из встретившихся нам понятий.

Равновесие тела – состояние, в котором все его точки находятся в покое относительно выбранной системы отсчета.

Понятие равновесия тела обладает весьма высокой степенью общности, но все-таки не является фундаментальным. Мы только что видели, что оно сводится к понятиям покоя и системы отсчета.

Займемся этими понятиями. Они тоже не являются фундаментальными (т.е. первичными) понятиями механики. Фундаментальные понятия механики мы сейчас перечислим.

Фундаментальные (неопределяемые) понятия механики: пространство, время, тело, масса, сила.

Эти понятия не могут быть выражены через какие-то другие. Смысл их выражается через аксиомы, характеризующие их свойства и отношения друг к другу. Аксиомы, как Вы знаете, являются исходными положениями теории; их истинность постулируется, а не доказывается средствами логического вывода.

Для того, чтобы дать определение системы отсчета, введем предварительно такое определение.

Геометрическая твердая среда – совокупность точек, расстояния между которыми остаются неизменными; заполняет все пространство.

Это, разумеется, чисто умозрительная конструкция. Однако и многие другие понятия в науке, если вдуматься, таковы. Они представляют собой идеализацию реальных объектов и явлений, иногда заходящую весьма далеко. Важно только, чтобы такая идеализация была плодотворной.

Если все же требуется наглядно представить себе геометрическую твердую среду, то можно вообразить, скажем, прозрачный блок льда. Представим – мысленно – что этот блок становится все больше и больше, пока не заполнит все пространство. При этом мы предполагаем, что он абсолютно проницаем для других тел, которые движутся внутри него как в пустоте.

Можно прийти к понятию геометрической твердой среды и иначе. Заметим, что ее определение очень похоже на определение абсолютно твердого тела; только добавляется требование, чтобы она заполняла собой все пространство. Отсюда вытекает такая интерпретация понятия геометрической твердой среды.

Пример. Рассмотрим выпуклое АТТ, и пусть O – внутренняя точка тела. Рассмотрим всевозможные отрезки, соединяющие точку O с границей тела. Тогда объединение всех отрезков совпадает с множеством точек тела.

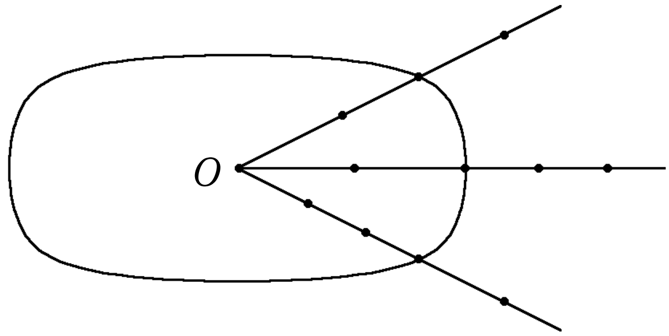
Объединение трактуется как в математике: точка принадлежит объединению отрезков, если она принадлежит хотя бы одному из них.

При этом каждая точка тела (кроме, разумеется, самой точки O) принадлежит ровно одному отрезку.

Если тело движется, то и отрезки движутся вместе с ним.

Выпуклость тела большой роли в нашем примере не играет. Она предполагается, чтобы сделать формулировки более краткими (ведь если тело не является выпуклым, то может случиться так, что не всякая точка наших отрезков будет принадлежать телу).

Продолжим теперь каждый отрезок до бесконечности: получим *луч*. Объединение всех лучей даст геометрическую твердую среду, *жестко связанную* с данным АТТ.



На самом деле эта конструкция является универсальной. В принципе всякую геометрическую твердую среду можно считать жестко связанной с некоторым абсолютно твердым телом (реальным или воображаемым).

Наглядно можно представить себе, что данное твердое тело намертво вмерзло в эту среду и движется вместе с ней.

Можно сказать и так:

Геометрическая твердая среда – это абсолютно твердое тело (реальное или воображаемое), от размеров и формы которого мы абстрагируемся.

Теперь – о системах отсчета.

Система отсчета (СО) – произвольная геометрическая твердая среда, по отношению к которой рассматривается движение точек и тел.

С учетом того, что мы знаем уже о геометрических твердых средах, можно считать, что всякая система отсчета связана с каким-либо твердым телом (реальным или воображаемым); такое тело обычно называют *отсчетным телом*.

Во многих задачах достаточно ограничиться введением только одной системы отсчета. Тогда под словами "точка движется" подразумевают, что ее положение относительно данной системы отсчета изменяется с течением времени. Если же ее положение относительно данной системы отсчета не меняется, то говорят просто: "точка покоится".

Само отсчетное тело и связанная с ним система отсчета предполагаются в этих рассуждениях неподвижными. Разумеется, отсчетное тело может совершать движение относительно какой-нибудь другой системы отсчета, но об этом сейчас речь не идет.

Чтобы упростить нашу терминологию, примем следующее соглашение.

Соглашение. Зафиксируем некоторую СО, которую будем называть **условно неподвижной** (у.н.СО). Будем говорить, что точка движется (или находится в покое), если она с течением времени изменяет (не изменяет) свое положение относительно у.н.СО.

Разумеется, тело мы называем покоящимся, если находятся в покое все его точки.

Словом “условно” как раз и выражают тот факт, что данная система отсчета полагается неподвижной именно в данной конкретной задаче, т.е. в рамках данного соглашения.

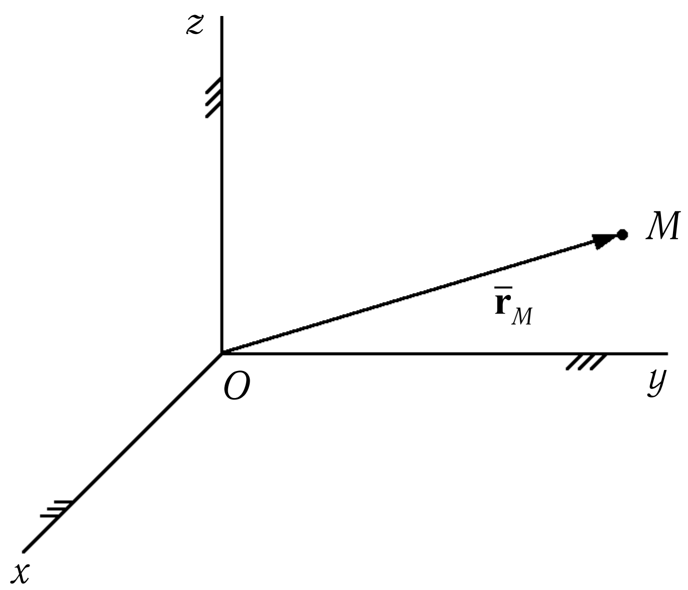
В большинстве задач механики считают, что у.н.СО связана с Землей.

Речь идет о задачах, с которыми мы обычно сталкиваемся в повседневной жизни. Но не всегда такой выбор условно неподвижной системы отсчета разумен. Например, при изучении движения планет или межпланетных зондов условно неподвижную систему отсчета связывают с неподвижными звездами.

Следует особо подчеркнуть, что бессмысленно говорить о движении, если не указано, по отношению к какой системе отсчета оно рассматривается. Вот пример: пусть человек стоит на железнодорожной платформе. Мы можем систему отсчета связать с платформой, а можем – с проходящим мимо нее поездом. Относительно первой системы отсчета человек покоится, относительно второй – движется.

Неподвижная система координат – система декартовых координат, связанная с у.н.СО.

Можно было бы сказать “условно неподвижная”; однако это не обязательно, поскольку мы уже сделали эту оговорку относительно самой системы отсчета.



Здесь изображена некоторая точка M, положение которой задается радиус-вектором $\bar{\mathbf{r}}$ относительно начала неподвижной системы координат. Если точка движется, то ее радиус-вектор меняется; если она находится в покое, то он остается постоянным.

Штриховкой в механике помечают неподвижные объекты; значит, на рисунке показано, что оси системы координат неподвижны.

Назначение системы координат – в том, что с ее помощью можно перейти от векторной записи формул к скалярной. Например, положение нашей точки M можно охарактеризовать тремя ее координатами x_M, y_M, z_M (которые, разумеется, будут одновременно являться проекциями ее радиус-вектора на оси x, y, z).

Теперь с понятием равновесия мы вполне разобрались. Вернемся к тому перечню фундаментальных понятий, который мы уже приводили. Напомню этот перечень: пространство, время, тело, масса, сила.

Сейчас мы ограничимся лишь краткой характеристикой этих понятий. Вообще же, мы не раз на протяжении всего курса будем обращаться к тем или иным свойствам основных понятий механики.

Пространство в классической механике – трехмерно и евклидово.

Последнее означает, что пространство удовлетворяет всем аксиомам евклидовой геометрии. Из этого вытекают два следующих положения, имеющие особенно большое значение для механики.

Следствие. Пространство обладает свойствами:

1) однородности (все точки его равноправны);

2) изотропности (все направления в нем равноправны).

Эти хорошо известные свойства евклидова пространства находят многообразные применения в механике.

Например, если бы мы переместили все тела механической системы в какую-либо другую область пространства, то ход механических процессов остался бы тем же самым. Надо оговорить при этом, что если на течение данных процессов влияют какие-либо внешние факторы, то и они должны быть воспроизведены в новой ситуации.

Заметим, впрочем, что с понятием пространства мы – как правило – напрямую работать не будем: все рассмотрения будут вестись в выбранной системе отсчета. Однако перечисленные только что характерные свойства пространства можно считать также и характерными свойствами системы отсчета.

В динамике, правда, мы увидим, что в полной мере эти свойства справедливы только для так называемых инерциальных систем отсчета.

Теперь – о времени. В математическом плане это – тоже евклидово пространство, только одномерное. А в качестве его основных свойств мы отметим такие:

Время в классической механике:

1) абсолютно (имеет одинаковый смысл во всех СО);

2) однородно (все моменты времени равноправны);

3) анизотропно (моменты времени упорядочены).

Из этого списка свойств видно, что не только размерностью время отличается от пространства. Например, для всякого конкретного события можно однозначно сказать, когда оно произошло; но говорить о том, что некоторая точка покоится (т.е. в разные моменты времени занимает одно и то же положение), бессмысленно, если не указана определенная система отсчета.

Анизотропность же времени означает, что в нем имеется привилегированное направление: от прошлого к будущему. Есть немало механических явлений (например, движение тела в сопротивляющейся среде), протекание которых носит существенно необратимый характер.

Таким образом, понятия "до" и "после" по отношению к моментам времени имеют вполне определенный характер.

Впрочем, в статике время если и упоминается, то только в связи с определением состояния покоя.

Вот о телах мы будем говорить постоянно. Заметим, что в механике рассматриваются не просто тела (которые изучают в геометрии), а материальные тела. Запишем, что понимается под понятием "материальное тело".

Материальное тело – множество $\mathscr{B}$ точек, которые *непрерывным* образом заполняют некоторую ограниченную область в пространстве и на котором задана скалярная функция γ – **плотность**.

Данная функция обычно предполагается непрерывной (или, по крайней мере, кусочно непрерывной).

Через плотность определяется масса. Делается это так.

Выделим в теле $\mathscr{B}$ **элементарный материальный объем** – множество точек, занимающих достаточно малый объем $\mathrm{d}V$ в пространстве. Тогда произведение $\mathrm{d}m = \gamma\,\mathrm{d}V$ есть **масса** элементарного материального объема.

Оговорка "достаточно малый" применительно к объему $\mathrm{d}V$ в пространстве делается для того, чтобы можно было пренебрегать различием в значениях плотности γ для разных точек элементарного материального объема.

Фактически – что и отражено в обозначениях – мы работаем с дифференциалами массы и объема. В этом случае, как это и принято в математическим анализе, можно пренебрегать бесконечно малыми величинами более высокого порядка малости.

Обратите внимание: элементарный материальный объем и объем $\mathrm{d}V$ в пространстве – это разные вещи. Элементарный материальный объем образован точками тела, а объем $\mathrm{d}V$ – точками условно неподвижной системы отсчета. Если тело движется, то в разные моменты времени элементарному материальному объему соответствуют разные объемы в пространстве.

Аксиома массы:

1) для материальной точки $m = \mathrm{const}$ и $m > 0$;

2) для элементарного материального объема $\mathrm{d}m \equiv \gamma\,\mathrm{d}V = \mathrm{const}$ и $\mathrm{d}m > 0$.

Это – важный для механики факт, ведь в общем случае деформируемого материального тела и плотность, и объем $\mathrm{d}V$ могут меняться с течением времени.

Видно также, что плотность γ почти всюду положительна.

А теперь можно дать определение массы материального тела.

Масса материального тела $\mathscr{B}$ – положительная величина

$$m = \int\limits_V \gamma \, \mathrm{d}V .$$

Интеграл здесь фактически – тройной, но в математике все чаще используют один символ интеграла, а записанная под ним область интегрирования как раз и определяет, в каком смысле понимается этот интеграл.

Если для системы материальных точек масса ее равна сумме масс точек, то для материального тела масса выражается как интеграл от плотности.

Из этого не следует, что масса тела – это понятие производное, а не основное. Просто мы сейчас вынуждены обходиться достаточно элементарными математическими средствами (впрочем, так же поступал и сам Ньютон).

В более обстоятельных современных курсах механики именно масса, а не плотность, вводится как первичное понятие. В них масса трактуется как *мера* множества, и данная трактовка является единообразной – и для систем материальных точек, и для материальных тел. Но для понимания всего этого нужно владеть основами теории меры Лебега и, соответственно, более общим понятием интеграла – а Вы в курсе высшей математики это не изучали.

Впрочем, в статике нас масса будет интересовать лишь постольку, поскольку некоторые силы, действующие на тела, зависят от массы этих тел (например, таковы силы тяжести). Отметим также, что определения даны для любых материальных тел; но нас будут интересовать лишь абсолютно твердые тела.

Остается пятое из фундаментальных понятий механики – понятие силы. Но ему мы посвятим отдельный пункт.

2. Сила и ее характеристики

В механике понятие силы используется для описания механического взаимодействия.

Механическое взаимодействие – один из видов взаимодействия материи, способный вызвать изменение механического движения материальных тел.

Сила характеризует количественную сторону механического взаимодействия. Таким образом, когда говорят, что на тело действуют силы, то это значит, что на него воздействуют другие тела (или физические поля).

Не всегда, впрочем, сила действительно приводит к изменению движению тела; такое изменение может блокироваться действием других сил.

С учетом сказанного запишем:

Сила (ньютонова) – мера механического воздействия на некоторое материальное тело со стороны другого материального тела (или физического поля); она характеризует интенсивность и направление этого воздействия.

Это, разумеется, не определение, а лишь пояснение к понятию силы. Поскольку понятие силы – фундаментальное, то его точный смысл раскрывается в аксиомах механики.

Пока же мы отметим вот что. Оговорка "ньютонова" сделана потому, что в динамике мы встретимся с другими величинами, также именуемыми силами, которые, однако, не являются мерами механического взаимодействия.

В этом же семестре речь будет идти именно о ньютоновых силах, и мы для краткости будем называть их просто силами.

Далее, под словом "мера" в механике и в физике понимается физическая величина, которая служит для *количественного* описания какого-либо свойства или отношения. В данном случае речь идет об описании именно *механического* взаимодействия (а бывают еще, как Вы знаете, и другие взаимодействия – тепловые, химические и прочие).

В физике элементарных частиц выделяют четыре *фундаментальных* взаимодействия: сильное, электромагнитное, слабое и гравитационное. Эти четыре взаимодействия лежат в основе всех наблюдаемых явлений – относящихся как к механике, так и к другим разделам естествознания.

Однако в макромире фундаментальные взаимодействия проявляются, как правило, опосредованно, и нам приходится иметь дело со значительно более широким перечнем взаимодействий (уже не обязательно фундаментальных).

Если говорить о механических взаимодействиях, то речь может идти о силах различного происхождения.

Примеры сил: силы тяжести, силы упругости, архимедовы силы, силы сопротивления среды и др.

В большинстве задач механики, впрочем, физическая природа тех или иных сил обычно интереса не представляет.

Еще мы, поясняя понятие силы, говорили об интенсивности и направлении воздействия. Это означает, что сила является векторной величиной. Именно, это – вектор, приложенный к определенной точке материального тела.

Поэтому можно говорить о таких характеристиках силы.

Сила характеризуется:

1) величиной (модулем);
2) направлением;
3) точкой приложения.

Модуль и направление однозначно определяют вектор силы.

<u>*Вектор силы*</u>: $\overline{\mathbf{F}} = F\,\overline{\mathbf{e}}_F$, где $F \equiv \left|\overline{\mathbf{F}}\right|$ – модуль силы, $\overline{\mathbf{e}}_F$ – единичный вектор направления силы.

Обратите внимание: над буквами, обозначающими векторы, пишут черту. Это обязательно надо делать. В механике очень часто в формулах одновременно фигурируют и векторы, и их модули (как в формуле, которую мы только что записали). Если черту не писать, формула теряет смысл.

К сожалению, на экзамене нередко приходится встречаться с полным пренебрежением к этому правилу. В лучшем случае экзаменатор в этой ситуации поступит так: вздохнет и попросит студента быстренько проставить обозначения векторов в тексте ответа на поставленный вопрос. Если студент не сумеет правильно проставить обозначения – это первый шаг на пути к получению “двойки”.

Поэтому, пожалуйста, не игнорируйте в своих конспектах черту, если она написана на доске.

При помощи записанной формулы найти значение вектора силы, если даны его модуль и направление, совсем нетрудно. Обратная операция также не вызывает трудностей:

$$\left|\overline{\mathbf{F}}\right| = \sqrt{\left(\overline{\mathbf{F}}, \overline{\mathbf{F}}\right)}\,, \qquad \overline{\mathbf{e}}_F = \frac{\overline{\mathbf{F}}}{\left|\overline{\mathbf{F}}\right|}\,.$$

Круглые скобки с запятой в середине обозначают скалярное произведение векторов (запятая при этом разделяет сомножители). Обратите внимание: во многих книгах скалярное произведение обозначается иначе – точкой между векторами, причем точку обычно можно опустить.

Но мы будем придерживаться именно таких обозначений (они тоже достаточно распространены). Помимо всего прочего, они позволяют избежать путаницы (ведь скалярное произведение векторов нужно отличать от обычного произведения двух скаляров).

Напомню формулы для вычисления скалярного произведения.

Скалярное произведение:

$$\left(\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}\right) = \left|\overline{\mathbf{a}}\right| \cdot \left|\overline{\mathbf{b}}\right| \cdot \cos\left(\widehat{\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}}\right);$$

$$\left(\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}\right) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z\,.$$

Здесь x, y, z – оси какой-либо декартовой системы координат.

Первой из этих формул пользоваться для вычисления модуля силы бессмысленно, поскольку модуля силы мы как раз и не знаем. А если известны проекции вектора силы на оси x, y, z, то вторая формула Вам вполне может пригодиться.

Если посмотреть на то, что мы к настоящему моменту времени записали в этом пункте, то все это Вам уже хорошо известно из курсов физики и линейной алгебры (возможно, за исключением некоторых обозначений). Это и естественно:

начинать изложение нового материала лучше с краткого повторения уже пройденного.

Разумеется, Вам известно из курса физики, что сила (и ее модуль) – это размерные величины. Напомню, в каких единицах измеряется сила.

Единица для F в СИ: ньютон $\left(\text{Н} = \dfrac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}^2}\right)$.

Объясняется последнее выражение для единицы силы очень просто: сила, равная одному ньютону, обеспечивает материальной точке с массой в один килограмм (в соответствии со II законом Ньютона) ускорение, равное одному метру на секунду в квадрате.

Но II закон Ньютона относится уже к динамике, а мы сейчас занимаемся статикой. Итак, что еще мы можем сказать о векторе силы?

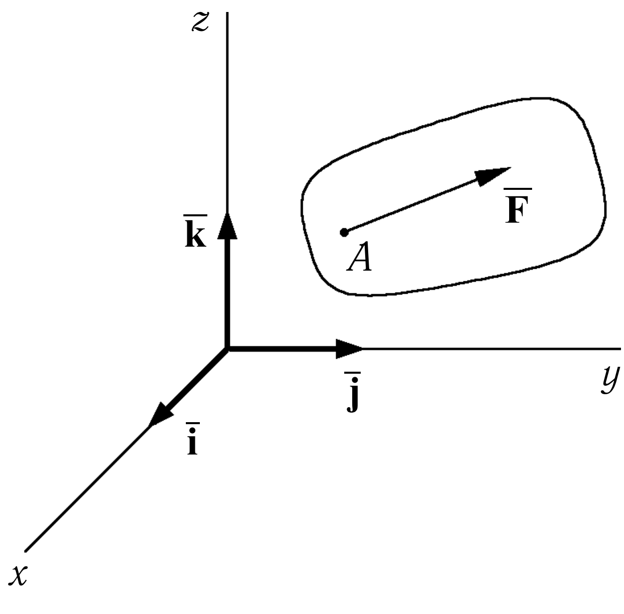
Стандартная операция в векторной алгебре – это вычисление проекции вектора на какую-либо ось. Для вектора силы имеем:

Проекция силы $\overline{\mathbf{F}}$ на ось l с единичным вектором $\overline{\mathbf{e}}$:

$$F_l = \left(\overline{\mathbf{e}}, \overline{\mathbf{F}}\right).$$

Вектор $\overline{\mathbf{e}}$ здесь, разумеется, вовсе не обязан совпадать с вектором $\overline{\mathbf{e}}_F$, о котором мы говорили ранее. Именно, мы представляли вектор силы в виде произведения его модуля на единичный вектор направления силы.

Но вектор силы можно задать также его проекциями на оси декартовой системы координат.



Имеем:

$$\overline{\mathbf{F}} = F_x\,\overline{\mathbf{i}} + F_y\,\overline{\mathbf{j}} + F_z\,\overline{\mathbf{k}},$$

где $\overline{\mathbf{i}}$, $\overline{\mathbf{j}}$, $\overline{\mathbf{k}}$ – единичные векторы осей x, y, z, а F_x, F_y, F_z – проекции силы $\overline{\mathbf{F}}$ на эти оси.

На практике эти проекции часто оказывается удобным вычислять через скалярные произведения. Именно:

$$F_x = (\bar{\mathbf{i}}, \overline{\mathbf{F}}) = \underbrace{|\bar{\mathbf{i}}|}_{1} \cdot |\overline{\mathbf{F}}| \cdot \cos\alpha \equiv F\cos\alpha,$$

$$F_y = (\bar{\mathbf{j}}, \overline{\mathbf{F}}) = F\cos\beta,$$

$$F_z = (\bar{\mathbf{k}}, \overline{\mathbf{F}}) = F\cos\gamma;$$

здесь α, β, γ – углы вектора $\overline{\mathbf{F}}$ с осями координат.

Эти формулы, разумеется, применяют, когда известны вектор силы и ее направление. Если же даны именно проекции вектора силы на декартовы оси, то можно найти модуль силы и все три угла.

Если даны F_x, F_y, F_z, то:

$$F = \sqrt{F_x^{\,2} + F_y^{\,2} + F_z^{\,2}}, \quad \alpha = \arccos\frac{F_x}{F}, \text{ и т.д.}$$

Пока мы говорили только о векторе силы. Но понятие силы не сводится к понятию ее вектора. Важна еще и точка приложения силы: ведь если тот же по величине и направлению вектор силы приложить в другой точке тела, то его движение может измениться.

В геометрии принята следующая терминология.

Свободный вектор (или просто вектор) – вектор, характеризуемый только модулем и направлением.

Связанный вектор – вектор, характеризуемый еще и точкой приложения.

Иногда используют такие обозначения.

Через $\bar{\mathbf{u}}.A$ обозначается связанный вектор, получаемый, если свободный вектор $\bar{\mathbf{u}}$ приложить в точке A.

Обратите внимание: здесь точка пишется не в середине строки (как при умножении чисел), а на ее нижней линии.

Таким образом, можно сделать следующий вывод.

Итак, сила – связанный вектор (полное обозначение: $\overline{\mathbf{F}}.A$).

Там, где нам потребуется подчеркнуть наличие у силы определенной точки приложения, мы будем пользоваться именно этим полным обозначением. Там, где точка приложения силы будет заранее оговорена, мы будем применять сокращенное обозначение, обозначая силу просто $\overline{\mathbf{F}}$ (т.е. так же, как и вектор силы).

О точке приложения силы нужно сказать следующее:

Если сила действует на материальную точку, то точкой приложения служит сама эта точка.

Если сила действует на материальное тело, то точкой приложения служит точка тела (она может меняться с течением времени).

В общем случае точка приложения силы не может лежать вне тела. Если тело – абсолютно твердое, то данное ограничение можно снять; но об этом мы будем говорить позже.

Возникает вопрос: а как можно на практике задать точку приложения силы? Любую точку можно задать, например, ее радиус-вектором, проведенным из некоторого полюса.

Полюс – произвольно выделенная точка (положение которой обычно предполагается известным).

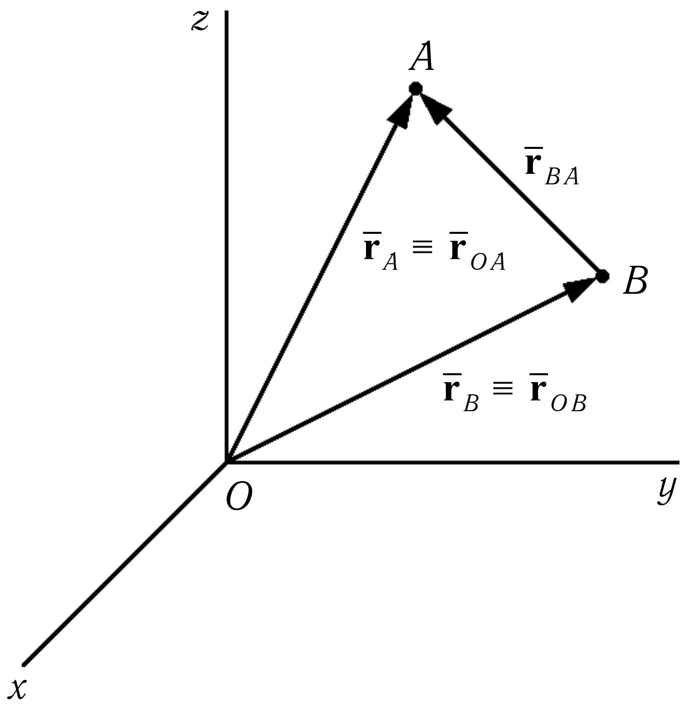
Раз здесь говорится "обычно", то текст в скобках Вы вполне можете игнорировать. Часто бывает так: взяли некоторую точку и объявили ее полюсом (и будет она с этого времени считаться таковым).

Но для задания положения точки приложения силы нам как раз нужно знать положение полюса. Можно – но не обязательно – принять за полюс начало системы координат.

Радиус-вектор точки A относительно полюса B – вектор, проведенный из B в A: $\bar{\mathbf{r}}_{BA} = \overline{BA}$.

Употребляют оба обозначения, но первое предпочтительнее: вектор обозначается одной буквой, а буква "r" напоминает, что речь идет именно о радиус-векторе.

Порядок следования индексов здесь существенен. Впрочем, когда полюсом служит начало системы координат, первый индекс обычно опускают.



Из рисунка очевидно соотношение:

$$\bar{\mathbf{r}}_A = \bar{\mathbf{r}}_B + \bar{\mathbf{r}}_{BA} .$$

Оно нам пригодится, когда мы будем сталкиваться с необходимостью сменить полюс.

Сами радиус-векторы можно задавать по-разному – например, через их проекции на декартовы оси координат. В случае, когда полюсом служит начало координат, эти проекции совпадают с координатами точки.

$$r_{Ax} = x_A\,, \quad r_{Ay} = y_A\,, \quad r_{Az} = z_A\,;$$
$$r_{BAx} = x_A - x_B\,, \quad \text{и т.д.}$$

Последние равенства следуют из записанного нами векторного соотношения.

Таким образом, приходим к выводу:

Силу $\overline{\mathbf{F}}.A$ можно задать двумя векторами ($\overline{\mathbf{F}}$ и $\overline{\mathbf{r}}_A$) или шестью скалярами (F_x, F_y, F_z, x_A, y_A, z_A).

Это – удобно, и так поступают часто. Но задать силу можно также иным способом, который мы рассмотрим в следующем пункте.

3. Момент силы относительно точки

Хотя сила однозначно характеризуется своими вектором и точкой приложения, важную роль в механике играет еще одна ее характеристика.

Момент силы относительно полюса B – вектор, приложенный в точке B и равный векторному произведению радиус-вектора точки приложения силы на вектор силы.

Радиус-вектор здесь, естественно, вычисляется именно относительно полюса B.

Таким образом:

$$\boxed{\overline{\mathbf{M}}_B(\overline{\mathbf{F}}.A) = [\,\overline{\mathbf{r}}_{BA}\,,\,\overline{\mathbf{F}}\,]}\;.$$

Обратите внимание, что векторное произведение мы здесь будем обозначать квадратными скобками с запятой в середине. Часто используется иное обозначение операции векторного умножения – при помощи косого креста между сомножителями.

Заметьте еще, что порядок написания сомножителей существенен: ведь Вы знаете, что при перемене мест сомножителей векторное произведение меняет знак.

В определении было указано, что момент силы приложен в полюсе. Значит, это – связанный вектор.

Мы не будем указывать его точку приложения справа от символа, обозначающего момент, поскольку она уже указана в виде индекса.

Рассмотрим некоторые свойства момента силы.

Свойства момента силы

Утверждения, которые сейчас будут сформулированы, немедленно вытекают из известных Вам свойств векторного умножения.

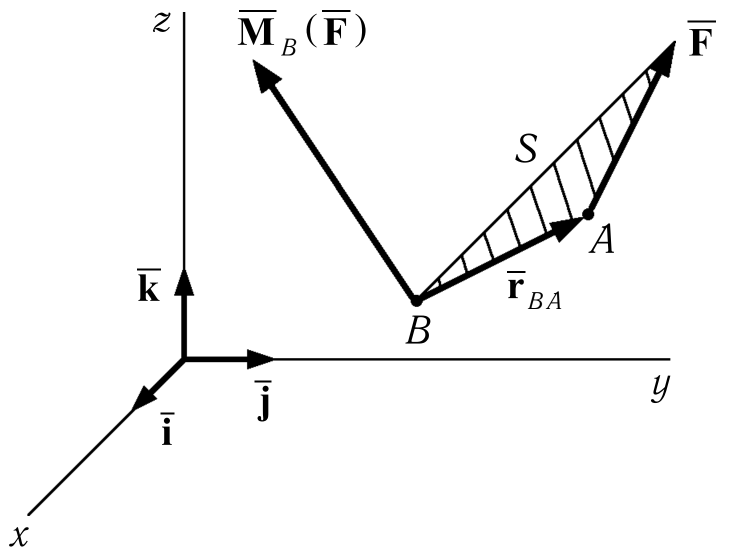
$1^\circ.\ \ \overline{\mathbf{M}}_B(\overline{\mathbf{F}}) \perp \overline{\mathbf{F}}\,, \quad \overline{\mathbf{M}}_B(\overline{\mathbf{F}}) \perp \overline{\mathbf{r}}_{BA}\,.$

Действительно, векторное произведение ортогонально каждому из сомножителей.

$2^\circ.\ \ \left|\,\overline{\mathbf{M}}_B(\overline{\mathbf{F}})\,\right| \;=\; \left|\,\overline{\mathbf{r}}_{BA}\right| \cdot \left|\,\overline{\mathbf{F}}\,\right| \cdot \sin(\,\overline{\mathbf{r}}_{BA}\,\widehat{,\ }\overline{\mathbf{F}}\,)\,.$

По аналогичной формуле вычисляется модуль векторного произведения любых двух векторов.

Сделаем рисунок, на котором эти свойства момента силы будут проиллюстрированы.



Обратите внимание на треугольник, образованный векторами $\overline{\mathbf{r}}_{BA}$ и $\overline{\mathbf{F}}$ (на рисунке он заштрихован, а его площадь обозначена через S). Рассматривая его, можно дать первым двум свойствам момента силы иную, весьма наглядную формулировку.

Модуль вектора $\overline{\mathbf{M}}_B(\overline{\mathbf{F}})$ равен удвоенной площади треугольника, образованного векторами $\overline{\mathbf{r}}_{BA}$ и $\overline{\mathbf{F}}$, а сам этот вектор ортогонален плоскости данного треугольника.

Действительно, модуль векторного произведения равен площади параллелограмма, построенного на сомножителях; а площадь данного треугольника равна половине площади этого параллелограмма.

Далее, если вектор ортогонален двум непараллельным векторам, лежащим в одной плоскости, то он ортогонален самой этой плоскости.

Таким образом, в соответствии с этими свойствами мы знаем, чему равен модуль вектора $\overline{\mathbf{M}}_B(\overline{\mathbf{F}})$, а также знаем, что он ортогонален плоскости треугольника. Позволяют ли эти сведения однозначно изобразить данный вектор на чертеже? Нет: надо еще знать, в какую именно сторону от плоскости треугольника она направлен. Векторная алгебра дает ответ и на этот вопрос.

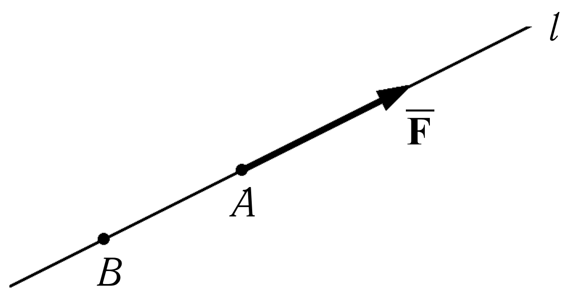
3°. Вектор $\overline{\mathbf{M}}_B(\overline{\mathbf{F}})$ направлен в ту сторону, откуда кратчайший поворот от $\overline{\mathbf{r}}_{BA}$ к $\overline{\mathbf{F}}$ виден происходящим против хода часовой стрелки.

То есть:

$\overline{\mathbf{r}}_{BA}$, $\overline{\mathbf{F}}$, $\overline{\mathbf{M}}_B(\overline{\mathbf{F}})$ образуют *правую* тройку векторов.

Строго говоря, все наши рассуждения относятся к случаю, когда треугольник не вырождается в отрезок или точку. Но в случае такого вырождения векторное произведение обращается в ноль.

Это – очень важное утверждение, и его полезно записать, аккуратно сформулировав. Поясним рассматриваемую ситуацию рисунком.



Прямая l, на которой лежит сила, носит особое название.

Линия действия силы – прямая, проходящая в направлении силы через точку ее приложения.

А теперь сформулируем очередное свойство момента силы.

4°. $\overline{\mathbf{M}}_B(\overline{\mathbf{F}}.A) = 0 \quad \Leftrightarrow$ полюс B лежит на линии действия силы.

При решении задач нередко возникает вопрос о наиболее целесообразном выборе полюса. Обычно его выбирают так, чтобы обратить в ноль один или несколько моментов *неизвестных* сил (чем больше, тем лучше).

С учетом свойства 4° ясно, как это сделать: полюс должен лежать на линии действия неизвестной силы.

Вспомним еще одно свойство векторного произведения.

Линейность векторного произведения:

$$[\,\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}} + \overline{\mathbf{c}}\,] = [\,\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}\,] + [\,\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{c}}\,]\,;$$

$$[\,\overline{\mathbf{a}}, k\overline{\mathbf{b}}\,] = k\,[\,\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}\,]\,.$$

Отсюда вытекает такое свойство момента силы:

5°. $\overline{\mathbf{M}}_B(\overline{\mathbf{F}}+\overline{\mathbf{G}}) = \overline{\mathbf{M}}_B(\overline{\mathbf{F}}) + \overline{\mathbf{M}}_B(\overline{\mathbf{G}})$, если силы $\overline{\mathbf{F}}$ и $\overline{\mathbf{G}}$ приложены в *одной* точке;

$$\overline{\mathbf{M}}_B(k\overline{\mathbf{F}}) = k\,\overline{\mathbf{M}}_B(\overline{\mathbf{F}}).$$

Первое равенство позволяет вычислять момент суммы двух сил. Заметим, что если силы (или любые связанные векторы) приложены к разным точкам, то их *складывать нельзя* (без ограничений можно складывать только свободные векторы).

Второе равенство утверждает: если силу увеличить в k раз, то и ее момент увеличится в k раз (предполагается, что точка приложения силы не меняется).

Вывод: переход от силы к ее моменту – линейная операция.

Рассмотренные нами пять свойств момента силы весьма часто используются при решении задач статики. А реальное значение понятия момента силы полностью раскрывается уже в динамике.

Забегая вперед, отметим:

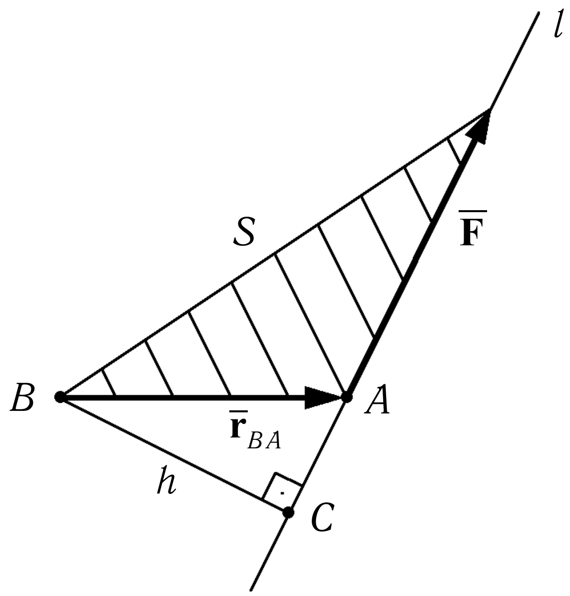
Момент силы характеризует *вращательный эффект* силы.

Действительно, если закрепить какое-либо тело в полюсе и приложить к нему силу, линия действия которой не проходит через полюс, то сила будет стремиться повернуть тело вокруг полюса. При этом направление оси поворота определяется направлением момента силы, а количественный эффект действия силы будет тем сильнее, чем больше момент по модулю.

Вычислять модуль момента можно по формуле, которая нам известна как свойство 2° момента силы (т.е. как произведение модуля радиус-вектора точки приложения на модуль вектора силы и на синус угла между этими векторами). Данное произведение мы интерпретировали как удвоенную площадь некоторого треугольника.

Однако этой формуле можно, используя понятие линии действия силы, придать и несколько иной вид.

Опустим перпендикуляр из полюса B на линию действия силы. Длина h этого перпендикуляра называется **плечом силы** относительно полюса B.



$$|BC| = l\ .$$

А теперь рассуждаем так.

По свойству 2°,

$$\left|\, \overline{\mathbf{M}}_B(\overline{\mathbf{F}}) \,\right| = 2S = 2\cdot\frac{1}{2}Fh = Fh\ .$$

Здесь мы воспользовались тем, что площадь треугольника можно вычислить как половину произведения основания на высоту. В нашем случае длина основания численно равна модулю силы, а высота равна плечу силы.

Из этой формулы сразу видно, в каких единицах измеряется момент силы.

Единица для момента силы в СИ: ньютон-метр (Н·м).

Действительно, в записанной формуле первый сомножитель измеряется в ньютонах, а второй – в метрах.

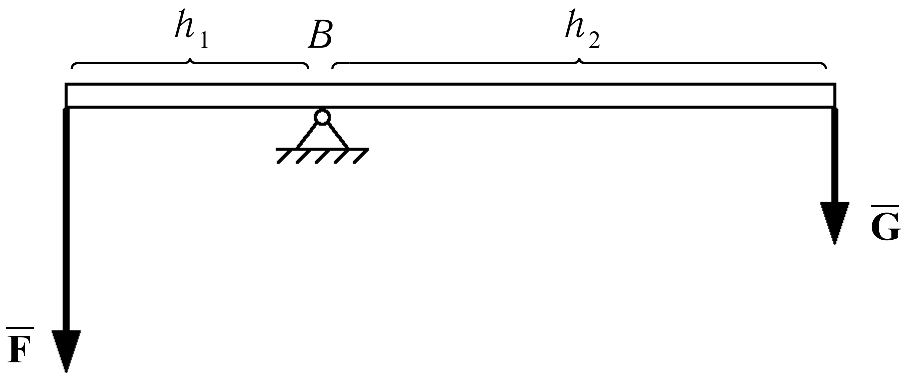
Таким образом, плечо силы – важная характеристика силы. Определение плеча силы мы уже записали, но часто удобнее пользоваться несколько иной – эквивалентной – его формой.

Плечо силы – кратчайшее расстояние от полюса до линии действия силы.

В самом деле, это расстояние как раз и равняется длине перпендикуляра, опущенного из полюса на линию действия силы.

Понятие плеча силы, между прочим, появилось в механике намного раньше понятия момента силы. Возникло понятие плеча в связи с задачей о равновесии рычага.

Рычаг:



Решение этой задачи Вам знакомо еще из школы, а умели ее решать древнегреческие ученые (вероятно, уже Архит Тарентский). В качестве сил здесь обычно выступают веса двух грузов.

Условия равновесия прямого невесомого рычага (механика Древней Греции):

$$\frac{F}{G} = \frac{h_2}{h_1} .$$

Иными словами, при равновесии отношение весов обратно отношению плеч. Примерно так выражались и древнегреческие механики, но они ограничивались лишь словесными формулировками.

Иная форма (механика средневековья):

$$F h_1 = G h_2 .$$

Здесь мы воспользовались тем, что произведение крайних членов пропорции равно произведению ее средних членов. В этой формуле мы без труда узнаем равенство моментов двух сил (точнее, их модулей).

Указанное свойство пропорции древние греки знали, но говорить о равенстве произведений сил на соответствующие плечи они не могли: в те времена не было принято перемножать величины разной размерности.

Подобная формулировка условий равновесия рычага появляется лишь в средние века; тогда же постепенно и возникает понятие момента силы (сначала в скалярной, а потом и в векторной форме).

Кстати, несколько слов о происхождении термина "момент силы".

"Момент" – от латинского слова momentum в значении "влияние".

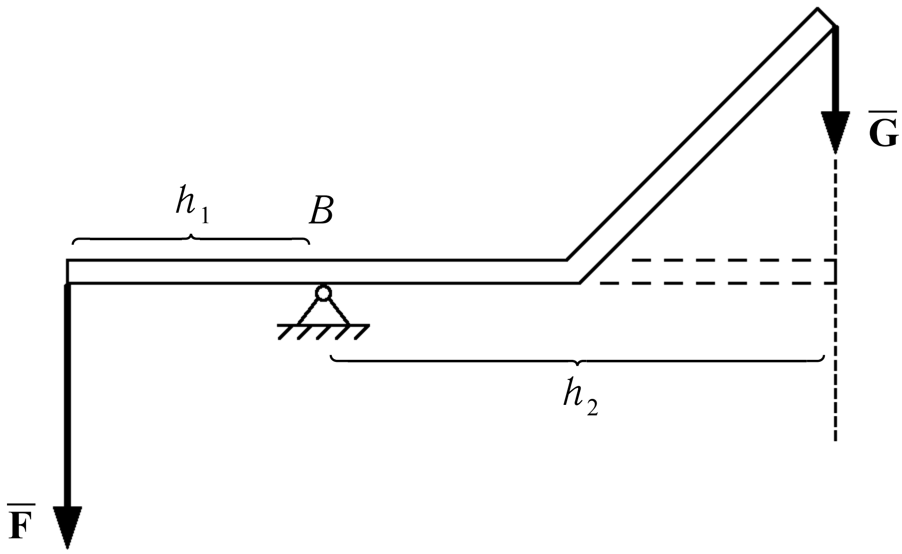
А вообще это слово латинского языка имеет удивительно много значений. В "Латинско-русском словаре" И.Х.Дворецкого (1986 г.) указано 13 различных значений!

Среди них есть значение "мгновение" (мы говорим сейчас: "момент времени"), значение "обстоятельство" (мы говорим: "отметим важный момент в таком-то деле")... Когда мы пользуемся термином "момент силы", то речь идет именно о *влиянии* силы на вращение тела, т.е. об ее вращательном эффекте.

Что касается задачи о равновесии рычага, то для древних греков "плечо" – это именно плечо рычага, т.е. длина участка рычага от его конца до точки опоры. Общее понятие плеча силы появилось позднее, и историкам механики известно, когда это произошло.

Общее понятие "плеча силы" ввел Ибн Корра в задаче о ломаном рычаге.

Ломаный рычаг:



Ибн Корра утверждает, что действие груза будет таким же, как если бы рычаг имел форму, показанную штриховой линией. В его рассуждениях фактически вводится строгое определение плеча как кратчайшего расстояния от полюса до линии действия силы.

Ибн Корра, Сабит (836 – 901)[1] – сирийский математик и механик.

Обсудим теперь такой вопрос. Пусть момент силы и ее вектор известны, а точка приложения – нет. Можно ли найти радиус-вектор точки приложения силы?

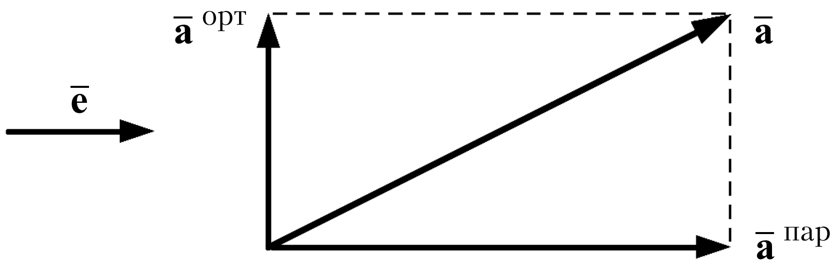
4. Вычисление радиус-вектора точки приложения силы

Прежде чем ответить на поставленный вопрос, решим предварительно одну задачу из векторной алгебры.

---

[1] Полное имя: Абу-л-Хасан Сабит Ибн Корра ас-Саби ал-Харрани. Он родился в сирийском городе Харран, а жил и работал в Багдаде, во времена халифа Харуна ар-Рашида. Ибн Корра прекрасно знал труды древнегреческих ученых, многие из которых дошли до нас только в переводах Ибн Корры на арабский язык. В нескольких трактатах по математике и механике он изложил собственные научные результаты.

<u>Задача.</u> Разложить в трехмерном пространстве вектор $\bar{\mathbf{a}}$ на две составляющие – параллельную и ортогональную заданному единичному вектору $\bar{\mathbf{e}}$.



Графическое решение данной задачи показано на рисунке; но наша цель сейчас – получить явные формулы для обеих составляющих вектора $\bar{\mathbf{a}}$.

<u>Решение.</u> Запишем равенство $\bar{\mathbf{a}} = \bar{\mathbf{a}}^{\text{пар}} + \bar{\mathbf{a}}^{\text{орт}}$ в виде

$$(*) \qquad \bar{\mathbf{a}} = \bar{\mathbf{b}} + \bar{\mathbf{c}} \,,$$

где $\bar{\mathbf{b}} \equiv \bar{\mathbf{a}}^{\text{пар}} \parallel \bar{\mathbf{e}}$, $\bar{\mathbf{c}} \equiv \bar{\mathbf{a}}^{\text{орт}} \perp \bar{\mathbf{e}}$.

С параллельной составляющей – все просто.

Проекция вектора $\bar{\mathbf{a}}$ на направление вектора $\bar{\mathbf{e}}$ равна $(\bar{\mathbf{e}}, \bar{\mathbf{a}})$, так что

$$\bar{\mathbf{b}} = (\bar{\mathbf{e}}, \bar{\mathbf{a}})\, \bar{\mathbf{e}} \,.$$

Чтобы найти ортогональную составляющую, воспользуемся специально выбранной декартовой системой координат, а потом представим результат в форме, которая от выбора системы координат уже не зависит.

Отметим сначала одно – известное Вам – свойство единичных векторов декартовой системы координат.

Для единичных векторов $\bar{\mathbf{i}}, \bar{\mathbf{j}}, \bar{\mathbf{k}}$ декартовой системы xyz справедливы соотношения:

$$[\,\bar{\mathbf{i}}, \bar{\mathbf{j}}\,] = \bar{\mathbf{k}} \,, \qquad [\,\bar{\mathbf{j}}, \bar{\mathbf{k}}\,] = \bar{\mathbf{i}} \,, \qquad [\,\bar{\mathbf{k}}, \bar{\mathbf{i}}\,] = \bar{\mathbf{j}} \,.$$

Все эти три формулы получаются друг из друга циклической заменой векторов. Если же в векторных произведениях поменять сомножители местами, то в правых частях появится знак “минус”.

Теперь, учитывая, что вектор $\bar{\mathbf{c}}$ ортогонален вектору $\bar{\mathbf{e}}$, рассуждаем следующим образом.

Пусть разложение $(*)$ получено. Выберем систему координат так, чтобы:

$$\bar{\mathbf{i}} = \bar{\mathbf{e}} \,, \qquad \bar{\mathbf{j}} = \frac{\bar{\mathbf{c}}}{c} \,, \qquad \bar{\mathbf{k}} = [\,\bar{\mathbf{i}}, \bar{\mathbf{j}}\,]$$

(если $\bar{\mathbf{c}} = 0$, примем за $\bar{\mathbf{j}}$ произвольный единичный вектор, ортогональный $\bar{\mathbf{e}}$).

Вычислим векторное произведение векторов $\bar{\mathbf{e}}$ и $\bar{\mathbf{a}}$.

$$[\,\bar{\mathbf{e}},\underbrace{\bar{\mathbf{a}}}_{\bar{\mathbf{b}}+\bar{\mathbf{c}}}\,] \;=\; \underbrace{[\,\bar{\mathbf{e}},\bar{\mathbf{b}}\,]}_{0} + [\,\bar{\mathbf{e}},\bar{\mathbf{c}}\,] \;=\; [\,\bar{\mathbf{i}},\, c\,\bar{\mathbf{j}}\,] \;=\; c\,[\,\bar{\mathbf{i}},\bar{\mathbf{j}}\,] \;=\; c\,\bar{\mathbf{k}}\;.$$

Теперь вновь умножим полученный результат на вектор $\bar{\mathbf{e}}$.

$$[\,\bar{\mathbf{e}},[\,\bar{\mathbf{e}},\bar{\mathbf{a}}\,]\,] \;=\; [\,\bar{\mathbf{i}},\, c\,\bar{\mathbf{k}}\,] \;=\; c\,[\,\bar{\mathbf{i}},\bar{\mathbf{k}}\,] \;=\; -c\,\bar{\mathbf{j}} \;=\; -\bar{\mathbf{c}}\;.$$

Итак, мы фактически получили выражение для вектора $\bar{\mathbf{c}}$. Чтобы избавиться от знака “минус”, поменяем сомножители в произведении $[\,\bar{\mathbf{e}},\bar{\mathbf{a}}\,]$ местами.

Ответ:

$$(**)\qquad \boxed{\;\bar{\mathbf{a}} \;=\; (\bar{\mathbf{e}},\bar{\mathbf{a}})\,\bar{\mathbf{e}} + [\,\bar{\mathbf{e}},[\,\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{e}}\,]\,]\;}\;.$$

Это – полезная формула, которая нам пригодится еще не раз. Запоминается она достаточно легко (надо только следить за тем, как расставлены скобки).

Теперь вернемся к исходной механической задаче: как найти радиус-вектор точки приложения силы, если известны вектор силы и ее момент?

Пусть заданы полюс B и векторы $\bar{\mathbf{F}}$ и $\bar{\mathbf{M}}_B(\bar{\mathbf{F}}) \equiv [\,\bar{\mathbf{r}}_{BA},\bar{\mathbf{F}}\,]$; $\bar{\mathbf{M}}_B(\bar{\mathbf{F}}) \perp \bar{\mathbf{F}}$.

Ясно, что если оба заданных вектора не ортогональны друг другу, то поставленная задача решения не имеет. Буквой A мы здесь обозначили искомую точку приложения силы; вектор $\bar{\mathbf{r}}_{BA}$ нам и требуется сейчас найти.

Одно ограничение на вектор силы мы наложим сразу же.

Считаем, что $\bar{\mathbf{F}} \neq 0$ (иначе точка A может быть любой).

Разумеется, если вектор силы равен нулю, то и момент силы должен также равняться нулю. Тогда условия задачи выполняются при любом выборе точки приложения силы.

Если сила не равна нулю, то введем в рассмотрение единичный вектор направления силы.

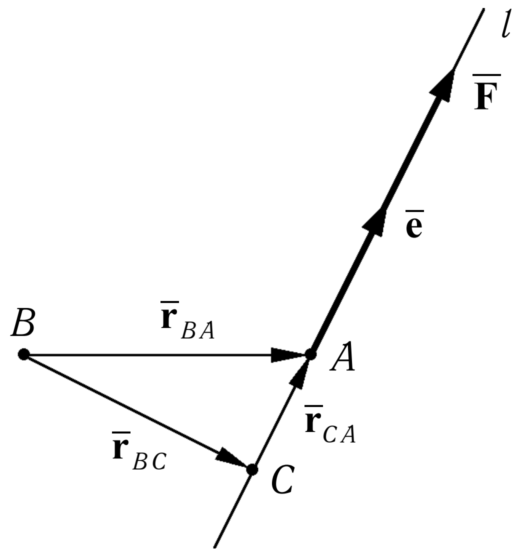
Обозначим $\bar{\mathbf{e}} = \dfrac{\bar{\mathbf{F}}}{F}$.

Для простоты обозначений индекса “F” при букве $\bar{\mathbf{e}}$ мы сейчас не пишем.

Теперь рассуждаем так.

Разложим искомый вектор $\bar{\mathbf{r}}_{BA}$ на параллельную и ортогональную составляющие:

$$\bar{\mathbf{r}}_{BA} \;=\; \bar{\mathbf{r}}_{CA} + \bar{\mathbf{r}}_{BC}\;.$$



Здесь точка C – основание перпендикуляра, опущенного из полюса на линию действия силы.

Заметим, что

$$\overline{\mathbf{M}}_B(\overline{\mathbf{F}}) = [\,\overline{\mathbf{r}}_{BA}, \overline{\mathbf{F}}\,] = \overset{0}{\cancel{[\,\overline{\mathbf{r}}_{CA}, \overline{\mathbf{F}}\,]}} + [\,\overline{\mathbf{r}}_{BC}, \overline{\mathbf{F}}\,]\,.$$

Результаты этих выкладок можно сформулировать так.

Замечание. Момент силы не зависит от того, где именно на линии действия силы находится точка приложения.

Разумеется, от расположения самой линии действия в пространстве момент силы зависит.

Впрочем, этим результатом мы сможем воспользоваться в будущем, а пока мы радиус-векторов точек C и A не знаем.

Чтобы найти их, применим уже известную нам формулу.

В силу (**) на с.22 :

$$\overline{\mathbf{r}}_{BA} = (\overline{\mathbf{e}}, \overline{\mathbf{r}}_{BA})\,\overline{\mathbf{e}} + [\,\overline{\mathbf{e}}, [\,\overline{\mathbf{r}}_{BA}, \overline{\mathbf{e}}\,]] =$$

$$= \frac{(\overline{\mathbf{F}}, \overline{\mathbf{r}}_{BA})\,\overline{\mathbf{F}}}{F^2} + \frac{[\,\overline{\mathbf{F}}, [\,\overline{\mathbf{r}}_{BA}, \overline{\mathbf{F}}\,]]}{F^2}\,.$$

В векторном произведении $[\,\overline{\mathbf{r}}_{BA}, \overline{\mathbf{F}}\,]$ мы без труда узнаем момент силы $\overline{\mathbf{F}}$ относительно полюса B, который задан.

Но в записанной формуле фигурирует еще скалярное произведение вектора силы на радиус-вектор точки ее приложения. Данное произведение также может рассматриваться как одна из характеристик силы и носит специальное название.

Вириал силы относительно полюса B – скалярное произведение радиус-вектора точки приложения силы на вектор силы:

$$V_B(\overline{\mathbf{F}}.A) = (\overline{\mathbf{r}}_{BA}, \overline{\mathbf{F}})\,.$$

Формально данное определение напоминает определение момента силы относительно полюса, только вместо векторного произведения используется скалярное. Результатом при этом, разумеется, служит уже не вектор, а скаляр.

Понятие вириала силы ввел Клаузиус в 1870 г.

Кла́узиус, Рудольф Юлиус Эммануэль (1822 – 1888) – немецкий физик.

Это – один из крупнейших физиков XIX века. Основные его работы относятся к термодинамике, одним из создателей которой он стал. Именно Клаузиус сформулировал второе начало термодинамики и ввел понятие энтропии.

Заметим, что

$$V_B(\overline{\mathbf{F}}) \;=\; (\overline{\mathbf{r}}_{BA}, \overline{\mathbf{F}}) \;=\; (\overline{\mathbf{r}}_{CA}, \overline{\mathbf{F}}) + \cancelto{0}{(\overline{\mathbf{r}}_{BC}, \overline{\mathbf{F}})}\,.$$

Иначе говоря, вириал силы определяется только параллельной составляющей радиус-вектора точки приложения, т.е. положением этой точки на линии действия силы.

Делаем теперь следующий вывод.

Вывод: если известны вектор силы $(\overline{\mathbf{F}} \neq 0)$, ее момент и вириал относительного заданного полюса B, то радиус-вектор точки A приложения силы определяется однозначно:

$$\boxed{\;\overline{\mathbf{r}}_{BA} \;=\; \frac{V_B(\overline{\mathbf{F}})\,\overline{\mathbf{F}}}{(\overline{\mathbf{F}}, \overline{\mathbf{F}})} + \frac{[\,\overline{\mathbf{F}},\, \overline{\mathbf{M}}_B(\overline{\mathbf{F}})\,]}{(\overline{\mathbf{F}}, \overline{\mathbf{F}})}\;}\;.$$

Квадрат модуля силы мы здесь заменили скалярным квадратом вектора силы. На практике такая форма записи используется несколько чаще.

При запоминании данной формулы следует обратить внимание на порядок следования сомножителей векторного произведения.

Напомню еще, что первое слагаемое здесь служит параллельной составляющей радиус-вектора точки A, а второе – ортогональной составляющей (по отношению к направлению вектора $\overline{\mathbf{F}}$).

Заметим теперь, что в исходной постановке сформулированная нами задача однозначного решения не имеет. Если известны *только* вектор силы и ее момент, то мы *не можем* найти точку приложения силы: требуется для этого знать еще и значение вириала силы.

Однако и без знания вириала мы можем определить не так уж мало. Действительно:

Формула

$$\overline{\mathbf{r}}_{BC} \;=\; \frac{[\,\overline{\mathbf{F}},\, \overline{\mathbf{M}}_B(\overline{\mathbf{F}})\,]}{(\overline{\mathbf{F}}, \overline{\mathbf{F}})}$$

определяет положение ближайшей к полюсу B точки на линии действия силы; при этом $\left|\overline{\mathbf{r}}_{BC}\right| = h$.

Отсюда:

$$x_C = x_B + r_{BC_x}, \qquad y_C = y_B + r_{BC_y}, \qquad z_C = z_B + r_{BC_z}.$$

Нетрудно найти и всю линию действия. В самом деле:

Так как вектор $\overline{\mathbf{F}}$ служит направляющим вектором линии действия, получаем ее *канонические уравнения*:

$$\frac{x - x_C}{F_x} = \frac{y - y_C}{F_y} = \frac{z - z_C}{F_z}.$$

В аналитической геометрии это – один из наиболее популярных способов задания прямой; здесь x, y, z – текущие координаты точки, лежащей на прямой.

Другой способ – задавать прямую ее параметрическими уравнениями. Для линии действия мы сейчас без труда можем записать и их.

Параметрические уравнения линии действия:

$$x = x_C + F_x t, \qquad y = y_C + F_y t, \qquad z = z_C + F_z t$$

(t – параметр).

Этот скалярный параметр изменяется от $-\infty$ до $+\infty$; его конкретное значение определяет положение текущей точки. Вообще-то, в нашем случае параметр t оказывается размерным; но никаких практических неудобств это не доставляет.

В векторной форме:

$$\overline{\mathbf{r}} = \underbrace{\overline{\mathbf{r}}_C}_{\overline{\mathbf{r}}_B + \overline{\mathbf{r}}_{BC}} + t\,\overline{\mathbf{F}}.$$

Но для точки A

$$t_A \overline{\mathbf{F}} = \overline{\mathbf{r}}_{CA} \equiv \frac{V_B(\overline{\mathbf{F}})\,\overline{\mathbf{F}}}{(\overline{\mathbf{F}}, \overline{\mathbf{F}})};$$

отсюда

$$t_A = \frac{V_B(\overline{\mathbf{F}})}{(\overline{\mathbf{F}}, \overline{\mathbf{F}})}.$$

Мы сейчас выяснили, как связаны параметр точки приложения силы и вириал силы. Они оказались пропорциональными.

5. Момент силы относительно оси

В этом пункте будет введено еще одно – достаточно важное – понятие статики.

Начнем мы, однако, с вычисления проекций момента силы на оси декартовой системы координат. При этом будем считать – для простоты – что полюсом служит начало системы координат.

Пусть $\bar{\mathbf{i}}$, $\bar{\mathbf{j}}$, $\bar{\mathbf{k}}$ – единичные векторы декартовой системы координат $Oxyz$, а $\overline{\mathbf{F}}.A$ – сила.

Мы будем сейчас предполагать, что и проекции вектора силы, и координаты точки приложения силы известны.

Имеем:

$$\overline{\mathbf{F}} = F_x\,\bar{\mathbf{i}} + F_y\,\bar{\mathbf{j}} + F_z\,\bar{\mathbf{k}}\ ,$$

$$\bar{\mathbf{r}}_A \equiv \bar{\mathbf{r}}_{OA} = x\,\bar{\mathbf{i}} + y\,\bar{\mathbf{j}} + z\,\bar{\mathbf{k}}\ .$$

Эти формулы мы уже записывали ранее; для простоты записи индекс "A" при координатах точки A сейчас опущен.

Теперь вычисляем момент силы относительно полюса O как векторное произведение.

$$\overline{\mathbf{M}}_O(\overline{\mathbf{F}}) \equiv [\,\bar{\mathbf{r}}, \overline{\mathbf{F}}\,] = \begin{vmatrix} \bar{\mathbf{i}} & \bar{\mathbf{j}} & \bar{\mathbf{k}} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} =$$

$$= (\,yF_z - zF_y\,)\,\bar{\mathbf{i}} + (\,zF_x - xF_z\,)\,\bar{\mathbf{j}} + (\,xF_y - yF_x\,)\,\bar{\mathbf{k}}\ .$$

Коэффициентами при $\bar{\mathbf{i}}$, $\bar{\mathbf{j}}$, $\bar{\mathbf{k}}$ служат проекции момента силы на оси системы координат $Oxyz$. Поэтому получаем искомые формулы:

$$M_{Ox}(\overline{\mathbf{F}}) = y\,F_z - z\,F_y\ ,$$

$$M_{Oy}(\overline{\mathbf{F}}) = z\,F_x - x\,F_z\ ,$$

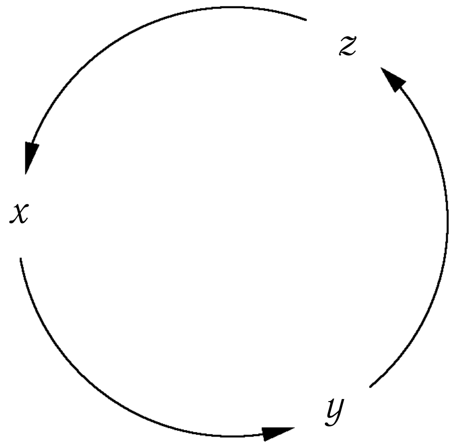
$$M_{Oz}(\overline{\mathbf{F}}) = x\,F_y - y\,F_x\ .$$

Как можно запомнить полученные формулы?

Если проекции вектора $\overline{\mathbf{F}}$ обозначать не F_x, F_y, F_z, а X, Y, Z, то последняя формула принимает вид:

$$(*) \qquad \boxed{M_{Oz}(\overline{\mathbf{F}}) = x\,Y - y\,X}\ .$$

Эта формула легко запоминается, если читать буквы, записанные в правой части, по-русски. В вузовском фольклоре она известна как "формула ХУ минус УХ". Остальные формулы специально запоминать нет нужды: они получаются друг из друга циклической перестановкой букв x, y, z.



С подобного рода циклической перестановкой мы часто сталкиваемся, когда речь заходит о координатной записи векторных произведений. Вспомните: в предыдущем пункте мы уже подвергали циклической перестановке векторы $\bar{\mathbf{i}}$, $\bar{\mathbf{j}}$, $\bar{\mathbf{k}}$, когда говорили об их попарных векторных произведениях.

Формула $(*)$ принадлежит Пуансо (1803 г.).

Пуансо́, Луи (1777 – 1859) – французский механик, в трудах которого оформилась геометрическая статика.

Геометрическая статика – это как раз та статика, которую Вы изучаете в данном семестре. Вы уже видели, что некоторые законы статики были сформулированы очень давно; но систематическое построение статики на основе четко сформулированных аксиом было сделано именно Пуансо в его трактате "Элементы статики", изданном в 1803 году. С его результатами мы встретимся еще не раз.

Существует еще и аналитическая статика – раздел аналитической механики. Она возникла позднее, но относительно законченные формы приобрела несколько ранее, чем статика геометрическая.

Итак, статику в вузах сейчас излагают, в основном следуя Пуансо. Что изменилось с его времен? Последовательно применяется векторная символика, а в эпоху Пуансо само слово "вектор" было еще неизвестно.

Впрочем, Пуансо и его современники прекрасно обходились без него, пользуясь терминами "направленный отрезок" и "геометрическое количество". Вот только выкладки у них из-за отсутствия удобного математического формализма нередко оказывались более громоздкими, чем в современных учебниках.

Предупреждаем: не коверкайте фамилию Пуансо, добавляя "н" на конце (получите "пуансон" – рабочую деталь штампа). Помните: фамилия Пуансо оканчивается на букву … "т": Poinsot.

Но вернемся к формуле $(*)$. Заметим следующий факт.

В правую часть формулы $(*)$ не входит координата z. Поэтому ее значение не изменяется при сдвиге начала координат вдоль оси Oz.

В самом деле, при таком сдвиге изменится только координата z, а координаты x и y не изменятся.

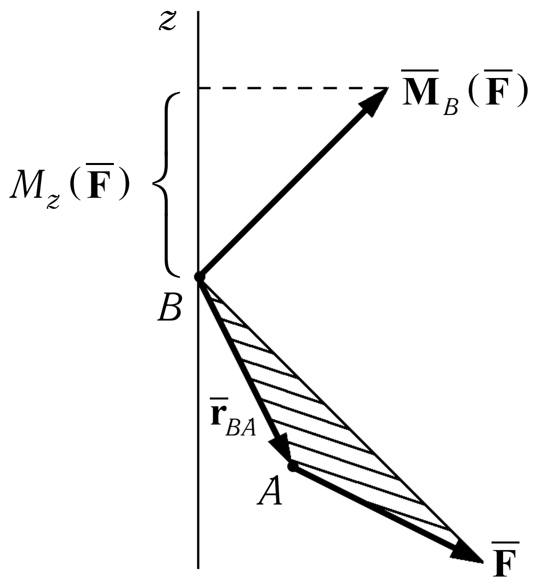
Вывод: проекция момента силы на ось не изменяется при сдвиге полюса вдоль этой оси.

Здесь мы говорим уже не об оси Oz, а о произвольной оси: ясно, что произвольно выбранную ось в пространстве можно принять за ось Oz некоторой декартовой системы координат.

Это оправдывает введение следующего определения.

Момент силы относительно оси – скалярная величина, равная проекции на эту ось момента силы относительно точки, лежащей на данной оси.

Мы только что видели, что от конкретного выбора упомянутой точки ничего не меняется. Поэтому и в обозначении момента силы относительно оси можно эту точку не указывать.



$$M_z(\overline{\mathbf{F}}) = M_{Bz}(\overline{\mathbf{F}})$$

Аналитический способ вычисления момента силы относительно оси мы уже рассмотрели. Рассмотрим другой – геометрический – способ такого вычисления.

Формулирую соответствующий рецепт.

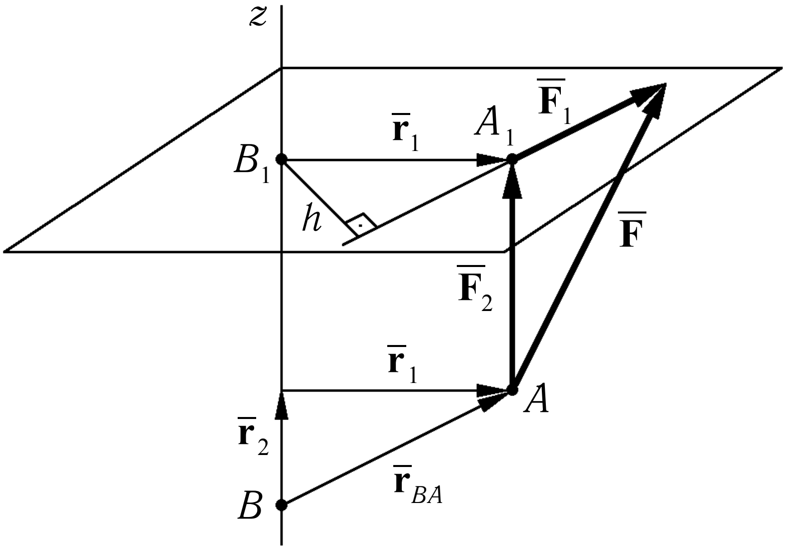
Геометрический способ вычисления $M_z(\overline{\mathbf{F}})$:

1) спроектировать вектор $\overline{\mathbf{F}}$ и точку A на плоскость, ортогональную оси;

2) умножить модуль проекции силы на плечо этой проекции;

3) приписать произведению знак “+”, если с конца оси кратчайший поворот от $\overline{\mathbf{r}}_{BA}$ до $\overline{\mathbf{F}}$ виден происходящим против хода часовой стрелки, а иначе – знак “–”.

Обоснуем данный рецепт.



$$\overline{\mathbf{M}}_B(\overline{\mathbf{F}}.A) = [\,\overline{\mathbf{r}}_{BA}, \overline{\mathbf{F}}\,] = [\,\overline{\mathbf{r}}_1 + \overline{\mathbf{r}}_2, \overline{\mathbf{F}}_1 + \overline{\mathbf{F}}_2\,] =$$

$$= \underbrace{[\,\overline{\mathbf{r}}_1, \overline{\mathbf{F}}_1\,]}_{\parallel z} + \underbrace{[\,\overline{\mathbf{r}}_1, \overline{\mathbf{F}}_2\,]}_{\perp \overline{\mathbf{F}}_2\text{, т.е. } \perp z} + \underbrace{[\,\overline{\mathbf{r}}_2, \overline{\mathbf{F}}_1\,]}_{\perp \overline{\mathbf{r}}_2\text{, т.е. } \perp z} + \cancelto{0}{[\,\overline{\mathbf{r}}_2, \overline{\mathbf{F}}_2\,]}\,.$$

Таким образом, при вычислении проекции момента силы на ось z надо учитывать только первое слагаемое. А оно равно моменту силы $\overline{\mathbf{F}}_1$ относительно точки B_1.

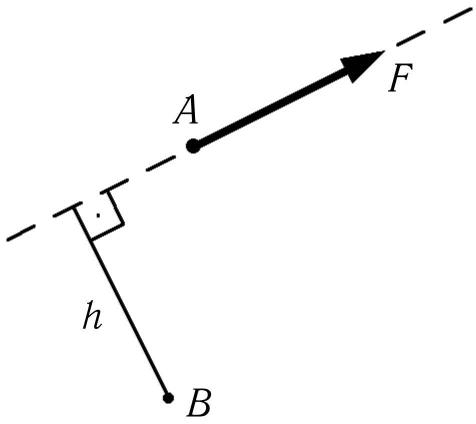
$$M_{Bz}(\overline{\mathbf{F}}.A) = M_{B_1 z}(\overline{\mathbf{F}}_1.A_1) = \pm \left| \overline{\mathbf{M}}_{B_1}(\overline{\mathbf{F}}_1.A_1) \right| = \pm F_1 h\,.$$

Нужная формула обоснована. В изображенной на рисунке ситуации, кстати, надо брать именно знак “+”, так как кратчайший поворот от $\overline{\mathbf{r}}_{BA}$ до $\overline{\mathbf{F}}$, т.е. от $\overline{\mathbf{r}}_1$ до $\overline{\mathbf{F}}_1$, видим происходящим против хода часовой стрелки.

Замечание. Если $\overline{\mathbf{F}}$ и B лежат в плоскости, ортогональной оси z, то последняя формула упрощается:

$$\boxed{M_{Bz}(\overline{\mathbf{F}}) = \pm\, F h}\,.$$

Здесь составляющие векторов с индексами 2 вообще отсутствуют. Поэтому F – это модуль самой силы, а не ее проекции; точно так же h – это плечо самой силы.



Здесь над буквой F черта отсутствует. Так тоже можно писать: буква обозначает модуль вектора силы, но не сам этот вектор (направление же вектора силы показано стрелкой).

Поскольку вектор однозначно определен, когда известны его модуль и направление, то такой способ обозначения векторов на рисунках вполне корректен.

Формула, заключенная в рамку, лежит в основе решения задач статики по теме "Плоская система сил".

Заметим еще, что для ситуации, представленной на рисунке, в формуле нужно выбрать знак "–": сила стремится повернуть тело вокруг точки B по ходу часовой стрелки.

То, о чем мы с Вами говорили до сих пор, относилось, собственно говоря, не к статике, а лишь к ее формальному аппарату. Мы обсуждали силы и их характеристики, практически игнорируя тот факт, что силы приложены к материальным телам.

Вспомним теперь, что в определении статики фигурируют также понятия равновесия и материального тела.

6. Равновесие материальных тел

Начнем с понятий материального тела и его массы.

Первое утверждение – таково.

Всякое *материальное тело* в статике рассматривается как множество точек.

В геометрии поступают аналогично: геометрические тела (имеющие форму куба, шара, цилиндра и так далее) тоже рассматриваются как множества некоторых точек. Только в геометрии считают, что эти точки лежат в пространстве; а в механике ситуация более сложная.

Аксиома сплошности: в каждый момент времени точкам тела *взаимно однозначно* сопоставлены точки пространства, которые непрерывным образом заполняют в нем некоторую ограниченную область.

Используют такую терминологию:

Положение точки тела – та точка области, занимаемой телом, которая сопоставлена данной точке тела.

Таким образом, в механике проводят различие между точками самого тела и их текущими положениями.

Аксиома движения: с течением времени положения точек материального тела (а значит, и область, занимаемая телом) могут изменяться, но только непрерывным образом.

Это означает, что материальное тело не может скачком изменить свое место в пространстве. Такое скачкообразное изменение рассматривают фантасты и называют телепортацией; в классической механике это невозможно.

Фактически изменение положения точек тела – это непрерывный процесс. Как мы говорили ранее, этот процесс и представляет собой *механическое движение*.

Насколько реальны наши предположения о материальных телах? Мы знаем, что тела состоят из атомов, атомы – из ядер и электронов. Электроны вообще не имеют пространственной протяженности, а сумма объемов ядер ничтожно мала по сравнению с объемом тела. Так что реальные тела вовсе не являются сплошными и в основном "состоят из пустоты".

Но на макроскопическом уровне дискретность (прерывистость) строения вещества практически не ощущается, а область применимости классической механики, как мы знаем, как раз и ограничивается явлениями макромира.

Значит, понятие материального тела в классической механике – это лишь *модель* реального тела. Но теория, основанная на такой модели, весьма успешно работает на практике, и это – главное.

Следующее требование, налагаемое на материальные тела, таково:

Аксиома массы: всякому материальному телу сопоставлена постоянная положительная величина – *масса* тела:

$$m = \text{const}\,, \quad m > 0\,.$$

Постоянство массы тела означает, что она не меняется с течением времени. В рамках классической механики это справедливо всегда.

Данная аксиома не говорит о том, что такое масса, хотя и устанавливает важные ее свойства. Реальный смысл понятия массы раскрывается в других аксиомах механики.

Например, из II закона Ньютона следует, что масса – это мера инертности тела. Об этом мы будем говорить, когда займемся динамикой.

Заметим еще, что масса сопоставлена телу в целом. Можно говорить также о массе отдельных частей тела, но не о массе отдельных его точек: ведь этих точек – бесконечно много (целый континуум). Если бы каждая из них имела конечную массу, масса всего тела была бы бесконечно велика.

При последовательном аксиоматическом построении механики вводят еще несколько аксиом, которые еще более уточняют понятие материального тела.

Например, мы не говорили о том, входят ли в состав области, занимаемой телом, ее граничные точки; а такой вопрос можно поставить, и есть веские основания потребовать, чтобы эти точки *всегда* входили в состав области. Но нам сейчас будет достаточно трех перечисленных аксиом.

Эти аксиомы не запрещают материальным телам деформироваться, т.е. менять свою форму. Но в теоретической механике, как мы уже отмечали, рассматриваются лишь недеформируемые тела, т.е. тела абсолютно твердые.

В большинстве задач на одно твердое тело действует не одна сила, а несколько. В связи с этим возникает понятие системы сил.

7. Системы сил

Системой сил $\{\overline{\mathbf{F}}_1 . A_1, \ldots, \overline{\mathbf{F}}_n . A_n\}$ называется совокупность сил, приложенных к точкам одного и того же АТТ.

Как Вы видите, системы сил обозначают так, как принято обозначать множество. Однако не всякое множество сил можно рассматривать как систему сил. Если силы приложены к различным телам (или к одному материальному телу, но не являющемуся абсолютно твердым), то термин “система сил” к такому множеству не применяют.

Краткое обозначение: $\{\overline{\mathbf{F}}_1, \ldots, \overline{\mathbf{F}}_n\}$.

Рассматривая различные системы сил, в статике выделяют их подклассы, которые характеризуются теми или иными специальными свойствами. Познакомимся с соответствующей терминологией.

Система сил – **сходящаяся**, если линии действия всех сил пересекаются в одной точке.

Силы образуют **систему параллельных сил**, если линии их действия параллельны.

Система сил – **плоская**, если линии действия всех сил лежат в одной плоскости.

Во всех этих определениях значение имеют только условия, налагаемые на линии действия сил. Никаких условий на модули сил системы не налагается.

Как мы уже говорили, силы, действующие на материальные тела, приводят к изменению состояния покоя или движения этих тел. Но нередко бывает так, что две различные системы сил оказывают на тела, к которым они приложены, одно и то же воздействие.

В таких ситуациях принято говорить о том, что такие две системы сил являются *эквивалентными*. Обсудим это более подробно.

Прежде всего, рассмотрим общее понятие эквивалентности каких-либо двух объектов.

Эквивалентность – это равенство по отношению к некоторым выделенным признакам.

Полагают, что два объекта эквивалентны, если данные признаки у них совпадают. При этом объекты могут различаться какими-либо иными признаками; но такое различие предполагают – в рамках данного конкретного рассмотрения – несущественным.

Три обязательных требования к эквивалентности:

1) $A \backsim A$ (рефлексивность);

2) $A \backsim B \quad \Rightarrow \quad B \backsim A$ (симметричность);

3) $A \backsim B,\ B \backsim C \quad \Rightarrow \quad A \backsim C$ (транзитивность).

Знак “$\backsim$” здесь используется для обозначения отношения эквивалентности.

Но вернемся к системам сил.

Две системы сил $\{\,\overline{\mathbf{F}}_1,\,\ldots,\,\overline{\mathbf{F}}_n\,\}$ и $\{\,\overline{\mathbf{P}}_1,\,\ldots,\,\overline{\mathbf{P}}_m\,\}$ называются **эквивалентными**, если одну из них можно заменить другой, не нарушая состояния покоя или движения АТТ.

В соответствии с уже введенными обозначениями, это можно записать так:

$$\{\,\overline{\mathbf{F}}_1,\,\ldots,\,\overline{\mathbf{F}}_n\,\} \;\backsim\; \{\,\overline{\mathbf{P}}_1,\,\ldots,\,\overline{\mathbf{P}}_m\,\}\,.$$

По смыслу приведенного определения ясно, что отношение эквивалентности систем сил удовлетворяет всем трем требованиям к эквивалентности.

В действительности мы сейчас знаем об эквивалентности систем сил совсем немногое. Из данного определения вовсе не следует ответ на следующий принципиальный вопрос: а как именно можно установить, эквивалентны две конкретные системы сил или нет?

Для ответа на этот вопрос следовало бы перейти к динамике абсолютно твердого тела. Действительно, в динамике устанавливаются уравнения движения твердого тела; если решить эти уравнения при заданных силах, то можно будет узнать, как именно будет двигаться тело, если к нему приложить ту или иную систему сил.

В этом случае ответ будет прост: если движения совпадут, то системы сил эквивалентны; если движения будут отличаться – неэквивалентны.

Но задача решения уравнений движения может оказаться весьма сложной. Поэтому обычно идут по другому пути: выявляют признаки, по которым можно судить об эквивалентности двух систем сил, не решая уравнений движения. Именно такой подход и оказывается наиболее эффективным.

Мы увидим, что вопрос об эквивалентности двух систем сил может быть решен уже в рамках статики. Именно, некоторые аксиомы статики как раз и устанавливают факт эквивалентности некоторых простейших систем сил; позже, опираясь на эти аксиомы, мы получим общий критерий эквивалентности систем сил.

Однако один частный случай мы можем рассмотреть уже сейчас. Запишем определение.

Если система сил $\{ \overline{\mathbf{F}}_1, \ldots, \overline{\mathbf{F}}_n \}$, будучи приложенной к покоящемуся АТТ, не изменяет состояния покоя, то она называется **уравновешенной**:

$$\{ \overline{\mathbf{F}}_1, \ldots, \overline{\mathbf{F}}_n \} \backsim \varnothing .$$

Справа записана система сил, число сил в которой равно нулю (т.е. пустое множество). Очевидно, что если к покоящемуся телу вообще не прикладывать никаких сил, то его состояние покоя не изменится.

Таким образом, уравновешенная система сил эквивалентна пустому множеству.

В механике чаще используется, правда, несколько иной способ записи.

Пишут: $\{ \overline{\mathbf{F}}_1, \ldots, \overline{\mathbf{F}}_n \} \backsim 0$.

Нуль здесь записан чисто формально – по традиции. Символ нуля в этой условной записи заменяет символ пустого множества.

Такая запись связана с тем, что символика статики разрабатывалась в те времена, когда еще не было ни теории множеств, ни соответствующих обозначений.

Используют часто и другие названия для уравновешенной системы сил.

Синонимы: система сил, **эквивалентная нулю**; **нуль-система**.

Введем теперь в рассмотрение основные характеристики системы сил.

Главный вектор системы сил – свободный вектор, равный сумме векторов всех сил системы:

$$\overline{\mathbf{R}} = \sum_k \overline{\mathbf{F}}_k .$$

Подчеркнем, что мы здесь складываем не сами силы, а лишь их векторы. Силы складывать можно, лишь если они приложены к одной точке.

Из определения следует, что главный вектор системы сил сам силой не является, хотя его размерность и совпадает с размерностью силы. Всякая сила обязательно имеет точку приложения, а вектор $\overline{\mathbf{R}}$ есть вектор свободный, и для него точка приложения не определена.

Следующее определение:

Главный момент системы сил относительно полюса B – вектор, приложенный в точке B и равный сумме моментов векторов всех сил системы относительно данного полюса:

$$\overline{\mathbf{L}}_B = \sum_k \overline{\mathbf{M}}_B(\overline{\mathbf{F}}_k) .$$

В отличие от главного вектора, главный момент системы сил является связанным вектором.

<u>Теорема</u> (об изменении главного момента при смене полюса). Главный момент системы сил относительно нового полюса O получается, если к главному моменту системы сил относительно старого полюса B прибавить слагаемое $\overline{\mathbf{M}}_O(\overline{\mathbf{R}}.B)$.

Что это за слагаемое? Вектор $\overline{\mathbf{R}}$ – это главный вектор системы сил, т.е. свободный вектор. Здесь указано, что данный вектор приложен в старом полюсе B; превратился ли он после этого в силу?

Превратился, только эта сила – не ньютонова, поскольку она не является мерой воздействия на данное тело со стороны какого-либо другого тела или физического поля. Такая “сила” введена нами чисто формально.

Поэтому:

Здесь $\overline{\mathbf{M}}_O(\overline{\mathbf{R}}.B)$ – вычисленный относительно нового полюса O момент <u>*воображаемой*</u> силы, вектор которой равен главному вектору системы сил и которая приложена в старом полюсе B.

Итак, теорема утверждает, что

$$(*) \qquad \boxed{\overline{\mathbf{L}}_O = \overline{\mathbf{L}}_B + [\,\overline{\mathbf{r}}_{OB}, \overline{\mathbf{R}}\,]} \,.$$

Приступаем к доказательству теоремы. Здесь и далее начало и конец доказательства будем обозначать значком ■.

■ Обозначим $\overline{\mathbf{r}}_k = \overline{\mathbf{r}}_{OA_k}$, $\overline{\mathbf{r}}_k' = \overline{\mathbf{r}}_{BA_k}$.

Напомним, что через $A_1, \ldots, A_n$ обозначены точки приложения сил системы.

Очевидно:

$$\overline{\mathbf{r}}_k = \overline{\mathbf{r}}_{OB} + \overline{\mathbf{r}}_k' .$$

Тогда:

$$\begin{aligned}
\overline{\mathbf{L}}_O &= \sum_k \overline{\mathbf{M}}_O(\overline{\mathbf{F}}_k) = \sum_k [\,\overline{\mathbf{r}}_k, \overline{\mathbf{F}}_k\,] = \\
&= \sum_k [\,\overline{\mathbf{r}}_{OB}, \overline{\mathbf{F}}_k\,] + \sum_k [\,\overline{\mathbf{r}}_k', \overline{\mathbf{F}}_k\,] = \\
&= [\,\overline{\mathbf{r}}_{OB}, \sum_k \overline{\mathbf{F}}_k\,] + \sum_k \overline{\mathbf{M}}_B(\overline{\mathbf{F}}_k) = \\
&= [\,\overline{\mathbf{r}}_{OB}, \overline{\mathbf{R}}\,] + \overline{\mathbf{L}}_B .
\end{aligned}$$

■

Формула (*) иногда называется <u>*формулой Пуансо*</u>.

Именно он впервые сформулировал и доказал данную теорему.

Следствие. Если главный вектор системы сил равен нулю, то ее главный момент не меняется при смене полюса (т.е. представляет собой *свободный* вектор).

Как мы видели раньше, иногда при решении задач статики бывает полезным также понятие вириала силы. В связи с этим вводят еще и такое определение.

Главный вириал системы сил относительно полюса B – сумма вириалов всех сил системы относительно данного полюса:

$$U_B = \sum_k V_B(\overline{\mathbf{F}}_k) .$$

При смене полюса вириал также изменяется.

Аналог формулы (∗):

$$U_O = U_B + V_B(\overline{\mathbf{R}}.B) \equiv U_B + (\overline{\mathbf{r}}_{OB}, \overline{\mathbf{R}}) .$$

Доказывается данная формула точно так же, как и формула Пуансо, только вместо векторных произведений используются скалярные.

Перейдем теперь к *аксиомам статики* – основным положениям, которые принимаются в ней в качестве исходных. Опираясь на эти аксиомы, мы уже чисто логическим путем сможем получить все важнейшие результаты статики, непосредственно используемые при решении практических задач.

Начнем с аксиом первой группы.

8. Аксиомы статики: общие аксиомы о силах

Рассматриваемые в этом и следующем пунктах аксиомы относятся именно к статике и выражают собой те условия, при соблюдении которых тело не изменяет своего состояния (в частности, состояния покоя).

Поскольку покой есть весьма частный случай движения, то можно было бы обойтись без этих аксиом. Именно, все утверждения, которые мы сформулируем в этом пункте, можно получить как логические следствия из аксиом динамики.

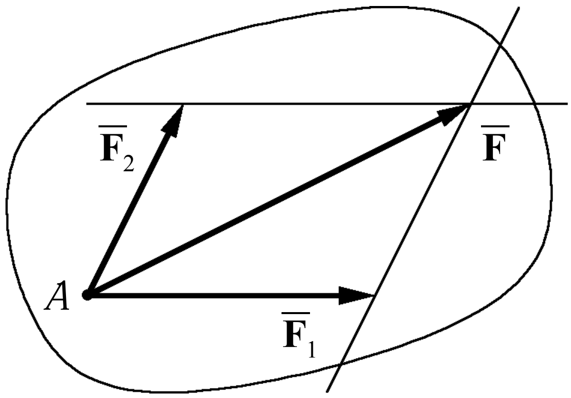
Так иногда и поступают авторы учебников. Но мы с Вами из общих аксиом механики знаем пока что только аксиомы сплошности, движения и массы; для формулировки остальных требуется предварительно ввести ряд кинематических понятий.

Выход – один: излагать статику как самостоятельный раздел науки со своими собственными аксиомами. Это – тоже весьма распространенный способ изложения материала, и вполне состоятельный с логической точки зрения.

Аксиомы для удобства будем нумеровать римскими цифрами.

I. Аксиома параллелограмма сил

Состояние тела не изменится, если две силы, приложенные в *одной точке*, заменить их геометрической суммой.



$$\{\,\overline{\mathbf{F}}_1 . A,\ \overline{\mathbf{F}}_2 . A\,\} \backsim \{\,\overline{\mathbf{F}} . A\,\},$$

где $\overline{\mathbf{F}} = \overline{\mathbf{F}}_1 + \overline{\mathbf{F}}_2$.

Название аксиомы объясняется тем, что векторы сил складываются по закону параллелограмма. Фактически аксиома утверждает эквивалентность двух систем сил.

Из симметричности отношения эквивалентности вытекает и обратное утверждение: сила $\overline{\mathbf{F}}$ всегда может быть разложена на две составляющие. Поэтому данную аксиому иногда называют также *принципом сложения и разложения сил* по закону параллелограмма.

Хотя данная аксиома сформулирована как аксиома статики, речь в ней идет о произвольном состоянии материального тела (не только о состоянии покоя). Значит, принцип сложения и разложения сил применим не только к покоящимся, но и к движущимся материальным телам.

Задумаемся: а разве этот принцип не следует просто из того, что силы представляют собой векторы? Если бы этой аксиомы не было, то нам все равно ничто бы не помешало сложить векторы $\overline{\mathbf{F}}_1$ и $\overline{\mathbf{F}}_2$ по закону параллелограмма.

Но аксиома утверждает большее. Она говорит, что *эффект* одновременного действия на тело двух сил – такой же, как и у одной силы, равной их сумме. А данное утверждение уже не самоочевидно и обобщает собой данные многочисленных наблюдений и экспериментов.

Мы сформулировали первую аксиому – аксиому параллелограмма сил.

Она утверждает, что две силы, приложенные в одной точке твердого тела, можно заменить их векторной суммой.

Сформулировано было изложенное правило сложения сил задолго до возникновения векторного исчисления.

Правило сложения сил по закону параллелограмма открыл Стевин (1605 г.).

Стевин, Симон (1548 – 1620) – нидерландский математик, механик и инженер.

Помимо принципа сложения и разложения сил, Стевин нашел критерий равновесия трех сходящихся сил, представил новое доказательство условий равновесия тела на наклонной плоскости, выдвинул принцип невозможности вечного движения, разработал теорию действия веревочных машин.

В гидростатике (статика жидкости) Стевин открыл независимость давления воды на дно сосуда от формы стенок и обосновал закон сообщающихся сосудов. Все эти достижения позволяют считать Стевина одним из основоположников статики и гидростатики.

В математике он одним из первых в Европе ввел десятичные дроби и отрицательные корни уравнений, предложил формулу для расчета сложных процентов. Был также автором трактатов по бухгалтерскому делу и фортификации.

Переходим к другим аксиомам статики. Одно общее замечание по поводу этих аксиом:

Остальные аксиомы статики предложил Пуансо (1803 г.).

Мы уже говорили о том, что вполне оформилась геометрическая статика в трактате этого французского ученого “Элементы статики”. Именно в нем Пуансо и представил ту систему аксиом, которая стала логическим фундаментом статики.

II. Аксиома о нуль-системе

Состояние АТТ не изменится, если к действующей на него системе сил добавить (или отбросить) нуль-систему.

Напомню, что нуль-системой (или уравновешенной системой сил) называется такая система сил, которая, будучи приложенной к покоящемуся абсолютно твердому телу, не изменяет состояния покоя.

В аксиоме речь идет, впрочем, уже не о состоянии покоя, а о произвольном движении тела.

Чтобы сформулировать следующую аксиому, введем предварительно следующее определение.

Тело, на движение которого не наложены никакие наперед заданные ограничения, называется **свободным**.

Например, если на гладкую горизонтальную поверхность положили тяжелый предмет, то поверхность мешает этому предмету провалиться вниз. Это – наперед заданное ограничение, и оно должно выполняться при любом возможном движении тела.

Напротив, свободное тело может в принципе совершать из данного начального положения любые перемещения в пространстве – все зависит от действующих на это тело сил и от начальных скоростей точек тела.

А теперь – третья аксиома статики:

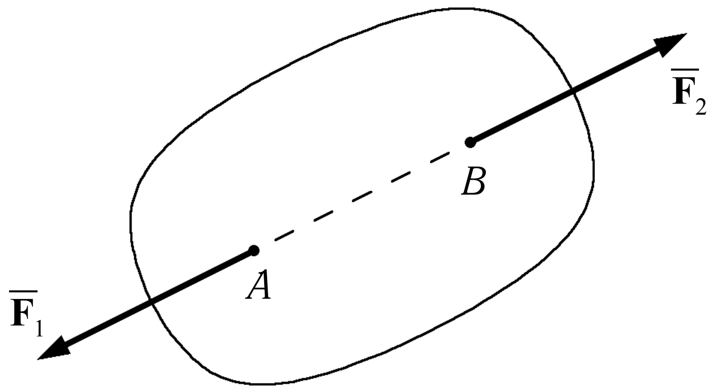
III. Аксиома о двух силах

Свободное АТТ под действием двух сил находится в равновесии тогда и только тогда, когда эти силы:

1) равны по модулю;

2) противоположны по направлению;

3) лежат на одной прямой.



Формально эти условия можно записать так:

$$(*) \qquad \begin{cases} 1\!-\!2) \quad \overline{\mathbf{F}}_1 = -\,\overline{\mathbf{F}}_2 \\ 3) \quad \overline{\mathbf{F}}_1 \parallel \overline{AB}\,. \end{cases}$$

Таким образом, аксиома утверждает следующее.

Смысл аксиомы:

$$\{\,\overline{\mathbf{F}}_1\,,\,\overline{\mathbf{F}}_2\,\} \backsim 0 \quad \Leftrightarrow \quad (*)\,.$$

Действительно, система сил, которая, будучи приложенной к покоящемуся абсолютно твердому телу, не изменяет состояния покоя, как раз и называется уравновешенной системой сил, т.е. нуль-системой.

Подчеркнем: аксиома применима только к свободному абсолютно твердому телу. Вспомните задачу о равновесии рычага (о которой мы говорили, рассматривая понятие плеча силы). В этой задаче силы не лежали на одной прямой, а модули их не были равны; однако рычаг находился в равновесии.

Причина – в том, что рычаг не является свободным телом. На его движение наложено наперед заданное ограничение, в соответствии с которым точка его опоры закреплена.

Аксиома III устанавливает необходимые и достаточные условия, при выполнении которых система из _двух_ сил оказывается нуль-системой. А как быть в случае, когда система состоит из _одной_ силы?

Аксиома о двух силах позволяет дать ответ и на этот вопрос. Поскольку ее формулировка не предполагает, что точки приложения сил обязаны быть различными, то можно провести такое рассуждение.

Замечание. Систему сил $\{\,\overline{\mathbf{F}}.A\,\}$ можно по аксиоме I заменить системой $\{\,\overline{\mathbf{F}}_1.A\,,\overline{\mathbf{F}}_2.A\,\}$, где $\overline{\mathbf{F}}_1+\overline{\mathbf{F}}_2 = \overline{\mathbf{F}}$. Но $\overline{\mathbf{F}}_1 \parallel \overline{AA}$, так что

$$\{\,\overline{\mathbf{F}}\,\} \backsim 0 \quad \Leftrightarrow \quad \overline{\mathbf{F}}_1 = -\,\overline{\mathbf{F}}_2 \quad \Leftrightarrow \quad \overline{\mathbf{F}}_1+\overline{\mathbf{F}}_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \overline{\mathbf{F}} = 0\,.$$

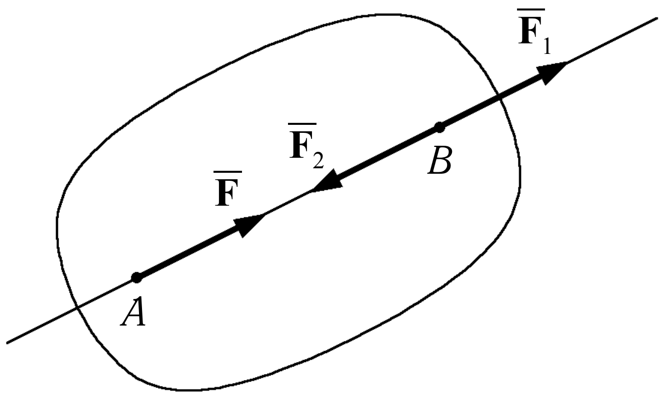
Итак, система из одной силы эквивалентна нулю тогда и только тогда, когда вектор этой силы равен нулю. По аксиоме II, такую силу можно добавлять и отбрасывать, не меняя состояния тела.

Этот результат, разумеется, является тривиальным. Но из аксиом II и III вытекает другое – не столь тривиальное – следствие, которое мы сейчас рассмотрим.

Следствие (о переносе силы вдоль линии действия). Силу, приложенную к АТТ, можно переносить вдоль ее линии действия в любую точку, не меняя состояния тела.

■ Пусть к телу приложена сила $\overline{\mathbf{F}}.A$, а точка B лежит на ее линии действия.

Приложим к телу также силы $\overline{\mathbf{F}}_1.B$ и $\overline{\mathbf{F}}_2.B$: $\overline{\mathbf{F}}_1 = \overline{\mathbf{F}}$, $\overline{\mathbf{F}}_2 = -\overline{\mathbf{F}}$.



$\{\overline{\mathbf{F}}_1, \overline{\mathbf{F}}_2\} \backsim 0$ – по аксиоме III.

Можно было бы сослаться и на сформулированное выше замечание, поскольку мы фактически добавили одну силу, вектор которой равен нулю.

$\{\overline{\mathbf{F}}\} \backsim \{\overline{\mathbf{F}}, \overline{\mathbf{F}}_1, \overline{\mathbf{F}}_2\}$ – по аксиоме II.

Итак, к силе $\overline{\mathbf{F}}$ добавлены силы $\overline{\mathbf{F}}_1$ и $\overline{\mathbf{F}}_2$; состояние тела при этом не изменилось.

Но $\{\overline{\mathbf{F}}, \overline{\mathbf{F}}_2\} \backsim 0$ – по аксиоме III, так что эти две силы по аксиоме II можно отбросить.

Итак:

$$\{\overline{\mathbf{F}}\} \backsim \{\overline{\mathbf{F}}, \overline{\mathbf{F}}_1, \overline{\mathbf{F}}_2\} \backsim \{\overline{\mathbf{F}}_1\}, \text{ т.е. } \{\overline{\mathbf{F}}.A\} \backsim \{\overline{\mathbf{F}}.B\}.$$ ■

Вывод: силу, приложенную к АТТ, можно рассматривать как *скользящий* вектор.

Что это такое? Если связанный вектор характеризуется модулем, направлением и точкой приложения, то скользящий вектор – по определению – характеризуется модулем, направлением и линией действия. Точка приложения может выбираться на линии действия произвольно.

Подчеркнем, что аксиомы II и III (и следствие о переносе силы) применимы лишь к абсолютно твердым телам.

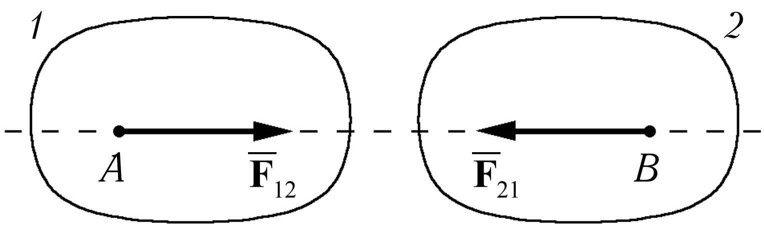
Сила же, приложенная к деформируемому материальному телу, всегда рассматривается как связанный вектор; переносить ее вдоль линии действия нельзя.

Теперь вспомним, что силы являются мерами механических воздействий на материальные тела со стороны других тел (или физических полей). Рассмотрим сейчас только тот случай, когда сила характеризует взаимодействие данного тела с другим материальным телом.

IV. Аксиома о действии и противодействии

Если на тело *1* с силой $\overline{\mathbf{F}}_{12}$ воздействует тело *2*, то на тело *2* со стороны тела *1* действует сила $\overline{\mathbf{F}}_{21}$, причем эти силы:

1) равны по модулю;
2) противоположны по направлению;
3) лежат на одной прямой.



Формальная запись:

$$\begin{cases} 1-2) \quad \overline{\mathbf{F}}_{12} = -\overline{\mathbf{F}}_{21} \\ 3) \quad \overline{\mathbf{F}}_{12} \parallel \overline{AB}\,. \end{cases}$$

Записанные условия очень похожи на те, с которыми мы встречались в формулировке аксиомы о двух силах (аксиома III). Однако есть важное отличие.

Неверно, что $\{\overline{\mathbf{F}}_{12}, \overline{\mathbf{F}}_{21}\} \backsim 0$, ибо эти силы приложены к разным телам.

Действительно, само определение системы сил предполагает, что входящие в нее силы приложены к *одному и тому же* абсолютно твердому телу.

Обычно первую из указанных сил называют *действием*, а вторую – *противодействием*. Эти названия условны и зависят от того, какое из двух тел мы считаем телом *1*, а какое – телом *2*.

Аксиома о действии и противодействии вовсе не утверждает того, что механическое взаимодействие двух тел всегда характеризуется двумя силами. В действительности взаимодействие может описываться двумя системами сил, действующих на каждое из этих тел, и ни одна из этих систем не обязана сводиться к одной силе.

Аксиома рассматривает только частный случай взаимодействия, и поэтому ее формулировка начинается со слова "если". В более общем случае *каждой* из сил, приложенных к телу *1*, может быть сопоставлена некоторая сила, приложенная к телу *2* и играющая роль противодействия.

Не следует смешивать аксиому о действии и противодействии с III законом Ньютона, о котором речь идет в динамике (и который Вам известен из курса физики). Третий закон Ньютона относится к взаимодействию материальных точек, а данная аксиома – к взаимодействию материальных тел.

Впрочем, в динамике основное утверждение аксиомы о действии и противодействии может быть выведено из III закона Ньютона (с привлечением некоторых других аксиом динамики).

Переходим теперь ко второй группе аксиом статики.

9. Аксиомы статики: аксиомы о связях

Начнем со следующего определения.

Связь – наперед заданное ограничение на движение тел.

Обычно связи возникают при контакте абсолютно твердых тел и обусловлены способом их соединения.

Примеры связей Вам уже знакомы из практических занятий. Так, на груз, лежащий на гладкой поверхности стола, наложена связь: плоскость стола не дает грузу перемещаться вниз. На рычаг наложена связь (вращательный шарнир), не позволяющая одной из точек рычага (той, в которой этот шарнир установлен) перемещаться в пространстве.

Из этих примеров видно, что фактически наличие ограничений на движение тел связано с механическими воздействиями, которые данные тела испытывают со стороны других тел. Понятие связи используют в тех случаях, когда эффект таких воздействий может быть описан чисто кинематическим способом (в виде наперед заданных ограничений на положения или скорости некоторых точек тела).

Мерой механического взаимодействия тел является сила. В случае, когда речь идет о связях, используют такую терминологию.

Реакции связей – силы, действующие на тела со стороны связей.

Поскольку связи характеризуют эффект некоторых механических воздействий между материальными телами, то реакции связей относятся к числу ньютоновых сил, представляя собой их частный случай.

В действительности ньютоновы силы можно разделить на два класса.

Ньютоновы силы реакции связей
активные силы.

Смысл последнего термина определен сейчас вполне однозначно. Именно:

<u>Активные силы</u> – ньютоновы силы, не являющиеся реакциями связей.

Это могут быть силы тяжести, силы сопротивления среды и так далее. В конкретных задачах они обычно бывают заданы; реакции же связей никогда заранее не известны, и их можно найти, только решая соответствующие задачи статики (или динамики, если тела движутся).

Итак, сейчас речь пойдет о материальных телах (или системах тел), на которые, возможно, наложены некоторые связи.

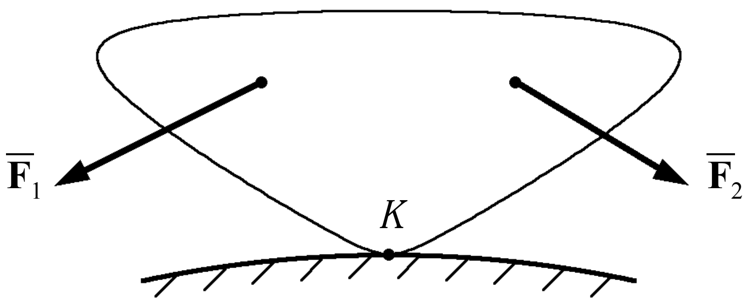
V. <u>Аксиома освобождаемости от связей</u>

Состояние тела (или системы тел) не изменится, если отбросить какие-либо из наложенных связей, <u>*заменив*</u> действие связей их реакциями.

По каким правилам производится такая замена – зависит от конкретного вида отбрасываемой связи.

<u>Пример 1</u> (точечный контакт гладких поверхностей). Пусть АТТ касается в точке K гладкой неподвижной поверхности.

Поверхность рассматриваемого твердого тела также считается гладкой. Предполагается, что данное тело находится под действием некоторой системы приложенных к нему активных сил. Условие непроникания точки K внутрь неподвижной поверхности представляет собой связь, наложенную на данное тело.

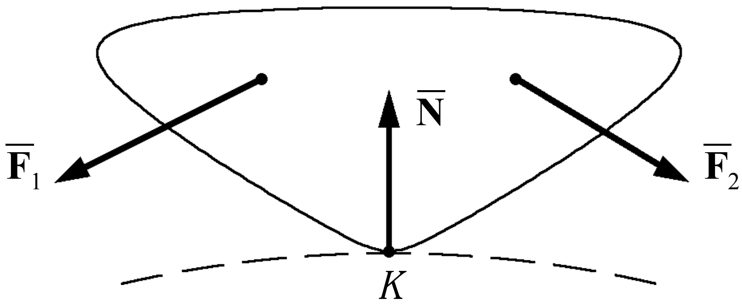


Рассматриваемая сейчас ситуация – не самый общий пример на точечный контакт двух гладких поверхностей. Именно: одно из контактирующих тел предполагается неподвижным. Впрочем, факт неподвижности этого тела для дальнейших рассуждений не принципиален.

Рецепт введения реакции связи в данном примере таков:

При отбрасывании данной связи ее действие заменяется реакцией связи $\overline{\mathbf{N}}.K$, направленной по внешней нормали к поверхности.

Почему это так, мы обоснуем чуть позже.



Использование буквы N в обозначении реакции связи здесь призвано подчеркнуть, что реакция направлена по нормали к поверхности.

Вернемся к аксиоме освобождаемости от связей. В ней говорится об отбрасывании некоторых связей. Но можно отбросить *все* связи; в этом случае приходим к такому выводу.

Замечание. Из аксиомы V следует, что любое несвободное тело можно рассматривать как свободное, добавив к активным силам реакции связей.

Напомню, что на движение свободного тела не наложены никакие наперед заданные ограничения. Теперь мы можем это условие выразить короче: *свободное тело* – это тело, на которое не наложены связи.

При решении задач статики подобный прием – освобождение тела от всех наложенных связей – является обычным.

С правилами, по которым связи заменяются их реакциями, Вы ознакомитесь на практических занятиях. Однако некоторые общие закономерности такой замены мы рассмотрим сейчас.

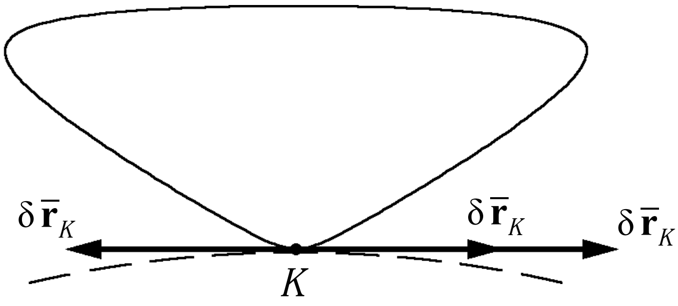
Как можно в аналитической форме выразить те ограничения, которые налагаются связью на движение тела? Для этого в механике вводят понятие возможного перемещения.

Возможное перемещение точки тела – бесконечно малое перемещение этой точки, допускаемое связью в данный момент времени.

Такое перемещение рассматривается как воображаемое. В реальности тело, находясь под действием конкретной сил, может, например, оставаться в покое; но мы сейчас говорим о тех движениях, которые оно *в принципе* способно совершать, не нарушая связей.

Вспомним пример *1*, в котором твердое тело касалась в точке K гладкой неподвижной поверхности.

В примере *1*: скольжению тела по поверхности отвечает возможное перемещение точки K, направленное по касательной к поверхности.



Здесь через $\delta\,\bar{\mathbf{r}}_K$ обозначен вектор возможного перемещения. Фактически это – дифференциал радиус-вектора точки K. Причину того, что он обозначается буквой "δ", а не "d", мы выясним в процессе изучения аналитической механики (на самом деле это связано с оговоркой "в данный момент времени", которую мы сейчас не обсуждаем).

На рисунке мы видим сразу несколько векторов возможных перемещений. На их величину в этой задаче никаких ограничений не налагается; любой из них допускается связью.

Из этого примера хорошо видно, почему мы говорим именно о бесконечно малых перемещениях. Именно они направлены по касательной к поверхности; при конечных же перемещениях точка K должна следовать вдоль поверхности, сообразуясь с ее кривизной.

Напомню еще, что в данном примере речь фактически идет о гладком точечном контакте двух тел, одно из которых предполагается неподвижным.

Замечание. Далее обсуждается случай, когда одно из двух контактирующих тел неподвижно (иначе следовало бы говорить об *относительных* возможных перемещениях).

Сделанная оговорка позволит нам упростить дальнейшие формулировки, обойдясь без слова "относительные".

Следует отметить, что возможные перемещения можно разделить на два класса.

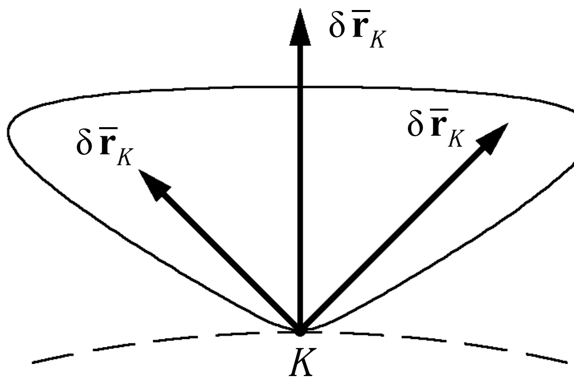
Возможное перемещение $\delta\,\bar{\mathbf{r}}$ называется:

– **неосвобождающим**, если бесконечно малое перемещение $-\delta\,\bar{\mathbf{r}}$ также является возможным;

– **освобождающим**, если бесконечно малое перемещение $-\delta\,\bar{\mathbf{r}}$ возможным не является.

На предыдущем рисунке мы изобразили для примера *1* именно неосвобождающие возможные перемещения, отвечающие скольжению тела по поверхности. Но тело может просто покинуть данную поверхность.

Освобождающие перемещения в примере *1* (отвечают сходу тела с поверхности):



А вот перемещения точки K внутрь поверхности связью запрещены.

В соответствии с подразделением возможных перемещений на два класса связи можно также разделить на два класса.

Связь – **двусторонняя** (или **удерживающая**), если все возможные перемещения неосвобождающие.

Связь – **односторонняя** (или **неудерживающая**), если среди возможных перемещений есть освобождающие.

Таким образом:

Связь в примере *1* – односторонняя.

Пример двусторонней связи будет приведен чуть позже. А сейчас сформулируем общее правило, позволяющее судить о направлении реакций связи.

Общее правило: для связей без трения реакция связи *ортогональна* неосвобождающим возможным перемещениям, а ее проекция на направление освобождающего возможного перемещения *неотрицательна*.

Теперь наш рецепт, по которому в примере *1* связь заменяется ее реакцией, становится обоснованным. Именно:

В силу первого условия в примере *1* реакция связи направлена по нормали к поверхности, а в силу второго – по *внешней* нормали.

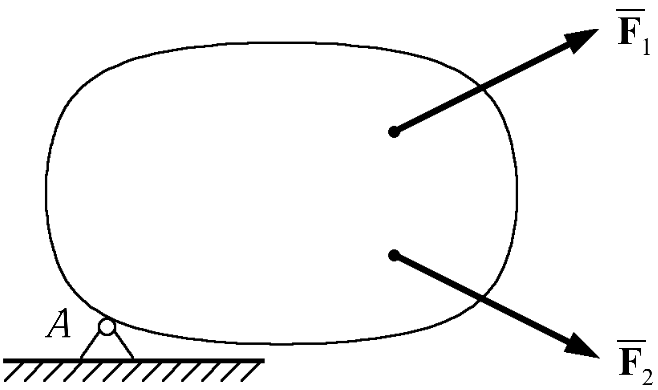
Из данного примера видно, что изложенному общему правилу можно придать еще и такую форму (не строгую, но удобную для применения):

Реакция связи направлена в сторону, *противоположную* той, куда связь не дает перемещаться телу.

Таким образом, реакция возникает в том и только в том случае, когда возможное перемещение в соответствующем направлении запрещено связью.

Рассмотрим еще один пример, в котором мы встретимся уже с двусторонней связью.

Пример 2 (сферический шарнир). Рассмотрим тело, соединенное с основанием сферическим шарниром.



Под основанием в статике понимают неподвижное тело, не входящее в состав рассматриваемой механической системы.

А что такое “сферический шарнир”?

Сферический шарнир – вид соединения, при котором два сочлененных тела имеют общую точку, а других ограничений на относительное движение тел не накладывается.

В частности, одно из тел может свободно поворачиваться вокруг произвольной оси, связанной с другим телом и проходящей через общую точку.

В нашем примере одно из тел – неподвижное, и слово “относительное” в определении можно опустить. Общая точка обоих тел и обозначена буквой A.

Здесь контакт двух тел – точечный, и связь допускает вращения, так что реакция связи должна сводиться к одной силе, приложенной в точке A.

Условие на возможное перемещение: $\delta \overline{\mathbf{r}}_A = 0$.

В самом деле, точка A подвижного тела никуда из своего текущего положения сместиться не может.

Записанное условие позволяет без труда выяснить, к какому из двух классов относится данный вид связи.

Связь в примере *2* – двусторонняя.

Действительно, возможное перемещение здесь единственное (равное нулю). От приписывания этому возможному перемещению знака “минус” ничего не меняется, так что перемещение – неосвобождающее.

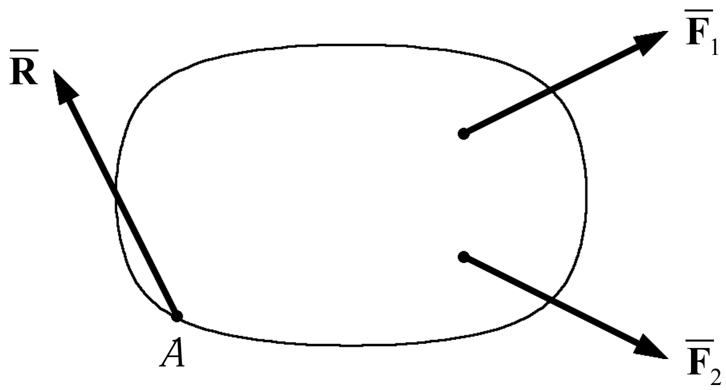
А как может быть направлена реакция связи? Она должна быть ортогональна вектору $\delta \overline{\mathbf{r}}_A$; но *любой* вектор ортогонален нулевому вектору.

Вывод: реакция связи $\overline{\mathbf{R}}.A$ может иметь любое направление в пространстве.

Какое именно, можно установить, лишь решая задачу о равновесии нашего подвижного тела.

Изобразим это тело освобожденным от связей.

Освобожденное от связей тело:



Это – итог наших предыдущих рассмотрений. При решении практических задач, правда, обычно поступают иначе.

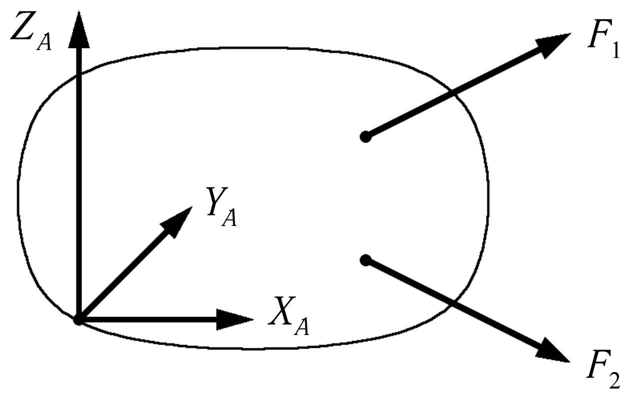
Разложим силу $\overline{\mathbf{R}}$ на три составляющие, параллельные осям x, y, z:

$$\overline{\mathbf{R}} = \overline{\mathbf{X}}_A + \overline{\mathbf{Y}}_A + \overline{\mathbf{Z}}_A .$$

Это – стандартный прием, которым пользуются в случаях, когда неизвестно направление искомой силы. Удобство его – в том, что направления сил $\overline{\mathbf{X}}_A$, $\overline{\mathbf{Y}}_A$, $\overline{\mathbf{Z}}_A$ теперь определены; неизвестны только величины этих сил.

В данной ситуации рисунок с освобожденным от связей телом будет выглядеть иначе.

Получаем:



Здесь использовано соглашение, о котором мы уже говорили. Изображены на рисунке не сами силы, а их величины; направления же сил показаны стрелками.

“Величина” силы – это не обязательно ее модуль. Именно:

X_A, Y_A, Z_A – проекции сил $\overline{\mathbf{X}}_A$, $\overline{\mathbf{Y}}_A$, $\overline{\mathbf{Z}}_A$ на направления, обозначенные стрелками: $X_A = \pm \left| \overline{\mathbf{X}}_A \right|$, и т.д.

Если после решения задачи о равновесии данного тела найденное для X_A значение окажется отрицательным, то это означает, что в действительности сила $\overline{\mathbf{X}}_A$ направлена в диаметрально противоположную сторону.

Во избежание недоразумений надо заметить, что на практических занятиях Вы встречались с *вращательными* шарнирами. Обозначается вращательный шарнир так же, как и сферический; но это – другой вид сочленения.

Именно, при данном сочленении два тела имеют общую ось. Вращательный шарнир допускает относительное вращение тел только вокруг этой оси – а не вокруг произвольной оси, как в случае сферического шарнира.

В задачах по теме "Плоская система сил" вращательный шарнир при освобождении от связи заменяется двумя взаимно ортогональными реакциями.

Вернемся теперь к обсуждению аксиом статики. Рассмотрим последнюю из этих аксиом.

VI. Аксиома о наложении новых связей

Состояние *покоя* материального тела (или системы тел) не нарушится, если наложить новые связи.

Здесь речь идет уже не о произвольном состоянии тела, а именно о состоянии покоя. Наложение новых связей на движущееся тело может изменить характер движения.

Замечание. Предполагается, что текущие положения точек тела удовлетворяют вновь налагаемым связям.

Обычно это предположение не оговаривают явно, а подразумевают. Но без него аксиома VI уже не будет справедливой.

Например, пусть на железнодорожной платформе установлена скамейка, а на этой скамейке стоит чемодан. Если мы наложим на этот чемодан связь в виде привязанной к нему веревки, а другой конец веревки прикрепим к дверной ручке проходящего мимо поезда, то через несколько секунд (как только нить натянется) чемодан покоиться уже не будет...

При решении задач статики часто используется следствие из аксиомы о наложении новых связей, представляющее собой ее частный случай.

Частный случай (*принцип отвердевания*). Состояние покоя материального тела (или системы тел) не нарушится, если путем наложения новых связей превратить его в абсолютно твердое тело.

Иными словами, новые связи должны быть такими, чтобы изменение расстояний между любыми точками тела стало невозможным.

Принципом отвердевания удобно пользоваться в такой ситуации. Если деформируемое тело (или система твердых тел) находится в равновесии, то оно останется в равновесии, если его рассматривать как единый "монолит".

Условия равновесия полученного абсолютно твердого тела будут *необходимыми* условиями равновесия исходного тела, но не достаточными. Однако из этих условий, возможно, удастся найти часть неизвестных величин (а если повезет – именно те, которые и представляют интерес в решаемой задаче).

Такой прием решения задач статики будет более подробно разобран на практических занятиях.

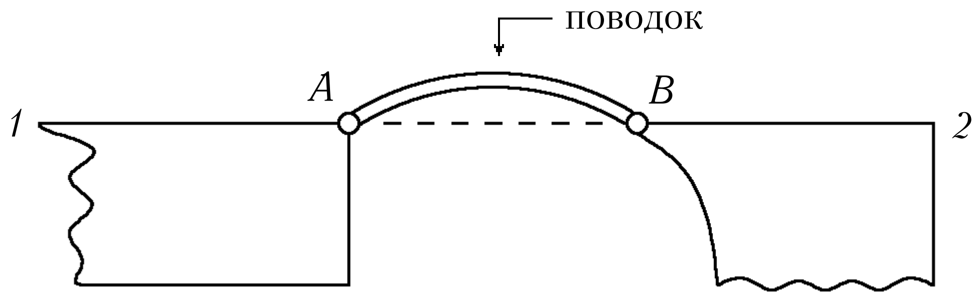
А сейчас мы рассмотрим еще один важный вид связей.

10. Ненагруженные поводки

Вновь начинаем с определения.

Поводок – АТТ, имеющее ровно два соединения с другими телами. Поводок называется **ненагруженным**, если на него не действуют активные силы.

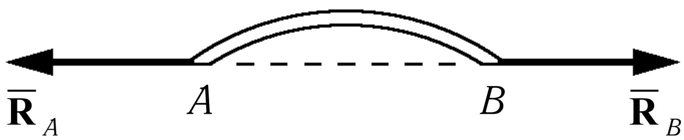
Пример. Рассмотрим два тела, каждое из которых соединено с ненагруженным поводком, причем соединения *допускают вращения*.



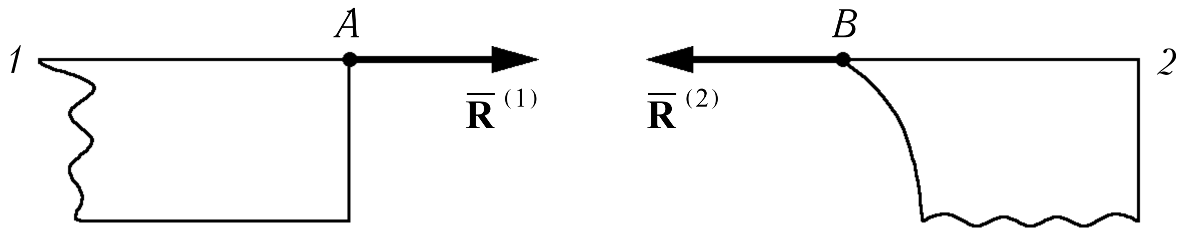
Обычно в конкретных задачах ненагруженные поводки представлены в виде тонких стержней (прямолинейных или изогнутых), и тогда предпочитают говорить о ненагруженных стержнях. Впрочем, это не обязательно, и в общем случае форма поводка может быть произвольной.

Мы оговорили, что соединения допускают вращения, и в нашем случае это именно так: нарисованы два сферических шарнира. Значит, вводимые при освобождении поводка от связей реакции сводятся к двум силам, приложенным в точках A и B.

Освободим систему от связей. По аксиоме о двух силах, приложенные к поводку реакции $\overline{\mathbf{R}}_A . A$ и $\overline{\mathbf{R}}_B . B$ удовлетворяют условиям: $\overline{\mathbf{R}}_A = -\overline{\mathbf{R}}_B$, $\overline{\mathbf{R}}_A \parallel \overline{AB}$.



По аксиоме о действии и противодействии, на другие тела действуют силы $\overline{\mathbf{R}}^{(1)}.A$ и $\overline{\mathbf{R}}^{(2)}.B$, причем $\overline{\mathbf{R}}^{(1)} = -\overline{\mathbf{R}}_A$, $\overline{\mathbf{R}}^{(2)} = -\overline{\mathbf{R}}_B$.



Подчеркнем, что мы оговорили, что соединения допускают вращения. В задачах на пространственные системы сил речь идет о произвольных относительных вращениях вокруг любых осей, проходящих через точку A или через точку B. Сферические шарниры допускают такие вращения.

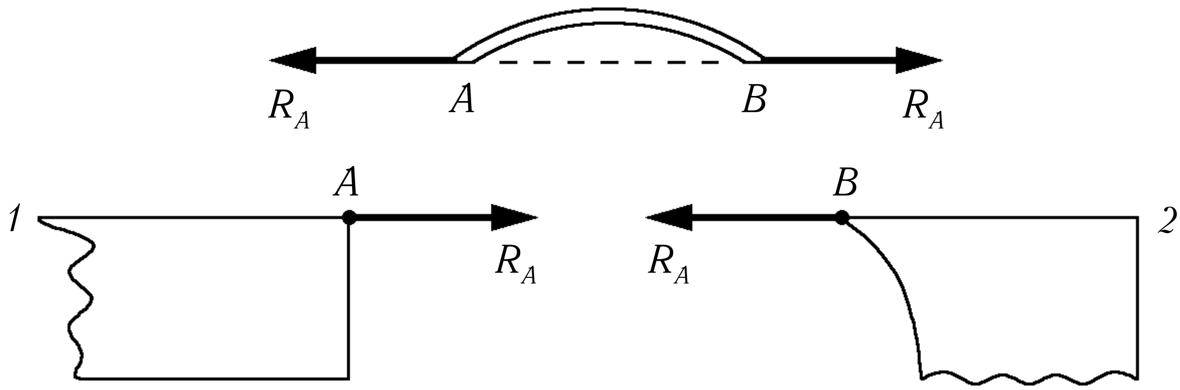
В задачах на плоские системы сил речь идет только о вращениях вокруг осей, ортогональных плоскости сил. В этом случае можно считать, что шарниры в точках A и B – вращательные.

Таким образом, направления всех четырех сил однозначно определены.

Использованные на наших рисунках обозначения вполне корректны. Однако при решении конкретных задач, как уже говорилось, лучше обозначать на рисунках не сами силы, а их величины (т.е. проекции на направления, обозначенные стрелками).

А величины всех четырех сил у нас сейчас одинаковы: они – такие же, как у силы $\overline{\mathbf{R}}_A$. Чтобы учесть это, лучше и обозначать их одинаково.

В иных обозначениях:



В действительности используемые обозначения можно еще больше упростить. Ведь мы только что раз и навсегда решили задачу о равновесии ненагруженного поводка: действующие на него реакции должны быть направлены именно так, как на верхнем рисунке.

При решении задач о равновесии систем тел, включающих ненагруженные поводки, мы теперь всегда можем пользоваться полученным результатом. Итак:

При освобождении системы тел от связей ненагруженные поводки следует рассматривать не как самостоятельные тела, а лишь как вид сочленения.

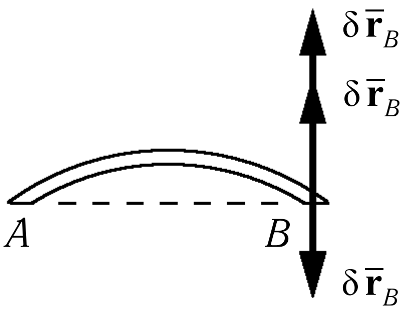
Иными словами, ненагруженный поводок рассматривается как промежуточный элемент, с помощью которого осуществляется соединение между другими телами системы.

Поэтому будет совершенно излишним рисовать отдельно ненагруженный поводок с действующими на него силами и выписывать для него уравнения равновесия. Он просто отбрасывается, как и любое другое соединение, а его действие на соединяемые тела заменяется реакциями.

Обратите внимание: поводок отбрасывается *вместе* с соединениями на его концах. В нашем примере было бы грубой ошибкой, если бы для тела *1* в точке A были бы нарисованы еще и реакции шарнира.

Скажем несколько слов еще о возможных перемещениях в данном примере.

Так как поводок является абсолютно твердым, то $|AB| = \mathrm{const}$. Считая тело *1* неподвижным, получаем: $\delta\bar{\mathbf{r}}_A = 0$, $\delta\bar{\mathbf{r}}_B \perp \overline{AB}$.

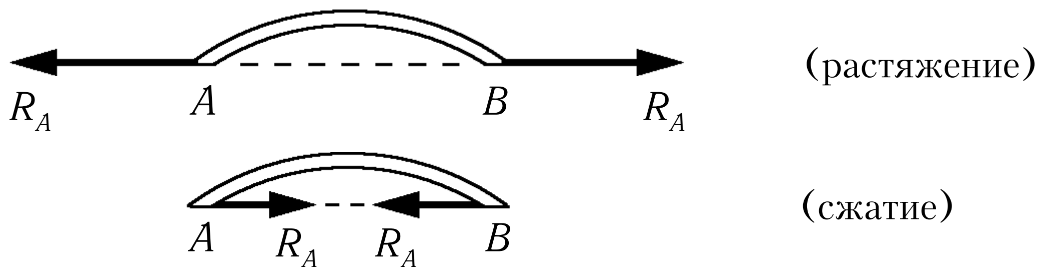


Действительно, при закреплении точки A точка B может перемещаться лишь по поверхности сферы, радиус которой равен расстоянию $|AB|$. Все нарисованные здесь возможные перемещения направлены по касательной к этой сфере.

Все возможные перемещения – неосвобождающие $\Rightarrow$ связь – двусторонняя.

Таким образом, в действительности реакция в точке B может быть направлена и к точке A, и от нее.

Возможные случаи (при $R_A > 0$):

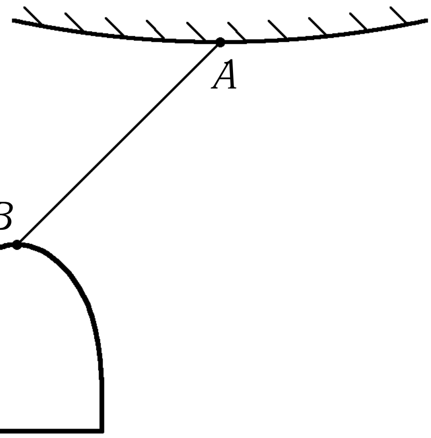


В первом случае реакции связей стремятся растянуть поводок вдоль прямой AB, а во втором – сжать (соответственно, во втором случае изменятся на противоположные и направления сил, действующих на тела *1* и *2*). Разумеется, сам поводок, будучи абсолютно твердым, не будет ни растягиваться, ни сжиматься.

Впрочем, при решении конкретных задач не следует рассматривать оба случая по отдельности: достаточно ограничиться первым случаем, как мы и делали раньше. Если значение R_A в процессе решения задачи получится отрицательным, то это и будет означать, что в действительности поводок сжат.

Рассмотрим коротко еще один вид сочленения, во многом сходный с соединением тел через ненагруженные поводки.

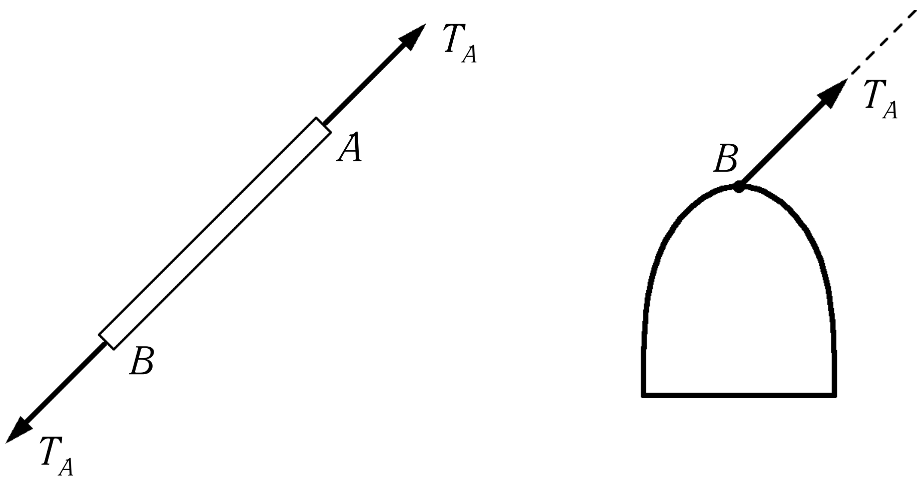
Рассмотрим два тела, соединенных гибкой нерастяжимой *нитью*, которая предполагается натянутой.



Роль нити реально могут играть также веревка, шнур, канат, трос, цепь. Предположение о том, что нить является гибкой и нерастяжимой, обычно не оговаривают явно, а подразумевают.

Применим к участку нити, на который не действуют активные силы, принцип отвердевания; тогда он превратится в ненагруженный поводок.

А какие реакции действуют на ненагруженный поводок, мы уже знаем. Итак:



Реакция нити обозначается буквой T (от латинского слова tensio ‘напряжение, натяжение’) и называется *натяжением* нити. Сила, действующая на неподвижное тело, здесь не показана.

Мы видим, что реакция нити всегда направлена вдоль нее; точно так же направлена и реакция прямолинейного ненагруженного поводка.

Однако одно отличие нити от ненагруженного поводка все же имеется.

Связь через нить – односторонняя: $T_A \geqslant 0$.

Действительно, при попытке сжать нить она перестает быть натянутой и просто провисает. При этом она больше не будет ограничивать движение соединяемых тел, и ее реакция будет равна нулю.

Итак, мы познакомились с аксиомами статики и простейшими примерами связей. Перейдем теперь к очередной теме.

§ 2. *Приведение систем сил к простейшему виду*

Речь пойдет о конструктивных способах замены системы сил, приложенных к абсолютно твердому телу, на эквивалентную ей систему, но более простую.

Какие способы преобразования систем сил, сохраняющие эквивалентность, мы уже знаем? Те, которые упоминаются в аксиомах статики. Такие преобразования называются *элементарными операциями* над системами сил.

1. Элементарные операции

Элементарная операция I типа – замена (по аксиоме I) двух сил, входящих в систему и приложенных к одной точке, их суммой (или разложение одной из сил на две составляющие).

Такая операция разрешена аксиомой параллелограмма сил (аксиома I в нашем изложении).

Рассмотрим, например, разложение силы на составляющие. Имеем:

$$\{\,\overline{\mathbf{F}}_1.A_1,\ \overline{\mathbf{F}}_2.A_2,\ \dots\,\} \ \backsim\ \{\,\overline{\mathbf{F}}'.A_1,\ \overline{\mathbf{F}}''.A_1,\ \overline{\mathbf{F}}_2.A_2,\ \dots\,\}\,,$$

если $\overline{\mathbf{F}}' + \overline{\mathbf{F}}'' = \overline{\mathbf{F}}_1$.

Вопрос: как изменятся основные характеристики системы сил при переходе от старой системы к новой?

$$\overline{\mathbf{R}} \;=\; \underbrace{\overline{\mathbf{F}}_1}_{\overline{\mathbf{F}}' + \overline{\mathbf{F}}''} + \overline{\mathbf{F}}_2 + \dots \;=\; \overline{\mathbf{F}}' + \overline{\mathbf{F}}'' + \overline{\mathbf{F}}_2 + \dots$$

Сумма, стоящая справа, есть главный вектор новой системы сил. Мы видим, что он равен главному вектору старой системы сил.

Переходим к главному моменту системы сил. Вспомним при этом одно из свойств момента силы.

Для сил, приложенных в одной точке,

$$\overline{\mathbf{M}}_B(\overline{\mathbf{F}}') + \overline{\mathbf{M}}_B(\overline{\mathbf{F}}'') \;=\; \overline{\mathbf{M}}_B(\overline{\mathbf{F}}_1)\,;$$

поэтому

$$\overline{\mathbf{L}}_B = \overline{\mathbf{M}}_B(\overline{\mathbf{F}}_1) + \overline{\mathbf{M}}_B(\overline{\mathbf{F}}_2) + \ldots =$$
$$= \overline{\mathbf{M}}_B(\overline{\mathbf{F}}\,') + \overline{\mathbf{M}}_B(\overline{\mathbf{F}}\,'') + \overline{\mathbf{M}}_B(\overline{\mathbf{F}}_2) + \ldots$$

Сумма, стоящая справа, есть главный момент новой системы сил.

Рассмотрим еще и главный вириал системы сил.

$$U_B = \underbrace{V_B(\overline{\mathbf{F}}_1)}_{V_B(\overline{\mathbf{F}}\,') + V_B(\overline{\mathbf{F}}\,'')} + V_B(\overline{\mathbf{F}}_2) + \ldots =$$
$$= V_B(\overline{\mathbf{F}}\,') + V_B(\overline{\mathbf{F}}\,'') + V_B(\overline{\mathbf{F}}_2) + \ldots$$

Здесь мы воспользовались одним из свойств вириала силы, по которому вириал суммы двух сил, приложенных в <u>*одной*</u> точке, равен сумме их вириалов. Такое свойство мы раньше не доказывали; сделаем это сейчас.

В самом деле, для сил, приложенных в одной точке:

$$V_B(\overline{\mathbf{F}}\,') + V_B(\overline{\mathbf{F}}\,'') = (\overline{\mathbf{r}}_{BA_1}, \overline{\mathbf{F}}\,') + (\overline{\mathbf{r}}_{BA_1}, \overline{\mathbf{F}}\,'') =$$
$$= (\overline{\mathbf{r}}_{BA_1}, \underbrace{\overline{\mathbf{F}}\,' + \overline{\mathbf{F}}\,''}_{\overline{\mathbf{F}}_1}) = V_B(\overline{\mathbf{F}}_1)\,.$$

Вывод: операции I типа не изменяют главный вектор, главный момент и главный вириал системы сил.

Запишем теперь другое определение.

<u>**Элементарная операция II типа**</u> – добавление или отбрасывание (по аксиомам II, III) двух сил с общей линией действия, равных по модулю и противоположных по направлению (или перенос одной из сил системы вдоль линии ее действия).

Мы видели, что аксиома о нуль-системе и аксиома о двух силах допускают такую операцию. Сразу после формулировки данных аксиом было доказано и следствие, по которому допускается перенос силы вдоль ее линии действия.

Рассмотрим, например, отбрасывание двух сил, образующих нуль-систему.

$$\{\,\overline{\mathbf{F}}_1.A_1,\, \overline{\mathbf{F}}_2.A_2,\, \overline{\mathbf{F}}_3.A_3,\, \ldots\} \;\backsim\; \{\,\overline{\mathbf{F}}_3.A_3,\, \ldots\}\,,$$

если $\overline{\mathbf{F}}_1 = -\overline{\mathbf{F}}_2\,,\ \overline{\mathbf{F}}_1 \parallel \overline{\mathbf{r}}_{A_1A_2}\,.$

Как ведут себя при этом основные характеристики системы сил?

$$\overline{\mathbf{R}} = \underbrace{\overline{\mathbf{F}}_1}_{-\overline{\mathbf{F}}_2} + \overline{\mathbf{F}}_2 + \overline{\mathbf{F}}_3 + \ldots = \overline{\mathbf{F}}_3 + \ldots\,;$$

$$\overline{\mathbf{L}}_B = \overline{\mathbf{M}}_B(\overline{\mathbf{F}}_1) + \overline{\mathbf{M}}_B(\overline{\mathbf{F}}_2) + \overline{\mathbf{M}}_B(\overline{\mathbf{F}}_3) + \ldots =$$

$$= [\,\overline{\mathbf{r}}_{BA_1}, \overline{\mathbf{F}}_1\,] + [\,\underbrace{\overline{\mathbf{r}}_{BA_2}}_{\overline{\mathbf{r}}_{BA_1} + \overline{\mathbf{r}}_{A_1A_2}}, \overline{\mathbf{F}}_2\,] + \overline{\mathbf{M}}_B(\overline{\mathbf{F}}_3) + \ldots =$$

$$= [\,\overline{\mathbf{r}}_{BA_1}, \underbrace{\overline{\mathbf{F}}_1 + \overline{\mathbf{F}}_2}_{0,\ \text{ибо}\ \overline{\mathbf{F}}_1 = -\overline{\mathbf{F}}_2}\,] + \underbrace{[\,\overline{\mathbf{r}}_{A_1A_2}, \overline{\mathbf{F}}_2\,]}_{0,\ \text{ибо}\ \overline{\mathbf{F}}_2 \parallel \overline{\mathbf{r}}_{A_1A_2}} + \overline{\mathbf{M}}_B(\overline{\mathbf{F}}_3) + \ldots =$$

$$= \overline{\mathbf{M}}_B(\overline{\mathbf{F}}_3) + \ldots$$

Вывод: операции II типа не изменяют главный вектор и главный момент системы сил; главный вириал может измениться.

Последнее утверждение вполне очевидно, если рассматривать такую операцию, как перенос силы вдоль линии ее действия. Ведь вириал, как мы знаем, как раз и характеризует положение точки приложения силы на линии действия.

Таким образом, в теории эквивалентных преобразований системы сил основную роль играют именно главный вектор и главный момент системы сил, которые сохраняются при элементарных операциях.

Понятие же главного вириала применяют в тех задачах, в которых информация о точках приложения сил является существенной.

Рассмотрим теперь один из способов замены системы сил на эквивалентную ей, но более простую систему.

2. Приведение системы сил к двум силам

Теорема. Любую систему сил при помощи элементарных операций можно привести к двум силам, одна из которых приложена в наперед заданной точке.

■ 1°. Если заданная точка O не является точкой приложения одной из сил системы, добавим к системе силу $\overline{\mathbf{F}}.O$, $\overline{\mathbf{F}} = 0$.

Уже отмечалось, что силу, вектор которой равен нулю, можно добавлять и отбрасывать, не меняя состояния тела. Такое добавление представляет собой элементарную операцию II типа.

Силы, входящие в систему, можно нумеровать в любом порядке. Нам будет удобно считать силу, приложенную к точке O, первой из сил системы.

Итак:

Имеем систему $\{\,\overline{\mathbf{F}}_1.O,\ \overline{\mathbf{F}}_2.A_2,\ \ldots,\ \overline{\mathbf{F}}_n.A_n\,\}$.

Теперь рассуждаем так.

2°. Если $n = 2$, теорема уже доказана.

Если $n = 1$, достаточно добавить где-либо нулевую силу.

Случай $n = 0$ мы исключили уже в пункте 1°.

Далее считаем, что $n \geqslant 3$.

3°. Введем обозначения: $\overline{\mathbf{F}}_{n-1}.A_{n-1} = \overline{\mathbf{P}}.A$, $\overline{\mathbf{F}}_n.A_n = \overline{\mathbf{Q}}.B$.

Таким образом, мы сейчас интересуемся только первой и двумя последними из сил системы. Чтобы не обременять себя индексами, мы упростили обозначения и самих сил, и точек их приложения.

Проведем плоскости через:

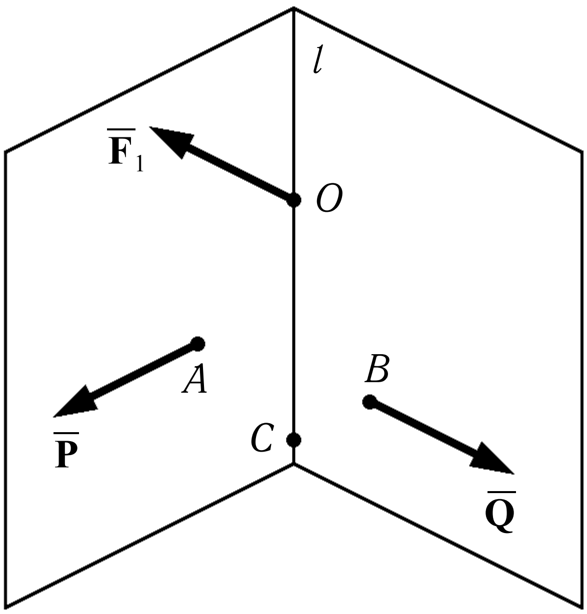
– $\overline{\mathbf{P}}$ и O;

– $\overline{\mathbf{Q}}$ и O.

На линии l пересечения плоскостей возьмем точку C, отличную от O.

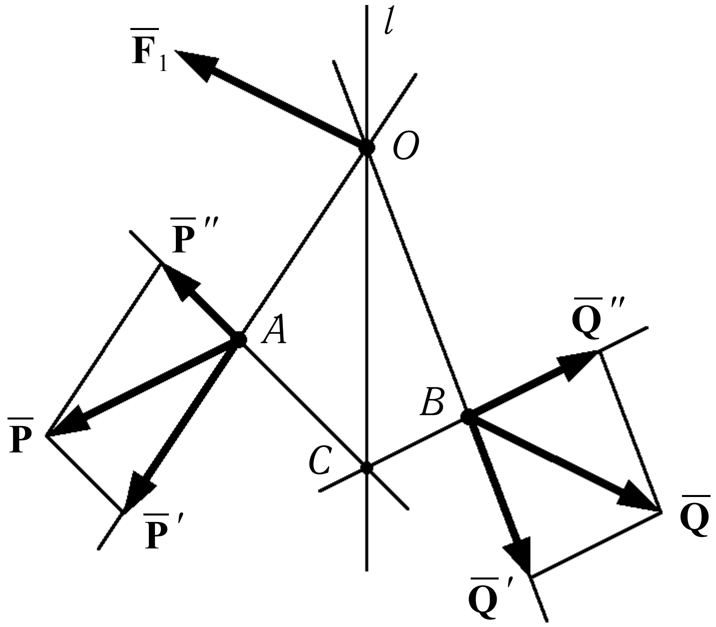
Фактически мы провели плоскость через начало и конец вектора $\overline{\mathbf{P}}$ и через точку O, т.е. через три точки. Если все три точки различны, то плоскость определена однозначно; если нет – возьмем какую-либо (произвольную) из проходящих через три точки плоскостей.

Все сказанное относится и ко второй плоскости. Две эти плоскости заведомо пересекаются, так как имеют общую точку O. Если же они совпадают, то за линию l можно взять любую из прямых, лежащих в данной плоскости и проходящих через точку O.



4°. Проведем прямые AO, BO, AC, BC и разложим:

$$\overline{\mathbf{P}} = \overline{\mathbf{P}}' + \overline{\mathbf{P}}'', \qquad \overline{\mathbf{Q}} = \overline{\mathbf{Q}}' + \overline{\mathbf{Q}}''.$$



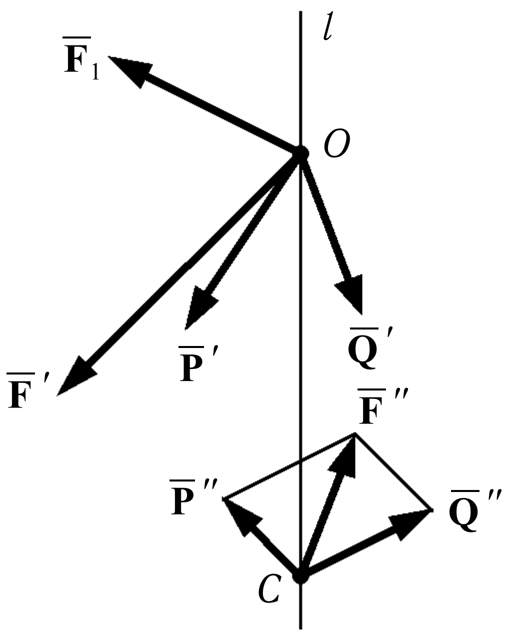
Таким образом, мы применили элементарную операцию I типа и представили каждую из сил $\overline{\mathbf{P}}$ и $\overline{\mathbf{Q}}$ в виде суммы двух составляющих.

5°. Перенесем $\overline{\mathbf{P}}'$ и $\overline{\mathbf{Q}}'$ вдоль линий действия в O и сложим с $\overline{\mathbf{F}}_1$:

$$\overline{\mathbf{F}}' = \overline{\mathbf{F}}_1 + \overline{\mathbf{P}}' + \overline{\mathbf{Q}}'.$$

Перенесем $\overline{\mathbf{P}}''$ и $\overline{\mathbf{Q}}''$ в C:

$$\overline{\mathbf{F}}'' = \overline{\mathbf{P}}'' + \overline{\mathbf{Q}}''.$$



Здесь мы использовали сначала элементарные операции II типа (перенос силы вдоль линии действия), а потом – операции I типа (сложение сил по правилу параллелограмма).

В результате система из трех сил $\overline{\mathbf{F}}_1$, $\overline{\mathbf{P}}$ и $\overline{\mathbf{Q}}$ преобразована в систему из двух сил $\overline{\mathbf{F}}\,'$ и $\overline{\mathbf{F}}\,''$.

Что же мы сейчас имеем?

6°. Исходная система заменена эквивалентной системой из $n-1$ силы: $\{\,\overline{\mathbf{F}}\,'.O,\ \overline{\mathbf{F}}_2.A_2,\ \ldots,\ \overline{\mathbf{F}}_{n-2}.A_{n-2},\ \overline{\mathbf{F}}\,''.C\,\}$.

Иными словами, число сил уменьшилось на единицу.

Если $n = 3$, теорема доказана.

Если $n > 3$, заменяем n на $n-1$ и возвращаемся к п. 6°.

Ясно, что для любого исходного значения n мы за конечное число шагов сведем систему к двум силам, на чем алгоритм и завершится.

В итоге получим:

$$\{\,\overline{\mathbf{F}}_1,\ \ldots,\ \overline{\mathbf{F}}_n\} \ \backsim\ \{\,\overline{\mathbf{F}}.O,\ \overline{\mathbf{G}}.D\,\}\,.$$

Если бы исходное число сил равнялось трем, то роль силы $\overline{\mathbf{F}}$ играла бы сила $\overline{\mathbf{F}}\,'$, роль силы $\overline{\mathbf{G}}$ – сила $\overline{\mathbf{F}}\,''$ и роль точки D – точка C. Вообще же на каждом шаге алгоритма силы меняются; но всегда точкой приложения первой из сил будет точка O. ■

Доказанная теорема имеет большое значение. Теперь мы, в частности, умеем решать любую задачу о равновесии твердого тела под действием заданной системы сил.

В самом деле, достаточно преобразовать эту систему к двум силам, а затем применить аксиому о двух силах: если две эти силы равны по модулю, противоположны по направлению и лежат на одной прямой, то равновесие будет иметь место, а иначе – нет.

Еще одно замечание, относящееся к данной теореме:

Теорема принадлежит Эйлеру (1765 г.).

Леонард Эйлер (1707 – 1783) – швейцарский математик и механик.

“Швейцарский” здесь означает только происхождение. 20-летним молодым ученым он приехал в Петербург, и всю оставшуюся жизнь (с некоторым перерывом) работал в России и Германии.

Вне всякого сомнения, это – ученый номер один и в математике, и в механике. Он явился основоположником многих разделов этих наук; список научных трудов Эйлера содержит около 850 названий.

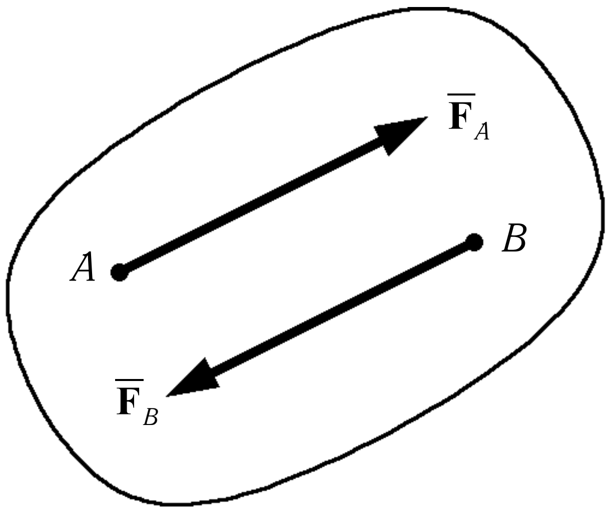
В механике Эйлер заложил основы динамики абсолютно твердого тела. Фундаментальным был и вклад Эйлера в статику и кинематику; о его результатах мы будем говорить еще не раз.

Изложенное здесь доказательство теоремы о приведении к двум силам дает конструктивный алгоритм такого преобразования. Однако в общем случае данная процедура оказывается громоздкой, так что задача преобразования системы сил к простейшему виду нуждается в дальнейшем исследовании.

3. Пара сил

Речь в этом пункте пойдет о системе из двух сил. Однако не всякая система из двух сил образует пару.

Пара сил – система двух сил, равных по модулю и противоположно направленных.



Из определения вытекает, что линии действия сил, образующих пару, обязательно параллельны. Через две параллельные прямые всегда можно провести плоскость.

Плоскость пары сил – плоскость, проходящая через линии их действия.

Естественно задать сразу же такой вопрос: может ли пара сил быть эквивалентна нулю?

По аксиоме о двух силах, пара сил эквивалентна нулю $\Leftrightarrow$ ее силы лежат на одной прямой.

В такой ситуации, разумеется, плоскость пары сил определяется неоднозначно. В частном случае, когда векторы сил пары равны нулю, также можно считать, что силы лежат на одной прямой.

Если же линии действия сил пары не совпадают, то пара сил нулю не эквивалентна. Таким образом, это – простейший пример такой системы сил, которую нельзя заменить одной силой, т.е. которая не сводится к равнодействующей.

Рассмотрим главный вектор и главный момент пары сил.

$$\overline{\mathbf{R}} = \overline{\mathbf{F}}_A + \overline{\mathbf{F}}_B = -\overline{\mathbf{F}}_B + \overline{\mathbf{F}}_B = 0 .$$

$$\overline{\mathbf{L}}_O = \overline{\mathbf{M}}_O(\overline{\mathbf{F}}_A) + \overline{\mathbf{M}}_O(\overline{\mathbf{F}}_B) = [\,\overline{\mathbf{r}}_{OA}, \underbrace{\overline{\mathbf{F}}_A}_{-\overline{\mathbf{F}}_B}\,] + [\,\underbrace{\overline{\mathbf{r}}_{OB}}_{\overline{\mathbf{r}}_{OA}+\overline{\mathbf{r}}_{OB}}, \overline{\mathbf{F}}_B\,] =$$

$$= \underbrace{-[\,\overline{\mathbf{r}}_{OA}, \overline{\mathbf{F}}_B\,] + [\,\overline{\mathbf{r}}_{OA}, \overline{\mathbf{F}}_B\,]}_{0} + [\,\overline{\mathbf{r}}_{AB}, \overline{\mathbf{F}}_B\,] \equiv \overline{\mathbf{M}}_A(\overline{\mathbf{F}}_B) .$$

Вывод: главный вектор пары сил равен нулю, а главный момент пары сил не зависит от выбора полюса.

Действительно, последнее выражение не зависит от того, где именно взят полюс O.

Поэтому вводится такая терминология.

Момент пары сил – *свободный* вектор, равный векторному произведению радиус-вектора точки приложения одной из сил пары, взятого относительно другой точки приложения, на эту силу:

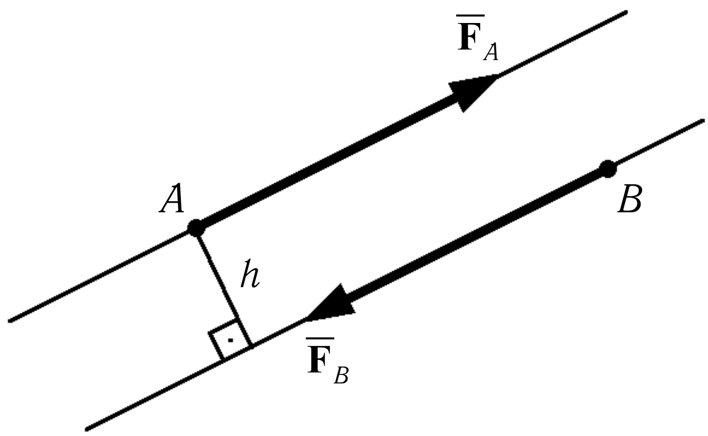
$$\overline{\mathbf{M}} \equiv \overline{\mathbf{M}}(\overline{\mathbf{F}}_A, \overline{\mathbf{F}}_B) = [\,\overline{\mathbf{r}}_{AB}, \overline{\mathbf{F}}_B\,] \equiv [\,\overline{\mathbf{r}}_{BA}, \overline{\mathbf{F}}_A\,] .$$

В последнем выражении оба сомножителя векторного произведения изменили знак, так что результат не изменился.

Мы только что видели, что главный момент пары сил относительно любого полюса один и тот же и равен моменту пары.

Особенно легко вычисляется модуль момента пары сил. В самом деле, введем такое определение:

Плечо пары сил – расстояние между линиями действия сил пары.



Расстояние между параллельными прямыми равно длине общего перпендикуляра к этим прямым. На рисунке за основание перпендикуляра взята точка приложения силы $\overline{\mathbf{F}}_A$.

Теперь вычисление модуля момента пары сил становится тривиальным.

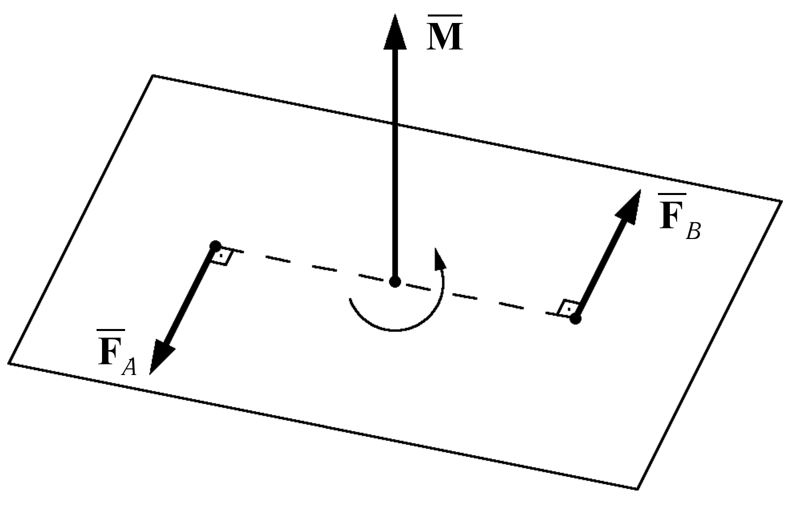
$$\left|\overline{\mathbf{M}}\right| = \left|\overline{\mathbf{M}}_A(\overline{\mathbf{F}}_B)\right| = F_B \cdot h \equiv F_A \cdot h .$$

Следствие. Пара сил эквивалентна нулю $\Leftrightarrow$ $h = 0$ $\Leftrightarrow$ $\overline{\mathbf{M}} = 0$.

Если же момент пары сил отличен от нуля, то эта пара сил нулю не эквивалентна.

Нетрудно вычислить и направление момента пары сил, поскольку этот момент равен моменту силы $\overline{\mathbf{F}}_B$ относительно точки A (а направление момента силы мы определять умеем). В результате получаем такое утверждение:

Момент пары ортогонален плоскости пары и направлен в ту сторону, откуда поворот, который стремится вызвать пара, виден происходящим против хода часовой стрелки.



В современной геометрической статике понятие пары сил играет, как мы сейчас увидим, важнейшую роль.

Понятие пары сил ввел в 1803 г. Пуансо, доказавший следующую теорему.

<u>**Теорема**</u> (о приведении системы сил к силе и паре). Любую систему сил при помощи элементарных операций можно привести к силе, приложенной в наперед заданной точке O (<u>*центре приведения*</u>), и к паре сил. При этом главный вектор $\overline{\mathbf{R}}$ равен вектору этой силы, а главный момент $\overline{\mathbf{L}}_O$ – моменту этой пары.

■ 1°. По теореме о приведении к двум силам:

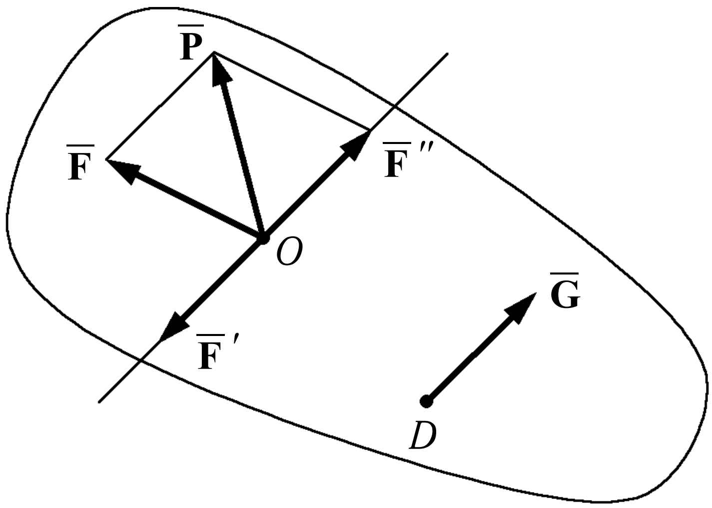
$$\{\overline{\mathbf{F}}_1, \ldots, \overline{\mathbf{F}}_n\} \backsim \{\overline{\mathbf{F}}.O, \overline{\mathbf{G}}.D\};$$

$\overline{\mathbf{R}}$ и $\overline{\mathbf{L}}_O$ сохраняются при элементарных операциях.

Значит, достаточно доказать нашу теорему для системы из двух сил.

2°. Добавим нуль-систему $\{\overline{\mathbf{F}}'.O, \overline{\mathbf{F}}''.O\}$, взяв $\overline{\mathbf{G}} = \overline{\mathbf{F}}' = -\overline{\mathbf{F}}''$, а затем сложим $\overline{\mathbf{F}}$ и $\overline{\mathbf{F}}'$:

$$\overline{\mathbf{P}} = \overline{\mathbf{F}} + \overline{\mathbf{F}}'.$$



Получили: $\{\overline{\mathbf{F}}, \overline{\mathbf{G}}\} \backsim \{\overline{\mathbf{P}}, \overline{\mathbf{G}}, \overline{\mathbf{F}}''\}$; сила $\overline{\mathbf{P}}$ и пара $\{\overline{\mathbf{P}}, \overline{\mathbf{G}}\}$ – искомые.

Действительно, силы $\overline{\mathbf{G}}$ и $\overline{\mathbf{F}}'$ образуют пару сил.

При этом:

$$\overline{\mathbf{R}} = \overline{\mathbf{P}} + \underbrace{\overline{\mathbf{G}} + \overline{\mathbf{F}}''}_{0} = \overline{\mathbf{P}},$$

$$\overline{\mathbf{L}}_O = \underbrace{\overline{\mathbf{M}}_O(\overline{\mathbf{P}})}_{0} + \overline{\mathbf{M}}_O(\overline{\mathbf{G}}) + \overline{\mathbf{M}}_O(\overline{\mathbf{F}}'') = \overline{\mathbf{M}}(\overline{\mathbf{G}}, \overline{\mathbf{F}}'').$$

■

Доказанную нами теорему иногда называют *основной теоремой статики*. В самом деле, она, во-первых, проясняет смысл понятий главного вектора и главного момента системы сил.

Во-вторых, с ее помощью можно получить необходимые и достаточные условия равновесия абсолютно твердого тела. Этим мы и займемся.

4. Условия равновесия АТТ

В свое время мы отмечали, что если к покоящемуся абсолютно твердому телу приложить какую-либо систему сил, то оно останется в равновесии тогда и только тогда, когда эта система сил является уравновешенной. Значит, сейчас наша цель – получить простые условия, при соблюдении которых система сил будет уравновешенной.

Теорема. Для того, чтобы произвольная система сил была уравновешенной, необходимо и достаточно, чтобы ее главный вектор и главный момент относительно произвольного полюса B были равны нулю:

$$(*) \qquad \boxed{\overline{\mathbf{R}} = 0\,, \quad \overline{\mathbf{L}}_B = 0}\,.$$

Упомянутый произвольный полюс (центр приведения) мы здесь обозначили буквой B, чтобы подчеркнуть, что он произволен и не обязан совпадать с началом неподвижной системы координат.

■ 1°. Необходимость.

Нам надо показать, что для уравновешенной системы сил всегда выполняются векторные равенства $(*)$.

Напомню, что про уравновешенную систему сил говорят, что она эквивалентна нулю.

Имеем: $\{\overline{\mathbf{F}}_1\,, \ldots, \overline{\mathbf{F}}_n\} \backsim 0\,.$

По теореме о приведении к двум силам:

$$\{\overline{\mathbf{F}}_1\,, \ldots, \overline{\mathbf{F}}_n\} \backsim \{\overline{\mathbf{F}}.B\,, \overline{\mathbf{G}}.D\}\,.$$

Используемые при таком приведении элементарные операции не меняют состояния тела, так что новая система сил тоже будет уравновешенной.

По аксиоме о двух силах:

$$\{\overline{\mathbf{F}}, \overline{\mathbf{G}}\} \backsim 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \overline{\mathbf{F}} = -\overline{\mathbf{G}}\,, \\ \overline{\mathbf{F}} \parallel \overline{BD}\,. \end{cases}$$

Первое равенство означает, что $\overline{\mathbf{R}} \equiv \overline{\mathbf{F}} + \overline{\mathbf{G}} = 0$, а силы $\overline{\mathbf{F}}$ и $\overline{\mathbf{G}}$ образуют пару. Поскольку она эквивалентна нулю, то

$$\overline{\mathbf{L}}_B \equiv \overline{\mathbf{M}}(\overline{\mathbf{F}}, \overline{\mathbf{G}}) = 0 .$$

Итак, оба векторных равенства действительно выполняются.

2°. Достаточность.

Исходим из равенств (∗).

Нужно показать, что система сил эквивалентна нулю, т.е. является уравновешенной.

По теореме о приведении к силе и паре:

$$\{\overline{\mathbf{F}}_1, \ldots, \overline{\mathbf{F}}_n\} \backsim \{\overline{\mathbf{P}}.B, \overline{\mathbf{G}}.D, \overline{\mathbf{F}}''.B\},$$

где $\{\overline{\mathbf{G}}, \overline{\mathbf{F}}''\}$ – пара сил.

Для наглядности я использовал обозначения из доказательства упомянутой теоремы.

Но $\overline{\mathbf{P}} = \overline{\mathbf{R}} = 0$, и силу $\overline{\mathbf{P}}$ можно отбросить.

Итак, $\{\overline{\mathbf{F}}_1, \ldots, \overline{\mathbf{F}}_n\} \backsim \{\overline{\mathbf{G}}, \overline{\mathbf{F}}''\}$. Для этой пары сил

$$\overline{\mathbf{M}}(\overline{\mathbf{G}}, \overline{\mathbf{F}}'') = \overline{\mathbf{L}}_B = 0 .$$

Поэтому $\{\overline{\mathbf{G}}, \overline{\mathbf{F}}''\} \backsim 0$, т.е.

$$\{\overline{\mathbf{F}}_1, \ldots, \overline{\mathbf{F}}_n\} \backsim 0 . \qquad \blacksquare$$

При решении конкретных задач удобнее пользоваться развернутой записью условий (∗), получаемой с учетом определений главного вектора и главного момента.

Перепишем (∗) в виде:

$$(**) \qquad \sum_k \overline{\mathbf{F}}_k = 0 , \quad \sum_k \overline{\mathbf{M}}_B(\overline{\mathbf{F}}_k) = 0 .$$

Это – векторная форма <u>*уравнений равновесия*</u> произвольной пространственной системы сил.

В силу доказанной нами теоремы их выполнение является необходимым и достаточным условием уравновешенности системы сил. Одновременно их можно рассматривать и как условия равновесия того абсолютно твердого тела, к которому эти силы приложены.

Строго говоря, соотношения (∗∗) могут рассматриваться как уравнения лишь в тех случаях, когда среди сил системы есть неизвестные (для их нахождения данные уравнения и используются). Если же все силы заданы, то соотношения (**) должны обратиться в тождества; в противном случае никакого равновесия не будет.

А сейчас – в качестве следствий из теоремы об условиях равновесия абсолютно твердого тела – мы получим уже *скалярные* уравнения равновесия системы сил (как в общем случае, так и в наиболее важных частных случаях).

Пусть xyz – произвольная декартова система координат.

Я не указал, где находится начало этой системы координат (его можно поместить и в точку B, и в какую-нибудь другую точку O). Это сейчас не имеет значения, поскольку нас будут интересовать проекции векторов на данные оси, а не координаты каких-либо точек, где выбор начала координат был бы существенным.

Следствие 1. Уравнения равновесия произвольной пространственной системы сил в скалярной форме:

$$
\begin{aligned}
x:&\quad \sum_k F_{kx} = 0\,,\\
y:&\quad \sum_k F_{ky} = 0\,,\\
z:&\quad \sum_k F_{kz} = 0\,,\\
M_{Bx}:&\quad \sum_k M_{Bx}(\overline{\mathbf{F}}_k) = 0\,,\\
M_{By}:&\quad \sum_k M_{By}(\overline{\mathbf{F}}_k) = 0\,,\\
M_{Bz}:&\quad \sum_k M_{Bz}(\overline{\mathbf{F}}_k) = 0\,.
\end{aligned}
$$

Получены данные уравнения проектированием векторных равенств (**) на координатные оси. Два векторных равенства при этом заменяются *шестью* скалярными.

Слева от уравнений проставлены условные метки, которые напоминают о смысле соответствующих уравнений. Речь идет о проекциях главного вектора системы сил на оси x, y, z и о проекциях главного момента на те же оси.

Когда мы записываем уравнения равновесия в общем виде (как сейчас), то данные метки являются излишними. Однако они оказываются полезными, если все проекции заменить их конкретными выражениями.

Заметим еще, что если за начало координат все-таки принять полюс B, то слагаемые, входящие в три последних уравнения, можно трактовать и как моменты сил относительно координатных осей.

Если рассматривается задача о равновесии *системы* твердых тел, то указанные шесть уравнений составляются для каждого тела. Общее число уравнений равновесия будет в шесть раз больше количества тел.

Теперь рассмотрим частный случай.

Пусть система сил – *плоская*, и полюс B вместе с осями x и y лежит в той же плоскости, что и силы.

При этом ось z будет ортогональна данной плоскости.

Следствие 2. Уравнения равновесия плоской системы сил:

$$x: \ \sum_k F_{kx} = 0 \,,$$

$$y: \ \sum_k F_{ky} = 0 \,,$$

$$M_B: \ \sum_k M_{Bz}(\overline{\mathbf{F}}_k) = 0 \,.$$

Именно с этими уравнениями Вы встретились на первом практическом занятии. Букву "z" в условной метке уравнения моментов мы опустили, поскольку мы имеем дело с проекциями моментов только на одну эту ось.

В самом деле, $\forall k \ \ \overline{\mathbf{F}}_k \perp Bz$ и $\overline{\mathbf{M}}_B(\overline{\mathbf{F}}_k) \parallel Bz$, так что остальные три уравнения обратились в тождества.

Значит, эти уравнения в случае плоской системы сил можно вообще не учитывать.

Моменты сил параллельны оси z, поскольку и векторы сил, и радиус-векторы их точек приложения, вычисленные относительно полюса B, лежат в плоскости xy, а векторы моментов ортогональны данным векторам.

Следующий частный случай:

Пусть дана система *параллельных* сил: $\forall k \ \ \overline{\mathbf{F}}_k \parallel Bz$.

Следствие 3. Уравнения равновесия системы параллельных сил:

$$z: \ \sum_k F_{kz} = 0 \,,$$

$$M_{Bx}: \ \sum_k M_{Bx}(\overline{\mathbf{F}}_k) = 0 \,,$$

$$M_{By}: \ \sum_k M_{By}(\overline{\mathbf{F}}_k) = 0 \,.$$

В самом деле, $\forall k \ \ \overline{\mathbf{F}}_k \parallel Bz$ и $\overline{\mathbf{M}}_B(\overline{\mathbf{F}}_k) \perp Bz$.

Вновь три уравнения из шести обратились в тождества, и их можно вообще не учитывать. Но, в отличие от случая плоской системы сил, в тождества обращаются уже другие уравнения.

И, наконец, последний частный случай:

Пусть система сил – <u>*сходящаяся*</u>, и линии действия всех сил проходят через B.

<u>Следствие 4.</u> Уравнения равновесия сходящейся системы сил:

$$x: \quad \sum_k F_{kx} \;=\; 0\,,$$

$$y: \quad \sum_k F_{ky} \;=\; 0\,,$$

$$z: \quad \sum_k F_{kz} \;=\; 0\,.$$

В самом деле, $\forall k \quad \overline{\mathbf{M}}_B(\overline{\mathbf{F}}_k) \;=\; 0\,.$

Действительно, момент силы обращается в нуль тогда и только тогда, когда линия действия проходит через полюс, что сейчас и выполняется.

Три скалярных уравнения равновесия сейчас вполне можно заменить одним векторным.

Условие равновесия для сходящейся системы сил:

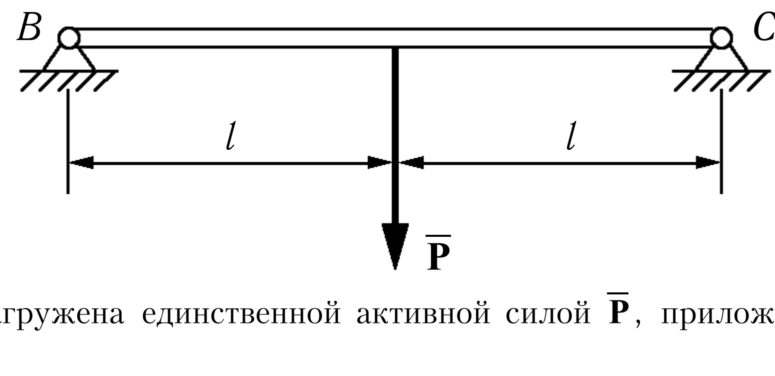
$$\overline{\mathbf{R}} \;=\; 0\,.$$

Возможны комбинированные случаи, когда система параллельных сил или же сходящаяся система сил одновременно оказывается и плоской системой сил. В этих случаях остаются <u>*два*</u> нетривиальных уравнения равновесия. Какие именно – Вы легко сможете установить сами, а мы на этом задерживаться не будем.

Для чего нужны уравнения равновесия – в общем-то, понятно: из этих уравнений можно найти неизвестные силы, обеспечивающие равновесие твердых тел. Обычно – но не всегда – этими неизвестными силами будут реакции связей.

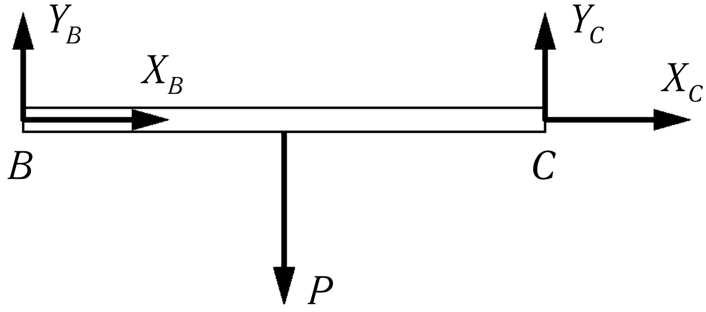
Рассмотрим пример.

<u>Пример.</u> Рассмотрим равновесие невесомой балки, закрепленной на концах вращательными шарнирами.



Балка нагружена единственной активной силой $\overline{\mathbf{P}}$, приложенной посередине.

Заметим, что система сил в этой задаче будет плоской. Поскольку в задаче имеются связи, освободимся от них, вводя реакции связей.



Составим уравнения равновесия для плоской системы сил:

$$(1) \qquad x: \quad X_B + X_C = 0$$

$$(2) \qquad y: \quad Y_B + Y_C - P = 0$$

$$(3) \qquad M_B: \quad Y_C \cdot 2l - P \cdot l = 0$$

Решаем эту систему:

$$(3) \quad \Rightarrow \quad Y_C = P/2\,, \qquad (2) \quad \Rightarrow \quad Y_B = P/2\,.$$

А что дальше? Сумма сил X_B и X_C равна нулю; значит, проекции их на ось x равны по модулю и противоположны по знаку. Но о том, чему равны их модули, мы ничего сказать не можем. Запишем:

Силы X_B и X_C порознь найти нельзя.

В чем здесь причина? В том, что число неизвестных (их – четыре) больше, чем число уравнений (а их – три).

В такой ситуации (нередко встречающейся на практике) используют такую терминологию.

Задача статики – **статически определимая**, если число неизвестных не превосходит числа уравнений равновесия.

Формально условие статической определимости можно записать так:

Если в задаче N тел и m неизвестных, то в статически определимой задаче:

– $m \leqslant 3N$ (плоский случай);

– $m \leqslant 6N$ (пространственный случай).

В примере: $N = 1$, $m = 4$; $4 > 3 \cdot 1 \;\Rightarrow$ задача статически неопределимая.

Заметьте, что часть неизвестных мы все-таки нашли. Это – достаточно типичная ситуация; если бы нас интересовали только силы Y_B и Y_C, то задачу все равно можно считать решенной.

В общем же случае для решения статически неопределимых задач надо отказаться от гипотезы абсолютно твердого тела и учитывать *деформации* тел, вызванные внешними нагрузками. Таким образом, полное решение подобных задач возможно, если от методов теоретической механики перейти к методам механики деформируемого твердого тела.

Мы получили условия равновесия абсолютно твердого тела. Сейчас, используя эти условия, получим общий критерий эквивалентности двух систем сил.

5. Критерий эквивалентности систем сил

Под словом "критерий" понимается необходимое и достаточное условие чего-либо.

Теорема. Любые две системы сил эквивалентны $\Leftrightarrow$ у них равны главные векторы и главные моменты (относительно произвольного полюса O).

■

Начнем с некоторых предварительных рассуждений.

1°. Обозначим главный вектор и главный момент системы $\{\overline{\mathbf{F}}_1.A_1, \dots, \overline{\mathbf{F}}_n.A_n\}$ через $\overline{\mathbf{R}}$ и $\overline{\mathbf{L}}_O$, а системы $\{\overline{\mathbf{P}}_1.B_1, \dots, \overline{\mathbf{P}}_m.B_m\}$ – через $\overline{\mathbf{R}}'$ и $\overline{\mathbf{L}}'_O$.

Теперь рассмотрим одну вспомогательную систему сил. Именно, запишем следующее утверждение:

Применяя n раз аксиому о двух силах, убеждаемся, что

$$(*) \qquad \{\overline{\mathbf{F}}_1.A_1, \dots, \overline{\mathbf{F}}_n.A_n, -\overline{\mathbf{F}}_1.A_1, \dots, -\overline{\mathbf{F}}_n.A_n\} \backsim 0 .$$

Приступим к доказательству необходимости и достаточности сформулированного в теореме условия.

2°. Необходимость.

Пусть $\{\overline{\mathbf{F}}_1, \dots, \overline{\mathbf{F}}_n\} \backsim \{\overline{\mathbf{P}}_1, \dots, \overline{\mathbf{P}}_m\}$.

Теперь вспомним, что две системы сил называются эквивалентными, если одну из них можно заменить другой, не меняя состояния покоя или движения твердого тела.

Заменим в $(*)$ совокупность сил $\{\overline{\mathbf{F}}_1, \dots, \overline{\mathbf{F}}_n\}$ на $\{\overline{\mathbf{P}}_1, \dots, \overline{\mathbf{P}}_m\}$.

$$(**) \qquad \{\overline{\mathbf{P}}_1, \dots, \overline{\mathbf{P}}_m, -\overline{\mathbf{F}}_1, \dots, -\overline{\mathbf{F}}_n\} \backsim 0 .$$

Итак, система сил $(**)$ является нуль-системой, т.е. уравновешена. Воспользуемся теперь теоремой об условиях равновесия абсолютно твердого тела.

Условия равновесия для системы $(**)$:

$$\overline{\mathbf{R}}^{**} \equiv \overline{\mathbf{R}}' - \overline{\mathbf{R}} = 0\,,$$
$$\overline{\mathbf{L}}_O^{**} \equiv \overline{\mathbf{L}}_O' - \overline{\mathbf{L}}_O = 0\,.$$

Итак, $\overline{\mathbf{R}} = \overline{\mathbf{R}}'$ и $\overline{\mathbf{L}}_O = \overline{\mathbf{L}}_O'$.

3°. Достаточность.

Пусть $\overline{\mathbf{R}} = \overline{\mathbf{R}}'$, $\overline{\mathbf{L}}_O = \overline{\mathbf{L}}_O'$.

Вновь рассмотрим вспомогательную систему сил $(**)$.

Имеем: $\overline{\mathbf{R}}^{**} = 0$ и $\overline{\mathbf{L}}_O^{**} = 0$, так что система $(**)$ – нуль-система.

По аксиоме о нуль-системе, добавим систему $(**)$ к 1-й системе:

$$\{\overline{\mathbf{F}}_1, \ldots, \overline{\mathbf{F}}_n\} \backsim \{\overline{\mathbf{F}}_1, \ldots, \overline{\mathbf{F}}_n, \overline{\mathbf{P}}_1, \ldots, \overline{\mathbf{P}}_m,$$
$$-\overline{\mathbf{F}}_1, \ldots, -\overline{\mathbf{F}}_n\} \backsim \{\overline{\mathbf{P}}_1, \ldots, \overline{\mathbf{P}}_m\}\,;$$

здесь была отброшена нуль-система $(*)$. ■

Вывод: главный вектор и главный момент *<u>полностью</u>* (с точностью до эквивалентности) характеризуют систему сил.

Важный частный случай доказанной нами теоремы получается, если применить ее к парам сил.

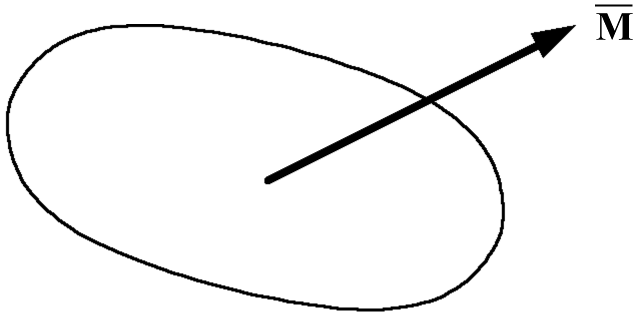
<u>Следствие.</u> Любые две пары сил эквивалентны $\Leftrightarrow$ их моменты равны.

В самом деле, сейчас главные векторы заведомо равны нулю, а моменты пар сил – это и есть их главные моменты (какой бы полюс мы не взяли).

Вывод: пара сил *<u>полностью</u>* (с точностью до эквивалентности) характеризуется своим моментом.

В соответствии с этим в задачах, где фигурируют пары сил, принято задавать (и изображать на рисунках) не сами силы, составляющие эти пары, а только векторы моментов каждой из пар.

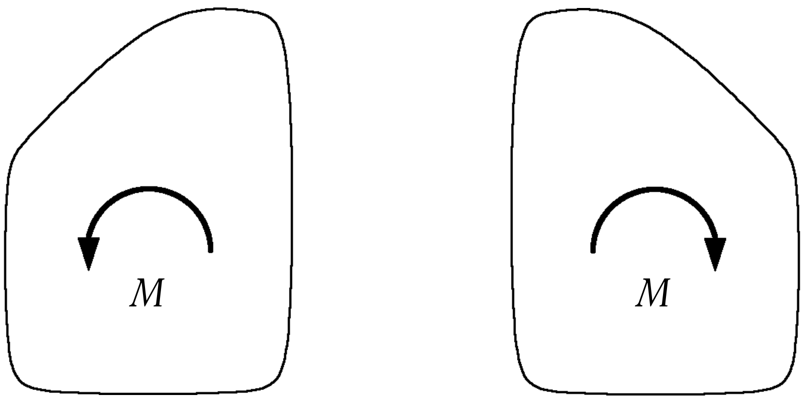
Изображение пары сил:



Поскольку момент пары сил – это свободный вектор, то нарисовать его можно в любой точке. Для наглядности, впрочем, лучше не выходить за пределы места, занимаемого телом.

В случае плоской системы сил вектор момента пары ортогонален плоскости рисунка, и его принято изображать дугой со стрелкой на конце. Рядом с дугой проставляют обозначение модуля этого вектора.

В плоских задачах:

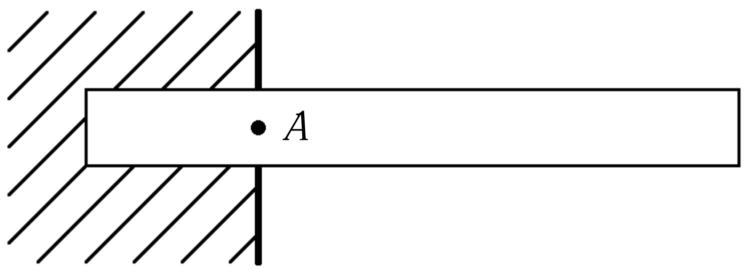


Действует обычное правило о положительном и отрицательном направлениях вращения: если дуга ориентирована против хода часовой стрелки, то вектор момента направлен на наблюдателя (и его проекция на ось z положительна); если же дуга ориентирована по ходу часовой стрелки, то вектор момента направлен от наблюдателя (и его проекция на ось z отрицательна).

В соответствии с этим вместо вполне корректного выражения "на тело действует пара сил с моментом $\overline{\mathbf{M}}$" часто, допуская вольность речи, говорят: "на тело действует момент $\overline{\mathbf{M}}$". Язык, как всегда, стремится к лаконичности – даже в ущерб точности. Такой способ выражаться вполне укоренился, и поэтому приемлем (но только при условии, что говорящий отчетливо осознает, что на самом деле имеется в виду).

При освобождении тел от наложенных связей возникающие реакции также могут приводиться не только к силам, но и к парам сил.

<u>Пример</u>: жесткая заделка (плоский случай). Рассмотрим балку, конец которой заделан в стену.



Здесь предполагается, что на балку действует какая-то система активных сил, лежащих в плоскости рисунка (они не нарисованы).

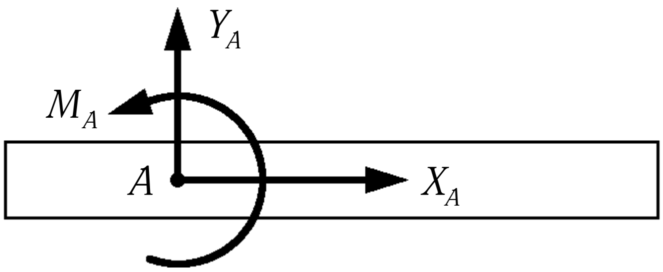
Предполагается также, что балка заделана "намертво" (зацементирована). В этом случае со стороны стенки на балку действует целая система сил; но данную систему мы можем привести к силе, которая приложена, скажем, в точке A, и к паре сил.

Как и в случае вращательного шарнира, связь запрещает точке A сместиться куда бы то ни было. Значит, приложенная в этой точке реакция может быть направлена произвольно и представляется (в плоской задаче) двумя составляющими.

Но – в отличие от случая шарнира – теперь запрещен еще и поворот балки вокруг точки A. Этому повороту препятствует упомянутая пара сил.

В итоге получаем следующий рецепт введения реакций связей в данной ситуации.

При отбрасывании данной связи ее действие заменяется *реакциями заделки*: силой $\overline{\mathbf{R}}_A \equiv \overline{\mathbf{X}}_A + \overline{\mathbf{Y}}_A$ и парой сил с моментом $\overline{\mathbf{M}}_A$:



Все стрелки здесь изображены ориентированными положительно. Это, разумеется, чистая условность: связь – двусторонняя, и знак у величин X_A, Y_A и M_A может оказаться любым.

Все определяется теми активными силами, которые действуют на балку. Если бы таких сил вообще не было, то значения величин X_A, Y_A, M_A были бы равны нулю. В общем же случае значения данных величин могут оказаться любыми, поскольку реакции заделки способны уравновесить *любую* систему активных сил.

Теперь вернемся к основной теме данного параграфа – к вопросу о приведении системы сил к простейшему виду.

6. Силовой винт

Давайте подытожим: чего мы достигли к настоящему моменту?

По теореме о приведении системы сил к силе и паре сил, мы всякую систему сил можем заменить эквивалентной ей системой из силы, приложенной в произвольно выбранном центре приведения, и пары сил. А по критерию эквивалентности систем сил, всякая система сил полностью (с точностью до эквивалентности) характеризуется своими главным вектором и главным моментом.

Такая характеризация включает, однако, определенный произвол, так как за центр приведения можно взять любую точку. Чтобы избавиться от подобного произвола, в математике есть стандартный прием: все возможные способы выбора рассматриваются одновременно. Иначе говоря, центр приведения мы будем считать переменным.

Если центр приведения изменяется, то главный вектор системы сил остается неизменным, а главный момент – меняется по уже известному нам закону (у нас была формула, описывающая изменение главного момента при смене полюса; чуть позже я ее Вам напомню).

Таким образом, вектор главного момента в каждой точке – свой. В математике в подобных случаях говорят, что в пространстве задано векторное поле.

Векторное поле – функция, зависящая от точки пространства, значениями которой являются векторы: $\bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{u}}\,(B)$.

В качестве аргумента здесь указана произвольная точка пространства, обозначенная буквой B.

Итак:

Произвольная система сил однозначно (с точностью до эквивалентности) характеризуется свободным вектором $\overline{\mathbf{R}}$ и векторным полем $\overline{\mathbf{L}} = \overline{\mathbf{L}}\,(B) \equiv \overline{\mathbf{L}}_B$.

Аргумент B можно указывать по-разному: и в виде индекса, как мы делали до сих пор, и в скобках – как аргумент функции.

Значения поля $\overline{\mathbf{L}} = \overline{\mathbf{L}}\,(B)$ в различных точках связаны соотношением

(*)
$$\overline{\mathbf{L}}_O = \overline{\mathbf{L}}_B + [\,\bar{\mathbf{r}}_{OB}, \overline{\mathbf{R}}\,]\,.$$

Эта формула, напомню, выражает собой содержание теоремы об изменении главного момента при смене полюса.

Используют такую терминологию:

Совокупность свободного вектора $\overline{\mathbf{R}}$ и векторного поля $\overline{\mathbf{L}} = \overline{\mathbf{L}}\,(B)$, удовлетворяющего (*), называется **силовым винтом**.

Выражение "силовой винт" надо понимать как термин. Какое отношение это имеет к обычным винтам, на которые накручиваются гайки, мы бегло обсудим позднее. В математическом плане силовые винты – это вовсе не тела, а объекты, изучение которых относится к линейной алгебре.

Замечание. В линейной алгебре **винтом** называют произвольную совокупность свободного вектора $\bar{\mathbf{u}}$ и векторного поля $\bar{\mathbf{u}}^\circ = \bar{\mathbf{u}}^\circ(B) \equiv \bar{\mathbf{u}}^\circ_B$, удовлетворяющих соотношению

$$\bar{\mathbf{u}}^\circ_O = \bar{\mathbf{u}}^\circ_B + [\,\bar{\mathbf{r}}_{OB}, \bar{\mathbf{u}}\,]\,.$$

Но мы пока будем говорить только о силовых винтах (и для краткости обычно будем опускать прилагательное "силовой"). А вообще в механике встречаются еще кинематические винты (в кинематике) и кинетические винты (в динамике).

При работе со всеми этими объектами оказывается полезной их единая трактовка. Соответствующий математический аппарат развит в разделе линейной алгебры, который так и называется: “теория винтов”. Его появление и основные приложения связаны прежде всего с запросами механики.

Небольшая справка:

Роберт Столуэлл Болл (1840 – 1913) – английский математик и механик, основоположник теории винтов.

1876 г.: R.S.Ball. “The Theory of Screws”.

Это – первая монография Болла по теории винтов.

Векторное поле, фигурирующее в определении силового винта, это – поле весьма специального вида. В силу соотношения (∗) оно полностью определено, если известно его значение в одной-единственной точке пространства.

Говорят так:

Главный вектор винта $\overline{\mathbf{R}}$ и момент винта $\overline{\mathbf{L}}_B$ – **элементы приведения** силового винта относительно точки B.

Эти векторы одновременно являются главным вектором и главным моментом системы сил. Поэтому утверждение, записанное нами в начале пункта, можно сформулировать так:

Произвольная система сил однозначно (с точностью до эквивалентности) характеризуется своим силовым винтом.

При смене центра приведения элементы приведения силового винта меняются. Что остается неизменным?

Главный вектор винта $\overline{\mathbf{R}}$ не зависит от выбора центра приведения: $\overline{\mathbf{R}} = \mathrm{inv}$. Это – *первый статический инвариант*.

Говорят еще: “первый инвариант силового винта”. Вообще “инвариантом” в математике называют всякую величину, которая не меняется при преобразованиях определенного вида.

Винт называется **вырожденным**, если его главный вектор равен нулю.

Немного позже мы убедимся, что такая терминология вполне разумна.

Исходя из главного вектора $\overline{\mathbf{R}}$, можно получить ряд других инвариантов, которые уже, правда, не будут независимыми. Например:

$$(\overline{\mathbf{R}}, \overline{\mathbf{R}}) = \mathrm{inv}\,, \quad |\overline{\mathbf{R}}| \equiv \sqrt{(\overline{\mathbf{R}}, \overline{\mathbf{R}})} = \mathrm{inv}\,.$$

Но у любого винта есть еще один инвариант – независимый от первого. Он является уже не вектором, а скаляром.

Второй статический инвариант: $(\overline{\mathbf{L}}_B, \overline{\mathbf{R}}) = \mathrm{inv}$.

Иными словами, утверждается: скалярное произведение момента винта на его главный вектор не зависит от выбора точки приведения.

В самом деле, в силу $(*)$:

$$(\bar{\mathbf{L}}_O , \bar{\mathbf{R}}) \;=\; (\bar{\mathbf{L}}_B , \bar{\mathbf{R}}) + (\underbrace{[\bar{\mathbf{r}}_{OB} , \bar{\mathbf{R}}]}_{\perp \bar{\mathbf{R}}} , \bar{\mathbf{R}}) \;=\; (\bar{\mathbf{L}}_B , \bar{\mathbf{R}}) \,.$$

Понятие о статических инвариантах нам потребуется чуть позже, когда с их помощью мы получим полезную классификацию силовых винтов. А пока обсудим вот какой вопрос.

Теорема о приведении системы сил к силе и паре позволяет упростить эту систему, представив ее в виде силы, приложенной в некотором центре приведения, и пары сил. Но нельзя ли добиться еще большего упрощения, выбрав центр приведения специальным образом? Оказывается, можно.

Говорят, что получено **<u>стандартное представление</u>** системы сил, если сила приведена к таким силам $\bar{\mathbf{R}}.B$ и паре с моментом $\bar{\mathbf{L}}_B$, что $\bar{\mathbf{L}}_B \parallel \bar{\mathbf{R}}$.

Термин "коллинеарный" в применении к векторам означает, как Вы знаете, что эти векторы лежат на одной прямой. Поскольку вектор $\bar{\mathbf{R}}$ – свободный, то его можно приложить где угодно – а значит, и в точке B, где приложен вектор $\bar{\mathbf{L}}_B$. В силу условия параллельности он будет располагаться на той же прямой, что и вектор $\bar{\mathbf{L}}_B$.

Очевидное замечание:

При переносе центра приведения <u>*вдоль*</u> главного вектора момент винта не меняется: $\bar{\mathbf{L}}_O = \bar{\mathbf{L}}_B + [\bar{\mathbf{r}}_{OB} , \bar{\mathbf{R}}] = \bar{\mathbf{L}}_B$, если $\bar{\mathbf{r}}_{OB} \parallel \bar{\mathbf{R}}$.

В самом деле, векторное произведение в этом случае обращается в нуль.

Поэтому, если $\bar{\mathbf{L}}_B \parallel \bar{\mathbf{R}}$, то для любой точки O, взятой на оси, которая проходит через B в направлении векторов $\bar{\mathbf{R}}$ и $\bar{\mathbf{L}}_B$, имеем: $\bar{\mathbf{L}}_O \parallel \bar{\mathbf{R}}$.

Упомянутая ось носит особое название.

Ось, для любой точки которой элементы приведения винта коллинеарны, называется **<u>осью винта</u>** (или **<u>центральной осью системы сил</u>**).

<u>Лемма</u> (об оси невырожденного винта). Если B – заданный центр приведения, то ближайшую к нему точку C на оси невырожденного винта можно найти так:

$$\boxed{\bar{\mathbf{r}}_{BC} = \frac{[\bar{\mathbf{R}} , \bar{\mathbf{L}}_B]}{(\bar{\mathbf{R}} , \bar{\mathbf{R}})}} \,.$$

Пока мы, правда, еще не знаем, для всякого ли невырожденного винта имеется ось, и однозначно ли она определена. Это мы покажем позднее, а пока утверждение леммы будем понимать так: если ось винта существует, то она характеризуется указанным свойством.

■ Так как точка C лежит на оси винта l, то система сил приводится к силе $\overline{\mathbf{F}}.C$ и паре с моментом $\overline{\mathbf{M}}$, для которых $\overline{\mathbf{F}} = \overline{\mathbf{R}} \neq 0$ и $\overline{\mathbf{L}}_C = \overline{\mathbf{M}}$, причем $l \parallel \overline{\mathbf{F}}$ и $\overline{\mathbf{M}} \parallel \overline{\mathbf{F}}$.

При этом l есть линия действия силы $\overline{\mathbf{F}}$.

Действительно, эта ось проходит через точку приложения силы $\overline{\mathbf{F}}$ и направлена вдоль вектора этой силы.

Положение ближайшей к полюсу B точки на линии действия силы дается формулой:

$$\bar{\mathbf{r}}_{BC} = \frac{[\,\overline{\mathbf{F}},\ \overline{\mathbf{M}}_B(\overline{\mathbf{F}})\,]}{(\overline{\mathbf{F}},\overline{\mathbf{F}})}\ .$$

Эту формулу мы получали, когда обсуждали вопрос о нахождении точки приложения силы по известным вектору и моменту силы.

Но $\overline{\mathbf{L}}_B = \overline{\mathbf{M}}_B(\overline{\mathbf{F}}) + \overline{\mathbf{M}}$; поэтому

$$\bar{\mathbf{r}}_{BC} = \frac{[\,\overline{\mathbf{F}},\ \overline{\mathbf{L}}_B - \overline{\mathbf{M}}\,]}{(\overline{\mathbf{F}},\overline{\mathbf{F}})} = \frac{[\,\overline{\mathbf{F}},\ \overline{\mathbf{L}}_B\,]}{(\overline{\mathbf{F}},\overline{\mathbf{F}})} - \frac{[\,\overline{\mathbf{F}},\ \overline{\mathbf{M}}\,]}{(\overline{\mathbf{F}},\overline{\mathbf{F}})} =$$

$$= \frac{[\,\overline{\mathbf{F}},\ \overline{\mathbf{L}}_B\,]}{(\overline{\mathbf{F}},\overline{\mathbf{F}})} \equiv \frac{[\,\overline{\mathbf{R}},\ \overline{\mathbf{L}}_B\,]}{(\overline{\mathbf{R}},\overline{\mathbf{R}})}\ ,$$

поскольку $\overline{\mathbf{F}} = \overline{\mathbf{R}}$ и $[\,\overline{\mathbf{F}},\ \overline{\mathbf{M}}\,] = 0$ (так как $\overline{\mathbf{F}} \parallel \overline{\mathbf{M}}$).

Нужная нам формула доказана. ■

Поскольку вычислять для конкретной системы сил ее главный вектор и главный момент мы умеем, то нахождение оси винта (или, что то же самое, центральной оси системы сил) для нас более никакой проблемы не составляет.

Получим, например, уравнения этой оси.

Так как $\overline{\mathbf{R}}$ – направляющий вектор центральной оси системы сил, то получаем ее канонические уравнения:

$$\frac{x - x_B}{R_x} = \frac{y - y_B}{R_y} = \frac{z - z_B}{R_z}\ ;$$

здесь $x_C = x_B + r_{BC_x}$, и т.д.

Через x, y, z обозначены, как обычно, текущие координаты произвольной точки оси. Предполагается, конечно, что вектор $\overline{\mathbf{r}}_{BC}$ мы находим, пользуясь формулой из доказанной нами леммы.

Полученные уравнения имеют такой же вид, как и известные Вам канонические уравнения линии действия силы. На получении параметрических уравнений оси винта мы останавливаться не будем.

7. Различные случаи приведения системы сил

Выясним окончательно, каково стандартное представление различных систем сил.

Пусть первый статический инвариант системы сил равен нулю: $\overline{\mathbf{R}} = 0$ (случай *вырожденного* силового винта).

Очевидное утверждение:

Тогда и второй статический инвариант равен нулю: $(\overline{\mathbf{L}}_B, \overline{\mathbf{R}}) = 0$.

Момент винта при этом тоже будет инвариантом:

$$\overline{\mathbf{L}}_O = \overline{\mathbf{L}}_B + [\overline{\mathbf{r}}_{OB}, \overline{\mathbf{R}}] \equiv \overline{\mathbf{L}}_B .$$

Анализируя значения $\overline{\mathbf{L}}_B$, рассмотрим два случая.

Случай 1: $\overline{\mathbf{R}} = 0$, $\overline{\mathbf{L}}_B = 0$. Тогда и $\overline{\mathbf{L}}_O = 0$, т.е. в любой точке силовой винт имеет стандартное представление, и любая прямая служит его осью.

Элементы приведения здесь коллинеарны тривиальным образом. Опять же любую прямую можно считать направленной вдоль нулевого вектора.

Что касается самой системы сил, то данная ситуация Вам хорошо известна.

Система сил эквивалентна нулю.

Переходим ко второму случаю.

Случай 2: $\overline{\mathbf{R}} = 0$, $\overline{\mathbf{L}}_B \neq 0$. В любой точке силовой винт имеет стандартное представление, и любая прямая, параллельная $\overline{\mathbf{L}}_B$, служит его осью.

Вновь коллинеарность элементов приведения тривиальна: любой вектор коллинеарен нулевому вектору.

А о системе сил можно сказать следующее:

Система сил эквивалентна паре сил (с ненулевым моментом).

Момент этой пары и равен моменту винта $\overline{\mathbf{L}}_B$.

Займемся теперь невырожденными силовыми винтами. Прежде всего, решим вопрос о существовании и единственности оси силового винта.

Теорема (о стандартном представлении невырожденного винта). При $\overline{\mathbf{R}} \neq 0$ силовой винт также допускает стандартное представление, причем его ось определена *однозначно*. Для точек, взятых на оси винта, модуль его момента винта минимален; сам же момент винта относительно любой из них можно найти так:

$$(*) \qquad \boxed{\overline{\mathbf{L}} = \frac{(\overline{\mathbf{L}}_B, \overline{\mathbf{R}})}{(\overline{\mathbf{R}}, \overline{\mathbf{R}})} \overline{\mathbf{R}}},$$

где B – произвольный центр приведения.

Индекс при $\overline{\mathbf{L}}$ в левой части равенства я опустил: мы уже знаем, что для всех точек оси винта момент винта одинаков.

Чтобы лучше запомнить приведенную формулу, обратите внимание: в качестве множителя при $\overline{\mathbf{R}}$ в ней стоит второй статический инвариант, деленный на скалярный квадрат первого статического инварианта.

■ Мы воспользуемся леммой об оси невырожденного винта, доказанной в предыдущем пункте. Она дает конкретное выражение для радиус-вектора ближайшей к полюсу B точки на оси невырожденного винта (в предположении, что эта ось существует).

1°. Рассмотрим точку C, радиус-вектор которой дается формулой

$$\overline{\mathbf{r}}_{BC} = \frac{[\overline{\mathbf{R}}, \overline{\mathbf{L}}_B]}{(\overline{\mathbf{R}}, \overline{\mathbf{R}})},$$

и проведем через эту точку прямую l с направляющим вектором $\overline{\mathbf{e}} = \overline{\mathbf{R}} \, / \, |\overline{\mathbf{R}}|$.

Мы собираемся показать, что эта прямая и будет осью винта.

Применим к вектору $\overline{\mathbf{L}}_B$ формулу, по которой вектор раскладывается на параллельную и ортогональную составляющие:

$$\overline{\mathbf{a}} = (\overline{\mathbf{e}}, \overline{\mathbf{a}})\, \overline{\mathbf{e}} + \underbrace{[\overline{\mathbf{e}}, [\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{e}}]]}_{[[\overline{\mathbf{e}}, \overline{\mathbf{a}}], \overline{\mathbf{e}}]}.$$

Напомню, что первое слагаемое здесь параллельно единичному вектору $\overline{\mathbf{e}}$, а второе ортогонально ему.

Во втором слагаемом я дважды поменял местами сомножители в векторных произведениях; в результате знак не изменился.

$$\overline{\mathbf{L}}_B = \left(\frac{\overline{\mathbf{R}}}{|\overline{\mathbf{R}}|}, \overline{\mathbf{L}}_B \right) \frac{\overline{\mathbf{R}}}{|\overline{\mathbf{R}}|} + \left[\left[\frac{\overline{\mathbf{R}}}{|\overline{\mathbf{R}}|}, \overline{\mathbf{L}}_B \right], \frac{\overline{\mathbf{R}}}{|\overline{\mathbf{R}}|} \right] =$$

$$= \frac{(\overline{\mathbf{R}}, \overline{\mathbf{L}}_B)}{(\overline{\mathbf{R}}, \overline{\mathbf{R}})} \overline{\mathbf{R}} + \left[\underbrace{\frac{[\overline{\mathbf{R}}, \overline{\mathbf{L}}_B]}{(\overline{\mathbf{R}}, \overline{\mathbf{R}})}}_{\overline{\mathbf{r}}_{BC}}, \overline{\mathbf{R}} \right].$$

А теперь применим теорему об изменении главного момента при смене центра приведения:

$$\overline{\mathbf{L}}_C = \overline{\mathbf{L}}_B + [\underbrace{\overline{\mathbf{r}}_{CB}}_{-\overline{\mathbf{r}}_{BC}}, \overline{\mathbf{R}}] = \frac{(\overline{\mathbf{R}}, \overline{\mathbf{L}}_B)}{(\overline{\mathbf{R}}, \overline{\mathbf{R}})} \overline{\mathbf{R}} + [\overline{\mathbf{r}}_{CB}, \overline{\mathbf{R}}] -$$

$$- [\overline{\mathbf{r}}_{CB}, \overline{\mathbf{R}}] = \frac{(\overline{\mathbf{L}}_B, \overline{\mathbf{R}})}{(\overline{\mathbf{R}}, \overline{\mathbf{R}})} \overline{\mathbf{R}}.$$

Формула из условия теоремы получена. Что мы видим из этой формулы? Мы видим, что вектор $\overline{\mathbf{L}}_C$ пропорционален вектору $\overline{\mathbf{R}}$.

Так как $\overline{\mathbf{L}}_C \parallel \overline{\mathbf{R}}$, то представление винта – стандартное, а ось l – ось винта.

Момент винта относительно любой другой точки оси l будет равен $\overline{\mathbf{L}}_C \equiv \overline{\mathbf{L}}$.

По лемме об оси невырожденного винта, точка C – ближайшая к полюсу B точка оси винта. Эта точка и вектор $\overline{\mathbf{e}}$ ось винта определяют <u>*однозначно*</u>.

Это и отличает случай невырожденного силового винта. В случаях же 1° и 2°, рассмотренных нами выше, действительно имеет место вырождение: для них ось винта однозначно не определяется (хотя тоже существует).

Итак, бо́льшая часть теоремы нами доказана. Осталось обосновать минимальность модуля момента.

2°. Пусть точка B – произвольная точка, <u>*не лежащая*</u> на оси винта.

Тогда

$$\overline{\mathbf{L}}_B = \overline{\mathbf{L}}_C + [\overline{\mathbf{r}}_{BC}, \overline{\mathbf{R}}] \equiv \overline{\mathbf{L}}_C + \overline{\mathbf{M}}_B(\overline{\mathbf{R}}.C),$$

причем вектор $\overline{\mathbf{L}}_1 \equiv \overline{\mathbf{M}}_B(\overline{\mathbf{R}}.C) \neq 0$ (полюс B не лежит на линии действия силы $\overline{\mathbf{R}}.C$).

При этом: $\overline{\mathbf{L}}_C \parallel \overline{\mathbf{R}}$, $\overline{\mathbf{L}}_1 \perp \overline{\mathbf{R}}$, т.е. $\overline{\mathbf{L}}_C \perp \overline{\mathbf{L}}_1$.

Таким образом, вектор $\overline{\mathbf{L}}_B$ представлен в виде суммы двух взаимно ортогональных слагаемых.

По теореме Пифагора:

$$|\overline{\mathbf{L}}_B| = \sqrt{|\overline{\mathbf{L}}_C|^2 + |\overline{\mathbf{L}}_1|^2} > \sqrt{|\overline{\mathbf{L}}_C|^2} = |\overline{\mathbf{L}}_C| = \min .$$ ■

Случай невырожденного силового винта можно также подразделить на два различных случая, анализируя значение уже второго статического инварианта.

Случай 3. $\overline{\mathbf{R}} \neq 0$, $(\overline{\mathbf{L}}_B, \overline{\mathbf{R}}) = 0$. В силу $(*)$ для точек на оси винта $\overline{\mathbf{L}} = 0$.

Таким образом, если за центр приведения системы сил брать точку на оси винта, то система будет приведена к силе и паре сил с *нулевым* моментом; но тогда эта пара сил эквивалентна нулю, и ее можно отбросить.

Итак:

Система сил эквивалентна одной силе, у которой линия действия – ось винта, а вектор равен $\overline{\mathbf{R}}$.

Такая сила называется **равнодействующей**.

Таким образом, в данном случае система сил приводится к равнодействующей. Кстати, система сил приводится к равнодействующей и в случае 1°, но там эта сила равна нулю.

Не следует путать равнодействующую и главный вектор системы сил. Равнодействующая – это сила, а главный вектор – это свободный вектор. Любая система сил имеет главный вектор, но не каждая система сил приводится к равнодействующей.

Замечание. Если при этом $\overline{\mathbf{L}}_B = 0$, то точка B лежит на линии действия равнодействующей, а иначе – нет.

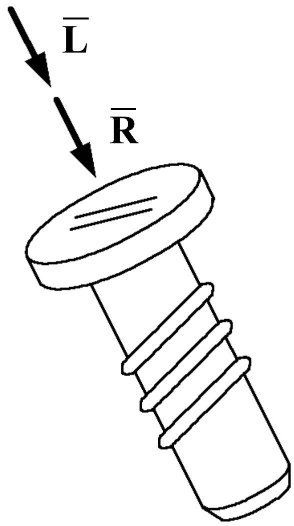
Напомню также, что в случаях 1° и 2° второй статический инвариант также равен нулю.

Предположим теперь, что второй статический инвариант отличен от нуля.

Случай 4. $(\overline{\mathbf{L}}_B, \overline{\mathbf{R}}) \neq 0$ (а тогда и $\overline{\mathbf{R}} \neq 0$). В силу $(*)$ для точек на оси винта $\overline{\mathbf{L}} \neq 0$.

Система сил эквивалентна силе (у которой линия действия – ось винта, а вектор равен $\overline{\mathbf{R}}$) и паре сил с ненулевым моментом $\overline{\mathbf{M}} \equiv \overline{\mathbf{L}}$, причем $\overline{\mathbf{M}} \parallel \overline{\mathbf{R}}$.

С подобного рода системой сил мы, между прочим, встречаемся, имея дело с обычным винтом. Когда мы обычный винт отверткой ввинчиваем в отверстие, то мы одновременно прикладываем к его оси как силу, так и момент.



Во многих учебниках механики подобная система из силы и пары называется “динамическим винтом”, а в случаях 1°– 3° термин “винт” не употребляют. Сейчас такое словоупотребление следует признать устаревшим. Игнорировать вырожденные винты или винты с нулевым минимальным моментом – все равно, что отказывать числу нуль в праве называться числом, а нулевому вектору – именоваться вектором.

Слово “динамический” также не вполне подходит: понятие силового винта встречается и в динамике, и в статике (а в динамике, кроме него, употребляется также и понятие кинетического винта).

Замечание 1. Для плоской системы сил $\overline{\mathbf{R}}$ лежит в плоскости, а $\overline{\mathbf{L}}_B$ ортогонален ей; поэтому $(\overline{\mathbf{L}}_B, \overline{\mathbf{R}}) = 0$, и случай 4 встретиться не может.

Замечание 2. Для системы параллельных сил $\forall k\ \overline{\mathbf{F}}_k \parallel \overline{\mathbf{e}}$, где $\overline{\mathbf{e}}$ – некоторый ненулевой вектор. Поэтому:

$$\overline{\mathbf{R}} = \sum_k \overline{\mathbf{F}}_k \parallel \overline{\mathbf{e}}\,, \qquad \overline{\mathbf{L}}_B = \sum_k \overline{\mathbf{M}}_B(\overline{\mathbf{F}}_k) \perp \overline{\mathbf{e}}\,;$$

вновь $(\overline{\mathbf{L}}_B, \overline{\mathbf{R}}) = 0$, и случай 4 встретиться не может.

Впрочем, о системах параллельных сил мы сейчас поговорим отдельно.

8. Центр параллельных сил

Пусть дана система параллельных сил $\{\overline{\mathbf{F}}_1 . A_1, \ldots, \overline{\mathbf{F}}_n . A_n\}$, главный вектор $\overline{\mathbf{R}}$ которой *отличен* от нуля, так что она приводится к ненулевой равнодействующей.

Последнее утверждение мы обосновали в предыдущем пункте.

Обозначим через $\bar{\mathbf{r}}_k$ радиус-векторы точек A_k относительно начала системы координат $Oxyz$.

Напомню, что силы, действующие на абсолютно твердое тело, образуют систему параллельных сил, если линии их действия параллельны. Значит, все векторы этих сил параллельны друг другу.

Пусть $\bar{\mathbf{e}}$ – единичный вектор, задающий направление сил системы, а $F_k \equiv (\bar{\mathbf{e}}, \overline{\mathbf{F}}_k)$ – проекция силы $\overline{\mathbf{F}}_k$ на направление вектора $\bar{\mathbf{e}}$ (так что $\overline{\mathbf{F}}_k = F_k\,\bar{\mathbf{e}}$).

Очевидно, вектор $\bar{\mathbf{e}}$ будет служить также направляющим вектором линии действия равнодействующей.

Что при этом можно сказать о векторе этой равнодействующей, т.е. о главном векторе системы сил?

$$\overline{\mathbf{R}} = \sum_k \overline{\mathbf{F}}_k = \left(\sum_k F_k\right)\bar{\mathbf{e}} \equiv R\,\bar{\mathbf{e}}\,,$$

где $R = \sum\limits_k F_k$.

Здесь R – проекция главного вектора системы сил на направление вектора $\bar{\mathbf{e}}$.

Рассмотрим *одновременный поворот* системы сил, при котором она заменяется системой $\left\{\overline{\mathbf{F}}_1{}'.A_1,\ \ldots,\ \overline{\mathbf{F}}_n{}'.A_n\right\}$, где $\overline{\mathbf{F}}_k{}' = F_k\,\bar{\mathbf{e}}\,'$, а вектор $\bar{\mathbf{e}}\,'$ – тоже единичный.

Таким образом, точки приложения и модули сил системы при таком повороте не изменяются; меняются только направления сил (причем согласованно, так что силы остаются параллельными друг другу, и новая система тоже будет системой параллельных сил).

Для новой системы $\overline{\mathbf{R}}\,' = R\,\bar{\mathbf{e}}\,'$.

Заметьте, что скалярный множитель R остался тем же самым.

Мы видим, что главный вектор системы сил при повороте изменяется, так что одновременный поворот *не является* эквивалентным преобразованием системы сил.

Когда мы сталкиваемся на практике с одновременным поворотом системы параллельных сил? Представьте себе, что речь идет о силах тяжести, действующих на отдельные части твердого тела, а мы это тело повернули. При этом изменятся положения точек приложения сил тяжести, а векторы этих сил останутся неизменными.

Но так будет, если вести наблюдения в системе отсчета, связанной с Землей. Если же взять за условно неподвижную систему отсчета, связанную с телом, то точки приложения сил останутся неподвижными, а изменятся направления векторов этих сил (они повернутся вместе с Землей). Это – как раз рассматриваемый нами случай.

<u>Теорема.</u> Для всякой системы параллельных сил при $\overline{\mathbf{R}} \neq 0$ существует единственная точка C (*<u>центр параллельных сил</u>*), через которую проходят линии действия равнодействующих любых систем, получаемых из исходной одновременным поворотом. При этом

$$(*) \qquad \boxed{\overline{\mathbf{r}}_C = \frac{\sum\limits_k F_k \, \overline{\mathbf{r}}_k}{\sum\limits_k F_k}} \; .$$

■ Очевидно, центр параллельных сил – если он существует – должен лежать на линии действия равнодействующей исходной системы (т.е. на центральной оси этой системы сил).

1°. Пусть B – произвольная точка на центральной оси исходной системы сил. Приведем эту систему к равнодействующей $\overline{\mathbf{R}}.B$.

При эквивалентных преобразованиях систем сил главные моменты не меняются, так что главный момент нашей системы сил можно найти как момент ее равнодействующей. Возьмем за полюс точку B.

Очевидно, $\overline{\mathbf{L}}_B = \overline{\mathbf{M}}_B(\overline{\mathbf{R}}.B) = 0$.

В самом деле, сила сейчас приложена в полюсе.

Но главный момент системы сил можно вычислить и иначе – исходя непосредственно из определения главного момента.

С другой стороны,

$$\overline{\mathbf{L}}_B = \sum_k \overline{\mathbf{M}}_B(\overline{\mathbf{F}}_k) = \sum_k [\, \overline{\mathbf{r}}_{BA_k}, \underbrace{\overline{\mathbf{F}}_k}_{F_k \overline{\mathbf{e}}} \,] =$$

$$= \sum_k [\, F_k \underbrace{\overline{\mathbf{r}}_{BA_k}}_{\overline{\mathbf{r}}_k - \overline{\mathbf{r}}_B}, \overline{\mathbf{F}}_k \,] = \left[\sum_k F_k \, \overline{\mathbf{r}}_k - \sum_k F_k \, \overline{\mathbf{r}}_B , \; \overline{\mathbf{e}} \right] .$$

Но мы только что видели, что вектор $\overline{\mathbf{L}}_B$ равен нулю.

Итак, $\left[\sum\limits_k F_k \, \overline{\mathbf{r}}_k - \sum\limits_k F_k \, \overline{\mathbf{r}}_B , \; \overline{\mathbf{e}} \right] = 0$.

Это векторное равенство выполняется для любой точки на линии действия равнодействующей – а значит, и для искомой точки C.

2°. Поэтому для точки C имеем:

$$\left[\ \sum_k F_k\,\overline{\mathbf{r}}_k \ - \ \sum_k F_k\,\overline{\mathbf{r}}_C\ ,\ \overline{\mathbf{e}}\ \right] \ = \ 0\ .$$

Но точка C должна – по условию – лежать и на линиях действия равнодействующих всех систем сил, получаемых из исходной системы одновременным поворотом. Значит:

Проводя те же рассуждения для "повернутых" систем сил, получаем:

$$\forall\,\overline{\mathbf{e}}\,' \quad \left[\ \sum_k F_k\,\overline{\mathbf{r}}_k \ - \ \sum_k F_k\,\overline{\mathbf{r}}_C\ ,\ \overline{\mathbf{e}}\,'\right] \ = \ 0\ .$$

Векторное произведение равно нулю тогда и только тогда, когда его сомножители параллельны. Значит, первый сомножитель должен быть параллелен любому единичному вектору.

Но это возможно лишь в одном случае – когда этот первый сомножитель равен нулю. Итак:

Это возможно тогда и только тогда, когда

$$(**) \qquad \sum_k F_k\,\overline{\mathbf{r}}_k \ - \ \sum_k F_k\,\overline{\mathbf{r}}_C \ = \ 0\ .$$

Отсюда можно найти $\overline{\mathbf{r}}_C$, и притом однозначно – по формуле $(*)$.

Итак, мы доказали существование и единственность центра параллельных сил, одновременно обосновав формулу $(*)$. ■

Формула $(*)$ дает явное выражение для радиус-вектора центра параллельных сил. На практике чаще бывает удобнее работать именно с эквивалентным ей соотношением $(**)$.

В формулу $(*)$ входят радиус-векторы точек A_k и C относительно полюса O. В действительности от выбора этого полюса ничего не зависит.

Замечание. Положение центра параллельных сил не изменится, если за начало координат взять любую другую точку D. В самом деле:

$$\overline{\mathbf{r}}_{DC} \ = \ \overline{\mathbf{r}}_C \ - \ \overline{\mathbf{r}}_D \ = \ \frac{\sum\limits_k F_k\,\overline{\mathbf{r}}_k}{\sum\limits_k F_k} \ - \ \frac{\sum\limits_k F_k}{\sum\limits_k F_k}\,\overline{\mathbf{r}}_D \ =$$

$$= \ \frac{\sum\limits_k F_k\,(\,\overline{\mathbf{r}}_k - \overline{\mathbf{r}}_D\,)}{\sum\limits_k F_k} \ = \ \frac{\sum\limits_k F_k\,\overline{\mathbf{r}}_{DA_k}}{\sum\limits_k F_k}\ .$$

Иными словами, для вычисления радиус-вектора центра параллельных сил относительно нового полюса можно пользоваться той же формулой $(*)$, но радиус-векторы точек приложения сил вычислять также относительно нового полюса.

Из формулы $(*)$ нетрудно получить – простым проектированием на координатные оси – формулы для координат центра параллельных сил.

Координаты центра параллельных сил:

$$x_C \;=\; \frac{\sum\limits_k F_k\, x_k}{\sum\limits_k F_k}\;, \quad \text{и т.д.}$$

Обратите внимание: во всех рассуждениях этого пункта предполагалось, что точки приложения сил системы не меняются. Если разрешить этим силам смещаться вдоль линий их действия, положение центра параллельных сил, вообще говоря, изменится.

Значит, конкретный выбор точек приложения сил системы является сейчас существенным. А мы знаем, что в подобных ситуациях может оказаться полезным понятие вириала силы.

И действительно: сейчас мы покажем, что к понятию центра параллельных сил можно прийти совсем другим путем. Получим важное следствие из доказанной нами теоремы (а точнее – из формулы $(**)$, полученной в ходе ее доказательства).

Следствие (основное свойство центра параллельных сил). Если равнодействующая системы параллельных сил приложена в центре параллельных сил, то главный вириал системы относительно любого полюса O равен вириалу равнодействующей:

$$U_O \;=\; V_O\,(\,\overline{\mathbf{R}}.C\,)\;.$$

■ Вычисляем:

$$U_O \;=\; \sum_k V_O(\overline{\mathbf{F}}_k) \;=\; \sum_k (\,\overline{\mathbf{r}}_k\,,\underbrace{\overline{\mathbf{F}}_k}_{F_k\,\overline{\mathbf{e}}}\,) \;=\; (\,\sum_k F_k\,\overline{\mathbf{r}}_k\,,\overline{\mathbf{e}}\,)\;.$$

$$V_O\,(\,\overline{\mathbf{R}}.C\,) \;=\; (\,\overline{\mathbf{r}}_C\,,\overline{\mathbf{R}}\,) \;=\; (\,\overline{\mathbf{r}}_C\,,\sum_k \overline{\mathbf{F}}_k\,) \;=$$

$$=\; (\,\overline{\mathbf{r}}_C\,,(\,\sum_k F_k\,)\,\overline{\mathbf{e}}\,) \;=\; (\,\sum_k F_k\,\overline{\mathbf{r}}_k\,,\overline{\mathbf{e}}\,)\;.$$

В силу $(**)$ оба выражения совпадают. ■

Мы знаем, что вириал однозначно характеризует положение силы на ее линии действия. Значит, если равнодействующую приложить уже не в точке C, а в любой другой точке центральной оси системы сил, то вириал равнодействующей уже не будет равен главному вириалу системы сил.

Стало быть, при нахождении центра параллельных сил можно было бы искать его как точку приложения такой силы, у которой вектор равен главному вектору системы сил, момент – главному моменту и вириал – главному вириалу. Но задачу нахождения точки приложения силы по ее вектору, моменту и вириалу мы уже решали.

Я напомню Вам полученную тогда формулу, заменив в ней полюс B на полюс O.

В силу формулы для радиус-вектора точки A приложения силы

$$\overline{\mathbf{r}}_A = \frac{V_O(\overline{\mathbf{F}})\,\overline{\mathbf{F}}}{(\overline{\mathbf{F}},\overline{\mathbf{F}})} + \frac{[\,\overline{\mathbf{F}},\ \overline{\mathbf{M}}_O(\overline{\mathbf{F}})\,]}{(\overline{\mathbf{F}},\overline{\mathbf{F}})}$$

для центра параллельных сил получаем:

$$\overline{\mathbf{r}}_C = \frac{U_O\,\overline{\mathbf{R}}}{(\overline{\mathbf{R}},\overline{\mathbf{R}})} + \frac{[\,\overline{\mathbf{R}},\ \overline{\mathbf{L}}_O\,]}{(\overline{\mathbf{R}},\overline{\mathbf{R}})}\ .$$

В рамках конкретной задачи такое вычисление может быть более эффективным, чем по формуле $(*)$, если в ходе решения задачи уже были найдены векторы $\overline{\mathbf{R}}$ и $\overline{\mathbf{L}}_O$ и скаляр U_O.

Рассмотрим теперь важное применение теоремы о центре параллельных сил.

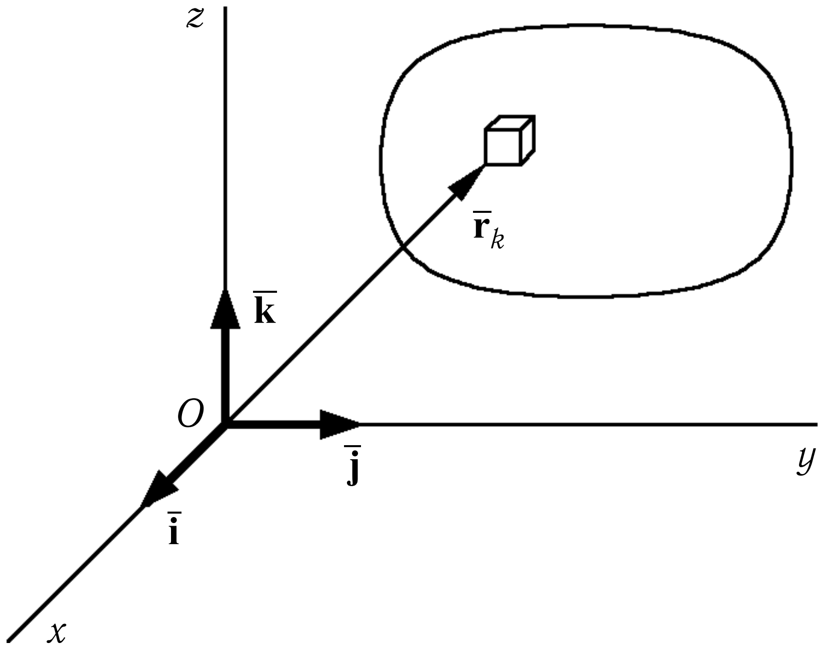
9. Центр тяжести АТТ.

Рассмотрим АТТ и разобьем его на N элементарных объемов ΔV_k.

Далее будет исследоваться случай, когда число N этих элементарных объемов стремится к бесконечности. Сами объемы при этом будут стягиваться к точкам. Поэтому:

Положение объема будем характеризовать радиус-вектором

$$\overline{\mathbf{r}}_k = x_k\,\overline{\mathbf{i}} + y_k\,\overline{\mathbf{j}} + z_k\,\overline{\mathbf{k}}\ .$$



Фактически $\overline{\mathbf{r}}_k$ – это радиус-вектор некоторой точки, взятой внутри объема (например, его центра). Поскольку размеры объема стремятся к нулю, точное положение этой точки внутри элементарного объема нас сейчас не интересует.

Пусть тело находится в *однородном* поле сил тяжести.

Вы знаете из курса физики, что поле сил тяжести в каждой точке характеризуется вектором $\overline{\mathbf{g}}$ – вектором ускорения свободного падения. В случае однородного поля в любой точке этот вектор один и тот же – и по модулю, и по направлению.

Для не слишком протяженных тел в поле тяготения Земли это верно с весьма большой степенью точности.

Что следует из предположения об однородности поля тяжести?

На объем ΔV_k действует сила тяжести $\overline{\mathbf{F}}_k$ с модулем

$$F_k \;=\; \gamma\,(\overline{\mathbf{r}}_k)\,\Delta V_k\,,$$

где $\gamma\,(\overline{\mathbf{r}}_k) \equiv \gamma\,(x_k, y_k, z_k)$ – *удельный вес* тела в точке с радиус-вектором $\overline{\mathbf{r}}_k$.

Понятие удельного веса Вам знакомо; напомню, что он равен пределу отношения модуля силы тяжести к элементарному объему, когда последний стремится к нулю.

Если тело не является однородным (т.е. имеет в разных точках различную плотность), то и удельный вес в различных точках тела будет различным, что и отражено в наших обозначениях.

Записанная нами формула верна лишь приближенно – с точностью до бесконечно малых слагаемых более высокого порядка малости. Действительно, мы пренебрегаем различием в значениях удельного веса в разных точках элементарного объема.

Из предположения об однородности поля тяжести вытекает также, что все силы $\overline{\mathbf{F}}_k$ параллельны друг другу, поскольку ускорение свободного падения постоянно по направлению. Итак:

$\{\overline{\mathbf{F}}_1, \ldots, \overline{\mathbf{F}}_N\}$ – система параллельных сил; пусть $\overline{\mathbf{e}}$ – единичный вектор, задающий их направление.

Главный вектор данной системы сил, очевидно, не равен нулю, так как все эти силы тяжести сонаправлены. Поэтому применима теорема о центре параллельных сил.

Эта система сил приводится к равнодействующей $\overline{\mathbf{R}}.C$ (C – центр параллельных сил), для которой:

$$\overline{\mathbf{R}} = \sum_k F_k\,\overline{\mathbf{e}} \equiv \sum_k \gamma\,(\overline{\mathbf{r}}_k)\,\Delta V_k \cdot \overline{\mathbf{e}}\ ,$$

$$\overline{\mathbf{r}}_C = \frac{\sum_k F_k\,\overline{\mathbf{r}}_k}{\sum_k F_k} \equiv \frac{\sum_k \gamma\,(\overline{\mathbf{r}}_k)\,\Delta V_k \cdot \overline{\mathbf{r}}_k}{\sum_k \gamma\,(\overline{\mathbf{r}}_k)\,\Delta V_k}\ .$$

Заметим, что в знаменателе последней формулы стоит модуль вектора $\overline{\mathbf{R}}$.

Пусть теперь $N \to \infty$ и $\Delta V_k \to 0$; суммы перейдут в интегралы, а равнодействующая $\overline{\mathbf{R}}.C$ – в действующую на АТТ *силу тяжести* $\overline{\mathbf{P}}.C$:

$$\overline{\mathbf{P}} = P\,\overline{\mathbf{e}}\ ,$$

где

$$P = \lim_{N\to\infty} \sum_k \gamma\,(\overline{\mathbf{r}}_k)\,\Delta V_k = \int_V \gamma\,(\overline{\mathbf{r}})\,\mathrm{d}V\ ;$$

$$\lim_{N\to\infty} \sum_k \gamma\,(\overline{\mathbf{r}}_k)\,\Delta V_k \cdot \overline{\mathbf{r}}_k = \int_V \gamma\,(\overline{\mathbf{r}})\,\overline{\mathbf{r}}\,\mathrm{d}V\ .$$

Оба этих интеграла являются тройными. При этом P есть модуль силы тяжести.

Итак, получаем:

$$(*) \qquad \boxed{P = \int_V \gamma\,(\overline{\mathbf{r}})\,\mathrm{d}V}\ ;$$

$$(**) \qquad \boxed{\bar{\mathbf{r}}_C = \frac{\int\limits_V \gamma(\bar{\mathbf{r}})\,\bar{\mathbf{r}}\,\mathrm{d}V}{\int\limits_V \gamma(\bar{\mathbf{r}})\,\mathrm{d}V}} \,.$$

Точка C, радиус-вектор которой определяется формулой $(**)$, называется **<u>центром тяжести</u>** АТТ.

Формулу $(**)$ можно переписать еще и так:

$$\bar{\mathbf{r}}_C = \frac{1}{P}\int\limits_V \gamma(\bar{\mathbf{r}})\,\bar{\mathbf{r}}\,\mathrm{d}V \,.$$

Из определения центра параллельных сил сразу же вытекает такое свойство центра тяжести.

Если повернуть тело вокруг оси, проходящей через C, то положение центра тяжести не изменится.

Иными словами, им по-прежнему будет точка C. Действительно, такой поворот эквивалентен одновременному повороту системы сил тяжести; а положение центра параллельных сил не меняется при одновременном повороте.

Проектируя формулу $(**)$ на координатные оси, получаем формулы для координат центра тяжести.

Координаты центра тяжести АТТ:

$$x_C = \frac{1}{P}\int\limits_V x\,\gamma(x, y, z)\,\mathrm{d}V \,, \quad \text{и т.д.}$$

Рассмотрим еще случай однородного тела, когда в разных его точках удельный вес – один и тот же.

Для *<u>однородного</u>* тела (когда $\gamma(x, y, z) = \mathrm{const}$):

$$P = \gamma V \,, \qquad \bar{\mathbf{r}}_C = \frac{\int\limits_V \bar{\mathbf{r}}\,\mathrm{d}V}{\int\limits_V \mathrm{d}V} \equiv \frac{1}{V}\int\limits_V \bar{\mathbf{r}}\,\mathrm{d}V \,.$$

Здесь мы вынесли постоянный множитель γ за знак интеграла; в формуле для $\bar{\mathbf{r}}_C$ мы сократили на γ числитель и знаменатель.

По поводу понятия “центра тяжести” сделаем такое замечание.

Понятие центра тяжести и правила сложения параллельных сил ввел Архимед.

Архимед из Сиракуз (287 – 212 до н.э.) – греческий математик и механик.

Он не только ввел понятие центра тяжести, но и определил его положение для многих конкретных тел; интегралами при этом он, конечно, не пользовался, а действовал при решении конкретных задач так: находил с помощью некоторых нестрогих методов значение предела, а потом уже строго – рассуждением от противного – доказывал, что это значение не может быть никаким другим.

Архимед заложил также основы гидростатики (включая знаменитый закон Архимеда). Он сделал первый шаг по пути аксиоматизации механики, сформулировав ряд аксиом о равновесии рычага, и дал вполне точное решение этой задачи.

В математике он предложил методы вычисления площадей и объемов тел, которые предвосхищали многие идеи интегрального исчисления.

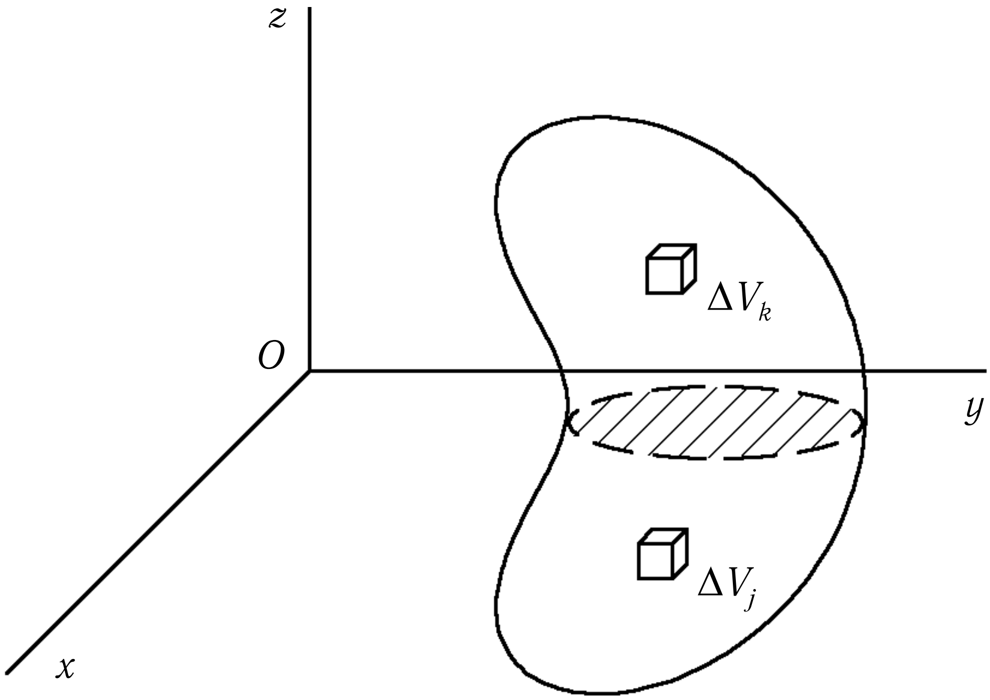
Для творчества Архимеда было характерно сочетание строгих математических методов и инженерного подхода. Он изобрел немало весьма интересных машин и механизмов.

Хотя задачи механики, которыми занимался Архимед, были – с современной точки зрения – достаточно простыми, его достижения выдержали проверку временем и послужили отправным пунктом для многих исследований позднейшего времени. Напомню, что о творчестве другого великого механика древности – Аристотеля – этого сказать нельзя.

10. Способы вычисления центра тяжести.

Способ 1 (использование симметрии).

Пусть АТТ имеет плоскость симметрии.



Мы выбрали здесь оси координат специальным образом.

Oxy – плоскость симметрии.

Вновь разобьем тело на элементарные объемы. Легко видеть, что разбиение можно провести так, что каждому элементарному объему над плоскостью симметрии будет соответствовать такой же по форме элементарный объем под этой плоскостью.

$$\Delta V_k = \Delta V_j ;$$

$$x_k = x_j , \quad y_k = y_j , \quad z_k = - z_j .$$

Сделаем теперь еще одно предположение.

Пусть симметрия распространяется и на удельный вес:

$$\gamma (x_k , y_k , z_k) = \gamma (x_j , y_j , z_j) .$$

Запишем формулы для координаты z_C, но не в виде интеграла, а в виде суммы, когда предельный переход еще не произведен:

$$z_C = \frac{\sum\limits_k F_k z_k}{\sum\limits_k F_k} .$$

В числителе каждому слагаемому

$$F_k z_k \equiv \gamma (x_k , y_k , z_k) \Delta V_k \cdot z_k$$

отвечает слагаемое

$$F_j z_j \equiv \gamma (x_j , y_j , z_j) \Delta V_j \cdot z_j = - \gamma (x_k , y_k , z_k) \Delta V_k \cdot z_k ;$$

они сокращаются.

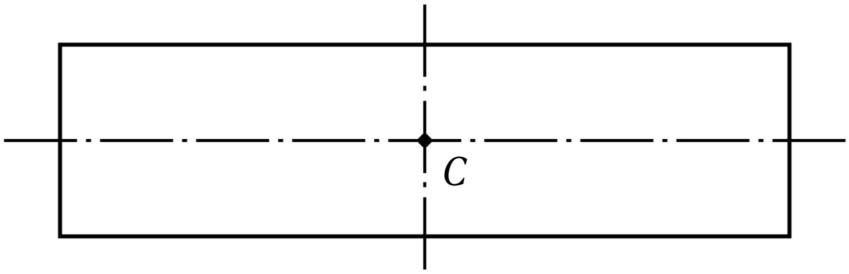
Вывод: $z_C = 0$, т.е. центр тяжести лежит в плоскости симметрии.

Тело может характеризоваться симметрией иного рода: иметь ось симметрии или центр симметрии. Рассмотрение этих случаев можно провести аналогично; запишем только результаты.

Замечание 1. Если АТТ имеет *ось симметрии*, то центр тяжести лежит на этой оси.

Замечание 2. Если АТТ имеет *центр симметрии*, то центр тяжести совпадает с этим центром.

Вот пример тела с центром симметрии: прямоугольная пластинка.

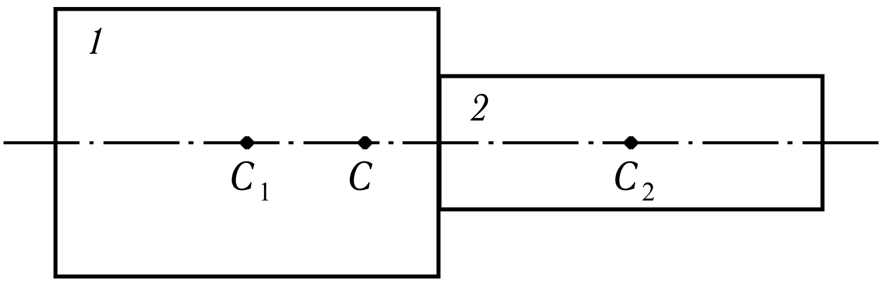


Разумеется, и в этих двух случаях подразумевается, что симметрия распространяется и на удельный вес.

Использование симметрии позволяет сократить выкладки при вычислении координат центра тяжести или (в случае центра симметрии) вообще обойтись без вычисления интегралов.

Способ 2 (метод разбиения).

Предположим, что АТТ можно разбить на несколько частей, центры тяжести которых легко вычисляются.



Для i-й части:

$$P_i\,\overline{\mathbf{r}}_i = \int\limits_{V_i} \gamma(\overline{\mathbf{r}})\,\overline{\mathbf{r}}\;\mathrm{d}V\,,$$

где $\overline{\mathbf{r}}_i$ – радиус-вектор центра тяжести i-й части.

Для всего тела:

$$\underbrace{P\,\bar{\mathbf{r}}_C}_{\sum\limits_i P_i} = \int\limits_V \gamma(\bar{\mathbf{r}})\,\bar{\mathbf{r}}\,\mathrm{d}V = \sum_i \int\limits_{V_i} \gamma(\bar{\mathbf{r}})\,\bar{\mathbf{r}}\,\mathrm{d}V = \sum_i P_i\,\bar{\mathbf{r}}_i\ ;$$

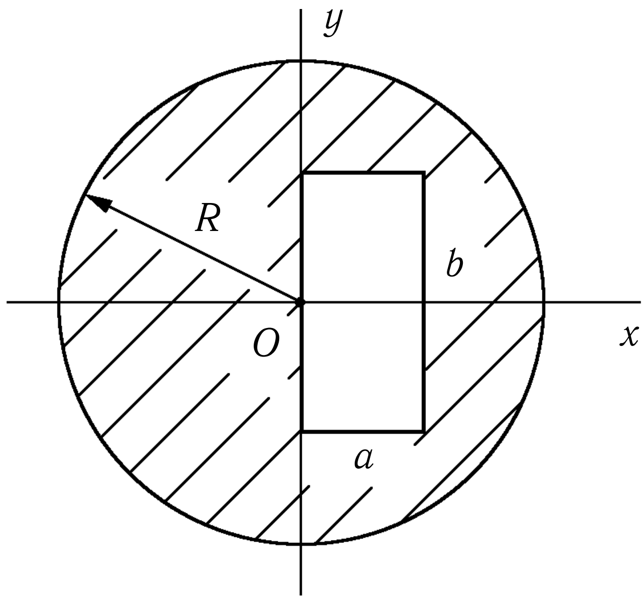
отсюда

$$(*) \qquad \boxed{\bar{\mathbf{r}}_C = \frac{\sum\limits_i P_i\,\bar{\mathbf{r}}_i}{\sum\limits_i P_i}}\ .$$

Во многих практических задачах на вычисление центра тяжести этот метод эффективно используется.

<u>Способ 3</u> (метод отрицательных весов).

Пусть *<u>однородное</u>* тело $\mathscr{B}$ имеет полость или отверстие:



Нарисованная круглая пластинка имеет прямоугольное отверстие. В общем случае мы, однако, будем говорить о полости (для единообразия).

Мысленно заполним полость материалом, из которого состоит тело. Получим новое тело $\mathscr{B}_0$, частями которого являются тела $\mathscr{B}_1 \equiv \mathscr{B}$ и $\mathscr{B}_2$.

Формула $(*)$ дает:

$$P_0\,\bar{\mathbf{r}}_0 = P_1\,\bar{\mathbf{r}}_1 + P_2\,\bar{\mathbf{r}}_2\ .$$

Через $\bar{\mathbf{r}}_i$ здесь опять обозначен радиус-вектор центра тяжести i-го тела.

Предположим теперь, что центры тяжести тел $\mathscr{B}_0$ и $\mathscr{B}_2$ (а также веса этих тел) вычисляются легко.

Для центра тяжести C тела $\mathscr{B}$ имеем:

$$\bar{\mathbf{r}}_C \equiv \bar{\mathbf{r}}_1 = \frac{P_0\,\bar{\mathbf{r}}_0 - P_2\,\bar{\mathbf{r}}_2}{P_1} = \frac{P_0\,\bar{\mathbf{r}}_0 - P_2\,\bar{\mathbf{r}}_2}{P_0 - P_2} .$$

Итак, центр тяжести исходного тела найден.

Название метода объясняется просто. Для этого перепишем формулу для $\bar{\mathbf{r}}_C$ в ином виде:

$$\bar{\mathbf{r}}_C = \frac{P_0\,\bar{\mathbf{r}}_0 + (-P_2)\,\bar{\mathbf{r}}_2}{P_0 + (-P_2)} .$$

Если отвлечься от иного способа нумерации, то эта формула вполне аналогична формуле метода разбиения, однако вес полости входит в нее со знаком “минус”. Запишем:

Эта формула аналогична формуле $(*)$, но вес полости считается отрицательным.

Полученную формулу легко обобщить на случай нескольких полостей.

В случае N полостей:

$$\boxed{\bar{\mathbf{r}}_C = \frac{P_0\,\bar{\mathbf{r}}_0 - \sum\limits_{i=2}^{N+1} P_i\,\bar{\mathbf{r}}_i}{P_0 - \sum\limits_{i=2}^{N+1} P_i}} .$$

Вычислим координаты центра масс пластинки с отверстием, изображенной в качестве примера на приведенном рисунке.

В примере:

$$P_0 = \gamma\cdot\pi R^2\delta , \qquad P_2 = \gamma\cdot a\,b\,\delta ,$$

где γ – удельный вес, δ – толщина пластинки.

Далее:

$$x_0 = 0 , \qquad x_1 = a/2 .$$

$$x_C = \frac{P_0\,x_0 - P_2\,x_2}{P_0 - P_2} = \frac{P_0\cdot 0 - P_2\cdot a/2}{P_0 - P_2} =$$

$$= \frac{-\gamma\,a\,b\,\delta\cdot a/2}{\gamma\,\pi R^2\delta - \gamma\,a\,b\,\delta} = -\frac{a^2 b}{2\,(\pi R^2 - a\,b)} .$$

С координатой y_C – все проще:

$y_C = 0$ (используем осевую симметрию).

Вернемся теперь к вопросу о связях и их реакциях. Когда мы формулировали общее правило, позволяющее судить о направлении реакций связи, то утверждали, что реакции связи должны быть ортогональны неосвобождающим возможным перемещениям.

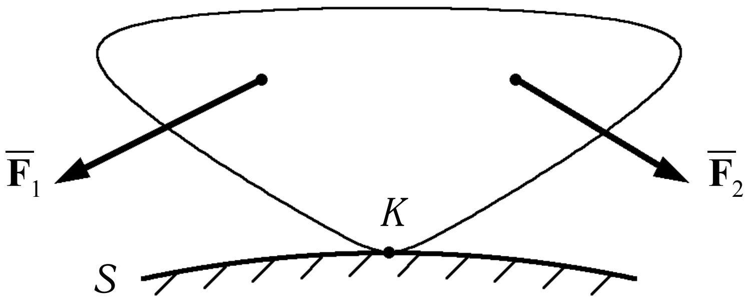
При этом оговаривалось, что это верно для связей без трения. Сейчас же мы как раз рассмотрим ситуацию, когда трение имеется.

§ 3. Силы трения в статике

1. Равновесие тел при учете сил трения

Начнем с рассмотрения конкретного вида связи.

Пример 1. Рассмотрим АТТ, имеющее точечный контакт с неподвижной поверхностью S.



Такой вид связи называется, как Вы знаете, точечным контактом двух поверхностей. Однако теперь мы уже не предполагаем, что эти поверхности – гладкие.

Вы знаете, что связь – это наперед заданное ограничение на движение тел. В этом отношении связи с трением не отличаются от связей без трения. В частности:

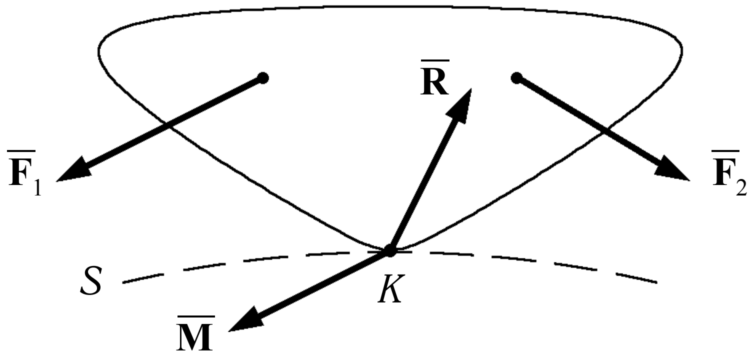
Возможные перемещения при наличии трения – те же, что и при его отсутствии.

В частности, в нашем примере связь – по-прежнему односторонняя: среди возможных перемещений есть неосвобождающие и освобождающие (последние соответствуют сходу тела с поверхности).

Отличие же этих двух случаев – в том, что реакции связей вводятся поразному.

Сформулируем рецепт, по которому в рассматриваемом примере вводятся реакции связи.

Если трение имеется, то при отбрасывании данной связи ее действие заменяется силой $\overline{\mathbf{R}}.K$ и парой сил с моментом $\overline{\mathbf{M}}$.



Таким образом, система сил, которые действуют на данное тело со стороны связи, приводится уже не к одной силе, которая ортогональна поверхности S, а к силе и паре. За центр приведения взята точка контакта.

Практически это – общий случай приведения системы сил (за одним-единственным исключением, которое связано с тем, что связь является односторонней). Именно:

При этом проекция реакции $\overline{\mathbf{R}}$ на направление внешней нормали неотрицательна.

Такому дополнительному требованию удовлетворяла и реакция гладкой связи. Напомню, что освобождающие перемещения в данном примере направлены вовне поверхности S.

Если при решении задачи о равновесии данного тела под действием приложенных активных сил мы получим, что сила $\overline{\mathbf{R}}$ направлена внутрь поверхности S, то равновесия не будет: тело сойдет с поверхности, а реакция $\overline{\mathbf{R}}$ и момент $\overline{\mathbf{M}}$ в действительности будут равны нулю (так как взаимодействие исчезнет). Впрочем, это – общее свойство односторонних связей.

Итак, сила $\overline{\mathbf{R}}$ обязательно направлена вовне от поверхности, но уже не обязательно по нормали к ней. На направление же момента $\overline{\mathbf{M}}$ в общем случае никаких ограничений не накладывается.

Но если отвлечься от дополнительного ограничения, связанного с односторонним характером связи, то рассматриваемая ситуация формально неотличима от жесткой заделки. Последняя – в пространственном случае – тоже дает произвольно направленный вектор силы и произвольно направленный вектор момента.

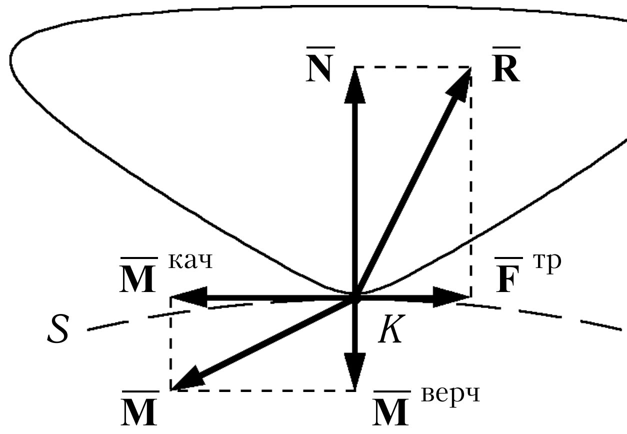
Отличие все же есть, и связано оно с нашей оговоркой о характере возможных перемещений в случае трения. В случае жесткой заделки запрещены вообще какие бы то ни было движения тела, а в нашем примере – нет.

Сформулируем – предварительно – такое положение:

Трение препятствует движению в соответствующем направлении, но не запрещает его совсем.

Чтобы прийти к более определенным выводам, проанализируем наш пример более детально.

Разложим силу $\overline{\mathbf{R}}$ и момент $\overline{\mathbf{M}}$ на касательную и нормальную составляющие по отношению к поверхности S:



Здесь: $\overline{\mathbf{N}}$ – нормальная составляющая реакции (*нормальная реакция*); $\overline{\mathbf{F}}^{\text{ тр}}$ – сила трения скольжения; $\overline{\mathbf{M}}^{\text{ кач}}$ – момент трения качения; $\overline{\mathbf{M}}^{\text{ верч}}$ – момент трения верчения.

Напомню, что в случае контакта гладких поверхностей мы имели дело только с силой $\overline{\mathbf{N}}$. Сейчас же добавились сила трения скольжения и два момента, каждый из которых может рассматриваться как момент соответствующей пары сил.

Названия объясняются просто. Вы знаете, что реакция связей появляется тогда, когда связь препятствует движению в каком-либо направлении. Значит:

Сила $\overline{\mathbf{F}}^{\text{ тр}}$ – касательная составляющая реакции $\overline{\mathbf{R}}$. Она препятствует *скольжению* тела, т.е. его движению в касательном направлении.

Имеется в виду направление какого-либо из неосвобождающих возможных перемещений точки K. Как Вы знаете, все они лежат в касательной плоскости к поверхности S.

Слово "препятствует" не означает, что скольжение вообще запрещено. Скоро мы убедимся, что сила трения не всегда способна предотвратить скольжение; тогда тело будет двигаться, а сила трения скольжения будет лишь тормозить движение тела.

Предположим, однако, что скорость точки K равна нулю, и проскальзывания нет. В общем случае это не означает, что движение тела вообще невозможно – тело в принципе может, скажем, поворачиваться вокруг какой-нибудь оси, проходящей в данный момент времени через точку контакта.

Однако при наличии трения связь будет препятствовать и такому вращательному движению. Именно:

Момент $\overline{\mathbf{M}}^{\text{ кач}}$ – касательная составляющая момента $\overline{\mathbf{M}}$. Соответствующая ему пара сил препятствует *качению* тела по поверхности S.

Как мы увидим в кинематике, скорости точек твердого тела при качении без проскальзывания распределены в каждый момент времени так, как если бы тело вращалось вокруг оси, проходящей через точку контакта и лежащей в касательной плоскости.

Момент $\overline{\mathbf{M}}^{\,\text{верч}}$ – нормальная составляющая момента $\overline{\mathbf{M}}$. Соответствующая ему пара сил препятствует *верчению* тела, т.е. вращению вокруг оси, перпендикулярной поверхности S.

На рисунке этот момент направлен вниз, но это обстоятельство – случайное: он может быть направлен и вверх (все зависит от направления верчения).

В общем случае движение твердого тела при точечном контакте с неподвижной поверхностью складывается из скольжения, качения и верчения. Если бы мы не оговорили, что поверхность S – неподвижная, то надо было бы говорить об относительном движении тела.

Выясним теперь, когда рассматриваемое тело будет находиться в равновесии.

Предположим, что тело находится в равновесии.

Условия равновесия принимают вид:

$$\overline{\mathbf{R}}^{\,\text{акт}} + \overline{\mathbf{R}} = 0\,, \qquad \overline{\mathbf{L}}_K^{\,\text{акт}} + \overline{\mathbf{M}} = 0\,;$$

здесь $\overline{\mathbf{R}}^{\,\text{акт}}$ и $\overline{\mathbf{L}}_K^{\,\text{акт}}$ – главный вектор и главный момент активных сил.

Разложим эти векторы на касательную и нормальную составляющие:

$$\overline{\mathbf{R}}^{\,\text{акт}} = \overline{\mathbf{R}}^{\,\tau} + \overline{\mathbf{R}}^{\,n}\,, \qquad \overline{\mathbf{L}}_K^{\,\text{акт}} = \overline{\mathbf{L}}_K^{\,\tau} + \overline{\mathbf{L}}_K^{\,n}\,.$$

Индексами "τ" и "n" по традиции обозначают касательные и нормальные составляющие векторов: "n" – от слова "нормальный", "τ" – от слова "тангенциальный" (это – синоним к слову "касательный").

Векторы $\overline{\mathbf{R}}$ и $\overline{\mathbf{M}}$ мы разложили на касательную и нормальную составляющие раньше.

Каждое из условий равновесия мы можем расписать в виде двух равенств – отдельно для касательных и нормальных составляющих.

Вывод: при равновесии в примере *1* имеем:

$$(*)\qquad \begin{aligned} &\overline{\mathbf{F}}^{\,\text{тр}} = -\,\overline{\mathbf{R}}^{\,\tau}\,, && \overline{\mathbf{N}} = -\,\overline{\mathbf{R}}^{\,n}\,, \\ &\overline{\mathbf{M}}^{\,\text{кач}} = -\,\overline{\mathbf{L}}_K^{\,\tau}\,, && \overline{\mathbf{M}}^{\,\text{верч}} = -\,\overline{\mathbf{L}}_K^{\,n}\,. \end{aligned}$$

Задача, таким образом, является статически определимой. Все составляющие реакций связей находятся однозначно.

Заметим только, что решение задачи о равновесии тела при наличии трения не исчерпывается этими равенствами.

Условия (∗) являются *<u>необходимыми</u>* условиями равновесия, но не достаточными.

Иными словами, если равновесие имеет место, то эти условия выполняются. Но не всегда связь способна реализовать реакции, удовлетворяющие этим равенствам.

Более точно:

Для равновесия требуется также, чтобы векторы $\overline{\mathbf{F}}^{\,\text{тр}}$, $\overline{\mathbf{M}}^{\,\text{кач}}$, $\overline{\mathbf{M}}^{\,\text{верч}}$ удовлетворяли дополнительным ограничениям:

$$(**) \qquad \left|\overline{\mathbf{F}}^{\,\text{тр}}\right| \leqslant F^{\,\text{тр}}_{\max}, \qquad \left|\overline{\mathbf{M}}^{\,\text{кач}}\right| \leqslant M^{\,\text{кач}}_{\max}, \qquad \left|\overline{\mathbf{M}}^{\,\text{верч}}\right| \leqslant M^{\,\text{верч}}_{\max}.$$

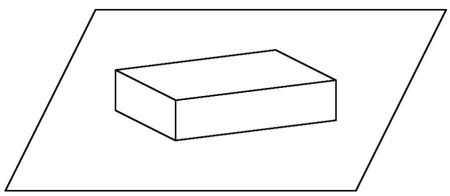
На модуль же силы $\overline{\mathbf{N}}$, как и в случае отсутствия трения, никаких ограничений не накладывается.

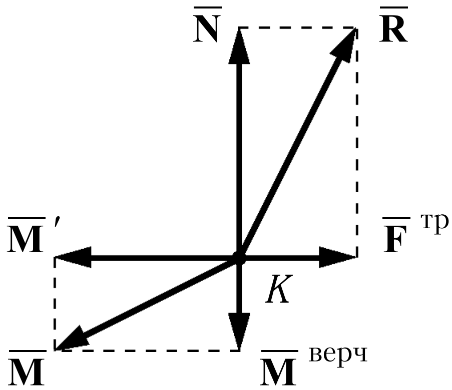
Только в том случае, когда модули данных векторов не превосходят некоторых предельных значений, можно пользоваться соотношениями (∗) для вычисления этих трех векторов. Иначе начнется движение, а значения данных векторов будут уже иными.

О том, каковы упомянутые предельные значения, мы поговорим позднее.

Явление трения возникает, разумеется, не только при точечном контакте. Контактирующие тела могут соприкасаться и по целым площадкам. Приведем соответствующий пример.

<u>Пример 2.</u> Пусть АТТ является бруском, основание которого лежит на шероховатой плоскости (*<u>поверхностный контакт</u>*), а точка K – центр основания. Вновь приведем реакции связи к силе $\overline{\mathbf{R}}.K$ и паре с моментом $\overline{\mathbf{M}}$.





Составляющие у силы $\overline{\mathbf{R}}$ и момента $\overline{\mathbf{M}}$ – те же, что и в примере *1*, но изменилась природа касательной составляющей момента.

В самом деле, возможные перемещения, отвечающие качению, теперь запрещены. Брусок может двигаться по плоскости, а также поворачиваться вокруг вертикальной оси.

Итак:

В данном случае качение запрещено связью; соответствующее действие связи характеризуется моментом $\overline{\mathbf{M}}\,'$.

Сила $\overline{\mathbf{N}}$, как и раньше, мешает телу провалиться вниз.

Если бы плоскость была абсолютно гладкой, из всех изображенных на рисунке векторов остались бы только $\overline{\mathbf{N}}$ и $\overline{\mathbf{M}}'$. А вот наличие двух других векторов специфично для шероховатой плоскости. Отметим:

Сила $\overline{\mathbf{F}}^{\text{ тр}}$ и момент $\overline{\mathbf{M}}^{\text{ верч}}$ характеризуют эффекты трения.

Обсудим теперь факторы, приводящие к возникновению трения. Эти факторы в первую очередь связаны с состоянием взаимодействующих поверхностей.

Прежде всего, речь может идти о наличии или отсутствии *смазки*, т.е. тонкой прослойки между контактирующими телами, состоящей из некоторого смазочного материала (твердого, жидкого или газообразного). В связи с этим выделяют:

Сухое трение – трение при отсутствии смазки.

Вязкое трение – трение при наличии смазки.

Смазку обычно используют, чтобы уменьшить трение и интенсивность изнашивания, а также избавиться от некоторых нежелательных особенностей, присущих сухому трению.

Обычно в качестве смазки используют жидкость (например, смазочные масла́); в этом случае говорят о *жидкостном* трении. Ныне иногда применяют и твердые смазочные материалы (графит, тефлон, молибденит), которые наносят в виде покрытий на контактирующие поверхности.

Силы вязкого трения существенно зависят от относительной скорости контактирующих тел; если она равна нулю, то эти силы также обращаются в нуль. Поскольку мы сейчас занимаемся статикой, то их мы рассматривать не будем. Итак:

Ограничимся случаем сухого трения.

Чем вызвано наличие сухого трения? Современные представления об этом явлении таковы.

Сухое трение возникает за счет механического взаимодействия между микронеровностями соприкасающихся поверхностей, а также *адгезии* (сцепления этих поверхностей, вызываемого межмолекулярным взаимодействием).

Для деталей, обычно используемых в машиностроении, размеры упомянутых микронеровностей изменяются от долей микрометра до десятков микрометров (т.е. весьма невелики).

Следовательно, сухое трение – это сложное физическое явление, вызываемое двумя факторами: механическим и адгезионным взаимодействием.

Когда мы сталкиваемся с контактом двух заведомо *шероховатых* поверхностей, то на первый план выходят механические факторы; когда же мы пытаемся сдвинуть друг относительно друга две отполированные свинцовые пластинки, то это трудно сделать из-за эффекта адгезии.

Обсудим теперь вопрос о том, какими могут быть предельные значения сил трения. Ограничимся сейчас трением скольжения.

2. Решение задач статики при наличии трения скольжения

Закономерности, которым подчиняется трение скольжения, были первоначально сформулированы как обобщение экспериментальных данных; физическая же природа трения долгое время оставалась невыясненной. Положение начало меняться в XX веке, когда оформилась целая наука о трении – трибология.

Трибология – наука о природе и закономерностях трения.

Название ее происходит от греческих слов τϱιβος 'трение' и λογος 'слово, учение'. Это – комплексная научная дисциплина, лежащая на стыке механики, физики, химии и материаловедения.

Впрочем, во многих инженерных расчетах и поныне широко используют упрощенные представления, именуемые законами трения. Эти закономерности сформулированы достаточно давно, и мы также ограничимся ими. Запишем:

Ограничимся эмпирическими законами сухого трения, сформулированными французскими механиками (и физиками) Амонтоном (1699 г.) и Кулоном (1781 г.).

Слово "эмпирические" здесь означает, что это – не фундаментальные физические законы. Они имеют достаточно широкую область применения, но представляют собой лишь некоторое приближение к действительности.

Гийом Амонтон (1663 – 1705).

Шарль Огюстен Кулон (1736 – 1806).

Оба этих ученых начинали свою научную деятельность как механики, а потом обратились к физике. Амонтон изучал давление газов, жесткость нитей, явление трения; позднее он занимался термометрией и одним из первых выдвинул идею об абсолютном нуле температуры.

Кулон занимался строительной механикой и теорией трения. Исследуя законы упругого кручения нитей, он построил чрезвычайно точный измерительный прибор – крутильные весы. Именно с их помощью он смог экспериментально установить основные законы электростатики и магнитостатики.

Итак, изложим, следуя (хотя и не буквально) Амонтону и Кулону, законы трения скольжения. Предварительно – для простоты записи – введем одно обозначение.

Обозначим через N модуль нормальной реакции: $N \equiv \left|\overline{\mathbf{N}}\right|$.

Законы трения скольжения (при покое).

1°. Если тело, на которое действует сила трения скольжения, находится в покое, то модуль ее может принимать любое значение от нуля до $F^{\text{тр}}_{\max}$:

(∗)
$$\left| \overline{\mathbf{F}}^{\,\text{тр}} \right| \leqslant F^{\text{тр}}_{\max},$$

а сама она должна удовлетворять уравнениям равновесия.

Об этом мы уже говорили в предыдущем пункте. Если задача – статически определимая, то вектор силы трения можно найти из уравнений равновесия, а условие (∗) используется для проверки того, действительно ли покой тела возможен.

Впрочем, задачи на равновесие тел с трением часто бывают статически неопределимыми.

Терминологическое замечание:

Случай $\left| \overline{\mathbf{F}}^{\,\text{тр}} \right| = F^{\text{тр}}_{\max}$ называется случаем *предельного равновесия*.

2°. Предельная величина силы трения пропорциональна модулю нормальной реакции (закон **Амонтона – Кулона**):

(∗∗)
$$\boxed{F^{\text{тр}}_{\max} = f_0 N} \; .$$

где f_0 – безразмерный **статический коэффициент трения**.

Таким образом, по закону Амонтона – Кулона предельная величина силы трения линейно зависит от модуля нормальной реакции.

3°. Значение f_0 не зависит от площади соприкосновения.

В частности, оно останется тем же самым, если перейти от случая поверхностного контакта к случаю контакта точечного.

4°. Значение f_0 зависит от материала соприкасающихся тел, чистоты обработки поверхностей и т.д.

Содержание первых трех законов знал уже Амонтон (а Кулон обосновал их заново с помощью своих экспериментов, весьма точных для того времени).

Выявление же факторов, от которых зависит значение статического коэффициента трения – это заслуга Кулона (Амонтон получил в своих опытах для f_0 значение $^1/_3$ и ограничился этим). Кулон выяснил, среди прочего, что значение f_0 зависит от направления движения (скажем, поперек волокон древесины или вдоль них), от температуры и влажности атмосферы, от времени предварительного контакта поверхностей.

Приведем некоторые данные о возможных значениях статического коэффициента трения.

Значение f_0 при нормальных условиях для некоторых пар материалов: 0,15 (сталь – сталь), $0{,}3 \div 0{,}5$ (чугун – дерево), 0,027 (сталь – лед).

Заметим, что если говорить о металлах, то эти данные даны для обычных условий, когда поверхность металла покрыта тонкой оксидной пленкой. Если предотвратить ее образование (что достаточно трудно), то имеет место так называемый случай *ювенильного* трения, при котором значение коэффициента трения возрастает в несколько раз.

Заслуга установления законов трения качения (чего мы сейчас не касаемся) – тоже заслуга Кулона. Что же касается трения верчения, то он сумел экспериментально определить вызванный трением момент сопротивления стрелки компаса, установленной на острие. Решение этой задачи требовало измерения очень малых моментов трения, но это не смутило Кулона – изобретателя сверхчувствительных крутильных весов.

Мы рассмотрели не все законы трения скольжения, а лишь законы трения при покое. С законами, которым подчиняется трение при движении, Вы познакомитесь при изучении динамики.

Справедливости ради надо отметить, что бóльшую часть законов трения открыл еще замечательный итальянский художник и ученый-энциклопедист Леонардо да Винчи (1452 – 1519). Но эти его результаты остались в рукописях, и были опубликованы лишь в XX веке, так что влияния на ход развития науки они не оказали.

Замечание. Кулон показал, что в некоторых случаях вместо закона (∗∗) более точной является следующая *формула Кулона*:

$$F^{\text{тр}}_{\max} = f_0 N + A ,$$

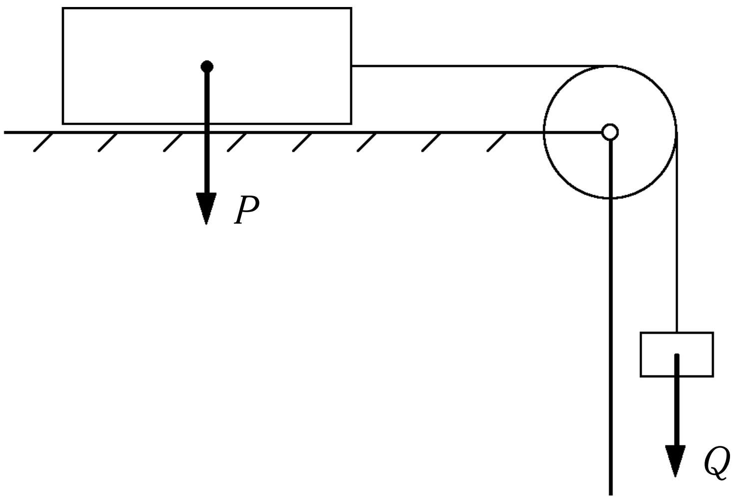
где A – *сцепляемость*, пропорциональная площади соприкосновения.

С современной точки зрения, наличие этого слагаемого есть следствие эффектов адгезии. Таким образом, в общем случае часть трения не зависит от нормальной реакции. В большинстве случаев, однако, сцепляемость весьма мала, и этим слагаемым пренебрегают.

После Амонтона и Кулона долгое время существенных продвижений в науке о трении не было. Только в XX веке наметился явный прогресс: были описаны и объяснены некоторые отклонения от сформулированных здесь законов трения, получен ряд других формул, уточняющих или заменяющих закон Амонтона – Кулона, изучена – уже на количественном уровне – конкретная зависимость значений f_0 от отдельных физических факторов и т.д. Но рассмотрение этих достижений современной трибологии выходит за рамки курса механики.

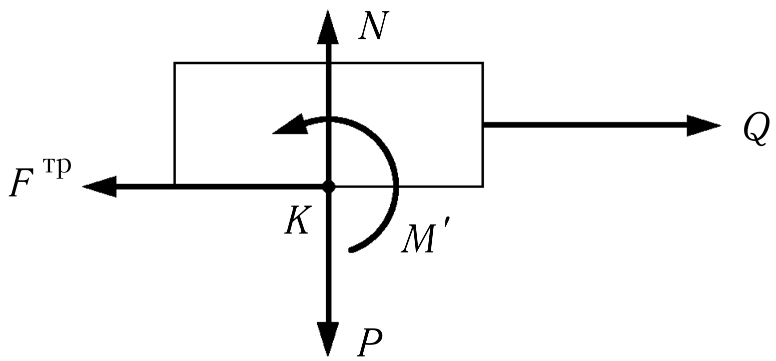
Перейдем к примерам решения задач статики при наличии сил трения скольжения.

Пример 1. Рассмотрим схему простейшего *трибометра* – прибора для измерения силы трения.



Здесь брусок веса P лежит на неподвижной плоскости (ситуация, рассматривавшаяся нами в предыдущем пункте), а к бруску привязана нить. Нить переброшена через невесомый блок; на ее конце подвешен груз веса Q (этот груз можно заменять другим).

Освободим брусок от связей:



Здесь сила натяжения нити, разумеется, равна весу груза Q – что и показано на рисунке.

Сила P перенена вниз по ее линии действия, что законно.

Момент M' здесь заведомо ненулевой: он должен уравновешивать вращательное действие пары сил, образуемой силами Q и $F^{\text{тр}}$. А вот о моменте трения верчения говорить не приходится: он должен был бы лежать в плоскости рисунка, но система сил – плоская, и он заведомо будет равен нулю.

Составляем уравнения равновесия:

$$x: \quad Q - F^{\text{тр}} = 0 \quad \Rightarrow \quad F^{\text{тр}} = Q\,;$$

$$y: \quad N - P = 0 \quad \Rightarrow \quad N = P\,.$$

Уравнение моментов, из которого можно найти момент M', писать не будем. Итак, сила трения равна весу груза, т.е. известной величине. А для нахождения статического коэффициента трения можно действовать так.

Подбором груза находим наибольшее значение веса Q, при котором брусок будет покоиться: $Q = Q_{\max}$.

В силу закона Амонтона – Кулона

$$F^{\text{тр}}_{\max} = f_0 N ,$$

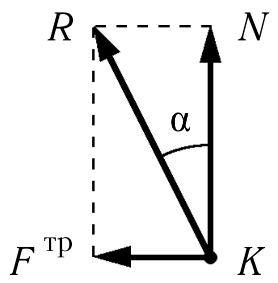
так что

$$f_0 = \frac{F^{\text{тр}}_{\max}}{N} = \frac{Q_{\max}}{P} .$$

Прежде чем рассмотреть второй пример, проведем некоторые рассуждения.

В задаче о трибометре мы раскладывали силу реакции связи на две составляющие: силу трения $F^{\text{тр}}$ и нормальную реакцию N (так мы поступали и раньше). Но иногда бывает удобнее работать непосредственно с полной реакцией связи.

Рассмотрим теперь полную реакцию в точке K:



Пусть α – угол между векторами $\overline{\mathbf{R}}$ и $\overline{\mathbf{N}}$.

Напомню, что вектор нормальной реакции $\overline{\mathbf{N}}$ направлен вдоль внешней нормали к поверхности.

Имеем:

$$F^{\text{тр}} \leqslant F^{\text{тр}}_{\max} = f_0 N .$$

Но $F^{\text{тр}} = R \sin\alpha$, $N = R\cos\alpha$, так что

$$R\sin\alpha \leqslant f_0 R\cos\alpha ;$$

$$\operatorname{tg}\alpha \leqslant f_0 ;$$

$$\alpha \leqslant \alpha_0 , \quad \text{где} \quad \alpha_0 = \operatorname{arctg} f_0 .$$

А теперь – определение:

Угол $\alpha_0 = \operatorname{arctg} f_0$ называется **<u>углом трения</u>**.

Таким образом, вместо статического коэффициента трения можно задавать угол трения (в справочниках обычно приводятся обе величины).

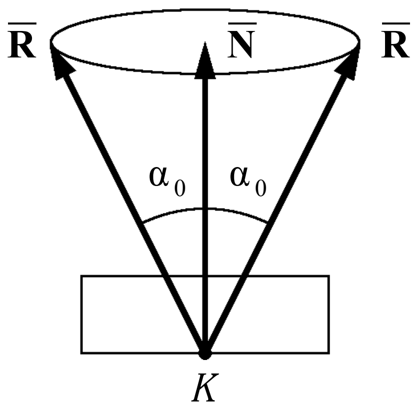
Вывод: при равновесии угол вектора полной реакции с вектором внешней нормали к поверхности меньше угла трения или (в случае предельного равновесия) равен ему.

Заметим, что угол трения не определяет однозначно направление вектора $\overline{\mathbf{R}}$ даже в случае предельного равновесия. С изменением системы активных сил это направление будет меняться.

Так, если в нашем примере *1* силу Q приложить не справа, а слева от бруска, то сила $\overline{\mathbf{R}}$ будет отклоняться от силы $\overline{\mathbf{N}}$ на тот же угол α_0 (при предельном равновесии), но уже вправо. В более общем случае вектор $\overline{\mathbf{R}}$ может произвольным образом поворачиваться вокруг вектора $\overline{\mathbf{N}}$.

Введем теперь еще одно определение.

Геометрическое место всех возможных направлений полной реакции $\overline{\mathbf{R}}$ при предельном равновесии называется **конусом трения**.



Замечание. Если коэффициент f_0 зависит от направления возможного движения тела, конус трения не будет круговым.

Теперь сделанный нами ранее вывод можно сформулировать и иначе.

Вывод: при равновесии вектор $\overline{\mathbf{R}}$ лежит внутри или (при предельном равновесии) на границе конуса трения.

Из данного вывода немедленно вытекает интересное следствие.

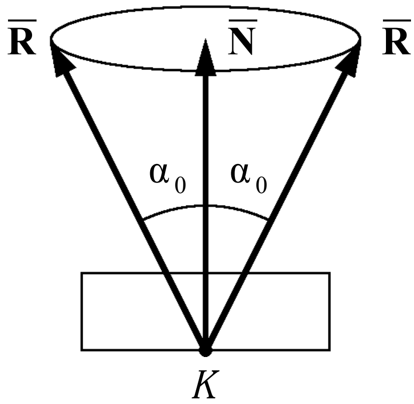
Следствие. Если система активных сил приводится к одной силе, приложенной в точке K, то ее направление при равновесии совпадает с направлением $\overline{\mathbf{R}}$. Сколь бы велика ни была эта сила, она не может сдвинуть тело, если ее линия действия не выходит за пределы конуса трения.

Теперь рассмотрим второй пример.

Пример 2. Лестница опирается концами A и B на пол и стену (углы трения α_A и α_B известны). Выяснить, при каких положениях стоящего на ней человека весом P она останется в равновесии.

Сама лестница предполагается невесомой.

Нарисуем лестницу вместе со стенкой и полом, а потом освободим ее от связей.



Предварительно проделаем такие рассуждения.

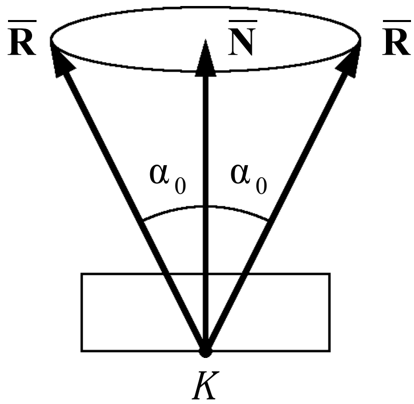
Линия действия силы $\overline{\mathbf{P}}$ – вертикаль l, проходящая через точку C. Линия действия силы $\overline{\mathbf{R}}_B$ заведомо пересекает эту вертикаль в какой-то точке D.

Перенесем силы $\overline{\mathbf{R}}_B$ и $\overline{\mathbf{P}}$ в точку D и сложим, получив силу $\overline{\mathbf{F}}.D$.

Значит, можно считать, что на лестницу действуют *две* силы: $\overline{\mathbf{F}}$ и $\overline{\mathbf{R}}_A$. При этом линия действия силы $\overline{\mathbf{F}}$ проходит через точку D.

По аксиоме о двух силах, при равновесии силы $\overline{\mathbf{F}}$ и $\overline{\mathbf{R}}_A$ обязаны иметь общую линию действия. Итак, линии действия всех трех сил должны иметь общую точку пересечения.

А теперь будем решать задачу графически. Построим в точках A и B конусы трения.



Поясним рисунок.

Изображены два угловых сектора, получаемые при пересечении конусов трения с плоскостью рисунка; общая часть U секторов заштрихована.

Точка пересечения D линий действия сил $\overline{\mathbf{R}}_A$ и $\overline{\mathbf{R}}_B$ должна находиться в области U.

Но через эту точку обязана пройти и линия действия силы $\overline{\mathbf{P}}$, т.е. вертикаль l.

Вывод: при равновесии точка C должна располагаться так, чтобы вертикаль l пересекала область U (т.е. точка C принадлежала отрезку AC').

Задача, между прочим, является статически неопределимой, так как в ней четыре неизвестных: модули сил $\overline{\mathbf{R}}_A$ и $\overline{\mathbf{R}}_B$ и углы, задающие направление этих сил.

Все эти неизвестные можно было бы найти, если бы мы знали положение точки D. Но мы реально знаем лишь, что она принадлежит отрезку, высекаемому областью U на прямой l.

Эта ситуация типична для задач статики при наличии трения: положение равновесия здесь не является единственным.

Отметим еще такой факт:

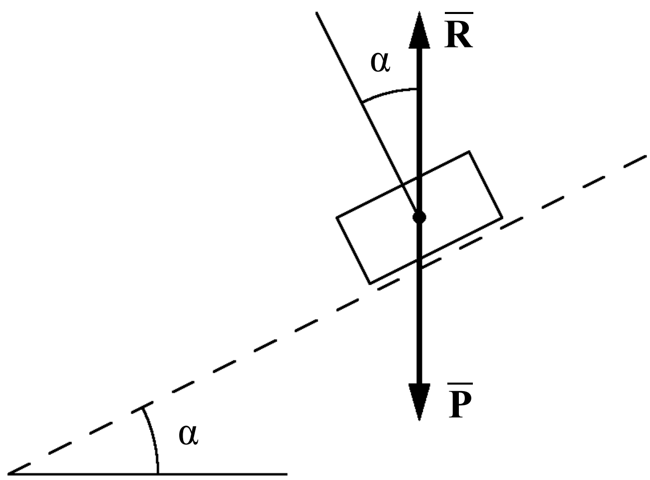
Если $\alpha_A \geqslant \beta$, то точка C может располагаться где угодно на отрезке AB.

Действительно, в этом случае лестница попадет внутрь конуса трения, построенного для точки A. В этом случае пересечение вертикали с областью U будет заведомо непусто, так как самой левой точкой этой области будет точка B.

Упомянем еще одно применение понятия угла трения.

Прежде всего, приведем схему простого эксперимента, из которого этот угол можно найти непосредственно.

<u>Замечание.</u> Для бруска, лежащего на шероховатой наклонной плоскости, полная реакция должна уравновешивать силу тяжести:



Мы предположили, что другие активные силы на брусок не действуют.

Заметим теперь, что угол α вектора $\overline{\mathbf{R}}$ с нормалью к плоскости, очевидно, равен углу наклона этой плоскости.

Поэтому угол трения равен *углу естественного откоса* – максимальному углу наклона плоскости, при котором брусок еще может находиться в равновесии.

Если заменить наклонную плоскость конусообразной кучей песка (или другого сыпучего материала), причем крутизна этой кучи будет больше, чем угол естественного откоса (равный сейчас углу трения между частицами песка), то песчинки начнут скатываться вниз. Стало быть, крутизна кучи не может превосходить угол естественного откоса (иначе куча осыплется).

Рассмотрим теперь еще одну задачу, в которой весьма существенна роль сил сухого трения. Речь пойдет о моделировании "игры сил" в тормозном механизме.

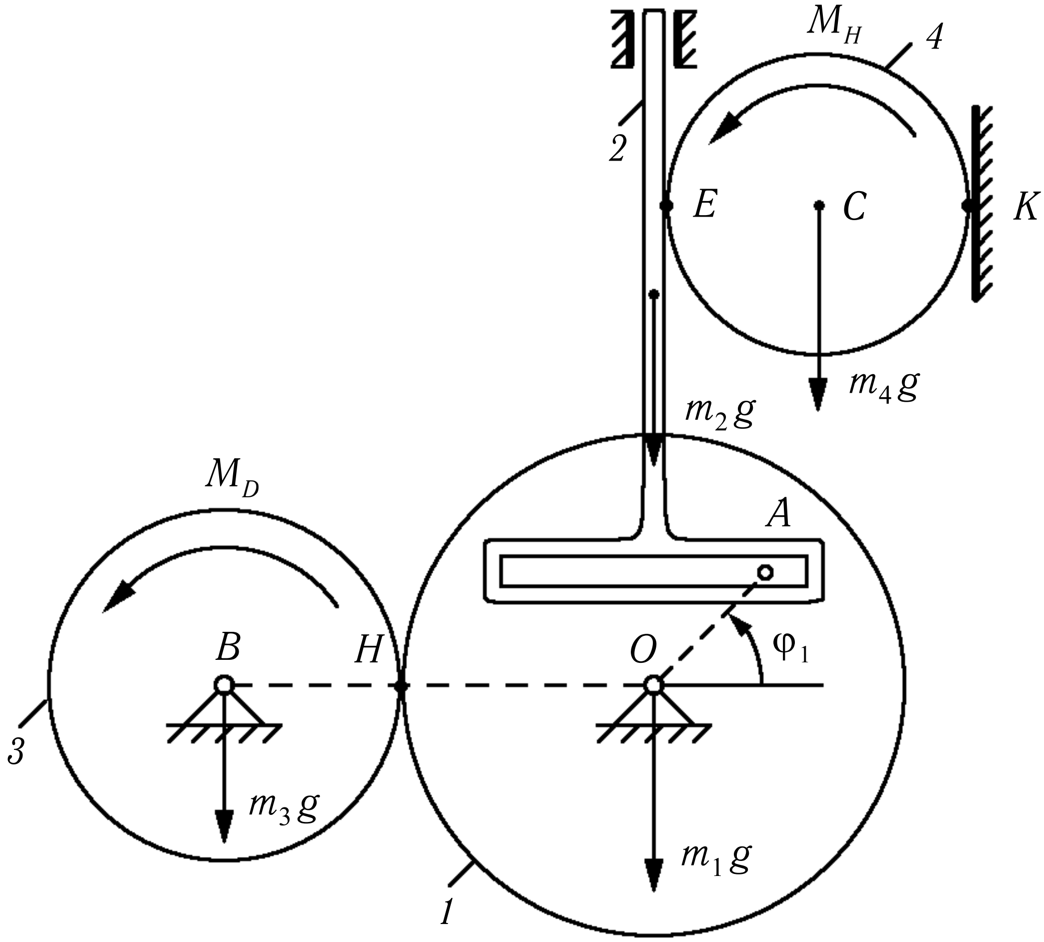
3. Задача о тормозной колодке

Для уменьшения скорости или для полной остановки транспортной машины используют тормоза. Исполнительным органом тормозной системы является тормозной механизм.

Это – устройство, с помощью которого усилие, создаваемое тормозным приводом, преобразуется в тормозное воздействие, прикладываемое к колесу и создающее искусственное сопротивление его вращению.

В современных транспортных машинах применяют тормоза различных типов: колодочные, дисковые и ленточные. Мы рассмотрим одну из конструкций колодочного тормоза, которая использовалась в некоторых моделях мотоциклов. Иногда колодочный тормоз называют еще барабанным тормозом.

Схема колодочного тормоза мотоцикла:



Здесь: *1* – барабан, *2* и *3* – колодки, *4* – кулачок.

Кулачок – это звено механизма с поверхностью переменной кривизны. При повороте кулачка *4* изменяется относительное положение колодок: они сближаются или раздвигаются.

Барабан тормоза установлен на оси колеса и жестко с этой осью соединен. Стрелка на рисунке показывает направление вращения барабана (и колеса).

Колодки располагаются внутри барабана. Пока водитель не пользуется тормозом, они с поверхностью барабана не соприкасаются. При этом кулачок занимает вертикальное положение, колодки сближены, а пружина удерживает их в таком положении.

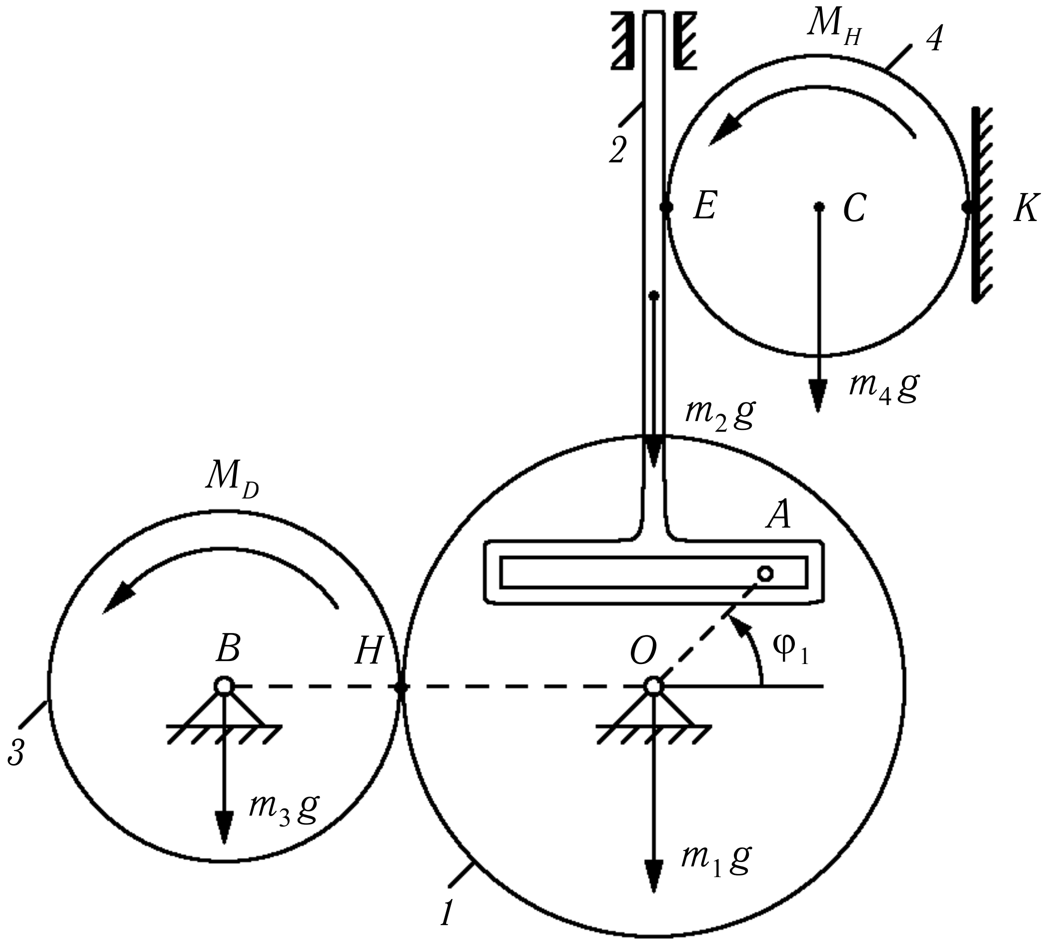
Если торможение начинается, то усилие, создаваемое приводом, поворачивает кулачок, колодки раздвигаются и прижимаются к поверхности барабана. Возникающие при таком контакте силы трения тормозят вращение барабана.

Для анализа принципиальных особенностей "игры сил" в тормозном механизме мы рассмотрим очень упрощенную его модель. Для перехода к ней мысленно разобьем колодку *2* на отдельные тонкие элементы, имеющие форму стержня (один из таких элементов показан на рисунке).

Будем следить только за одним элементом, а барабан заменим прямоугольной пластинкой. Будем работать в системе отсчета, связанной с мотоциклом, которую и примем за условно неподвижную.

Приходим к следующей задаче.

Случай 1 (прижимная колодка). Стержень *2* длины l опирается концом A на пластинку *1*, которая лежит на гладкой плоскости.



Здесь сила P моделирует действие кулачка на колодку, Q – вес пластинки, F – сила, "вырывающая" пластинку из-под колодки.

Строго говоря, стержень соответствует не самой колодке, а лишь одному из ее элементов; но для краткости мы именуем его просто "колодкой".

Предполагается, что все перечисленные силы направлены именно так, как показано на рисунке, т.е. значения переменных P, Q и F положительны. Отметим это:

Считаем, что $P,\ Q,\ F\ >\ 0$.

Это требование является, стало быть, одним из условий задачи.

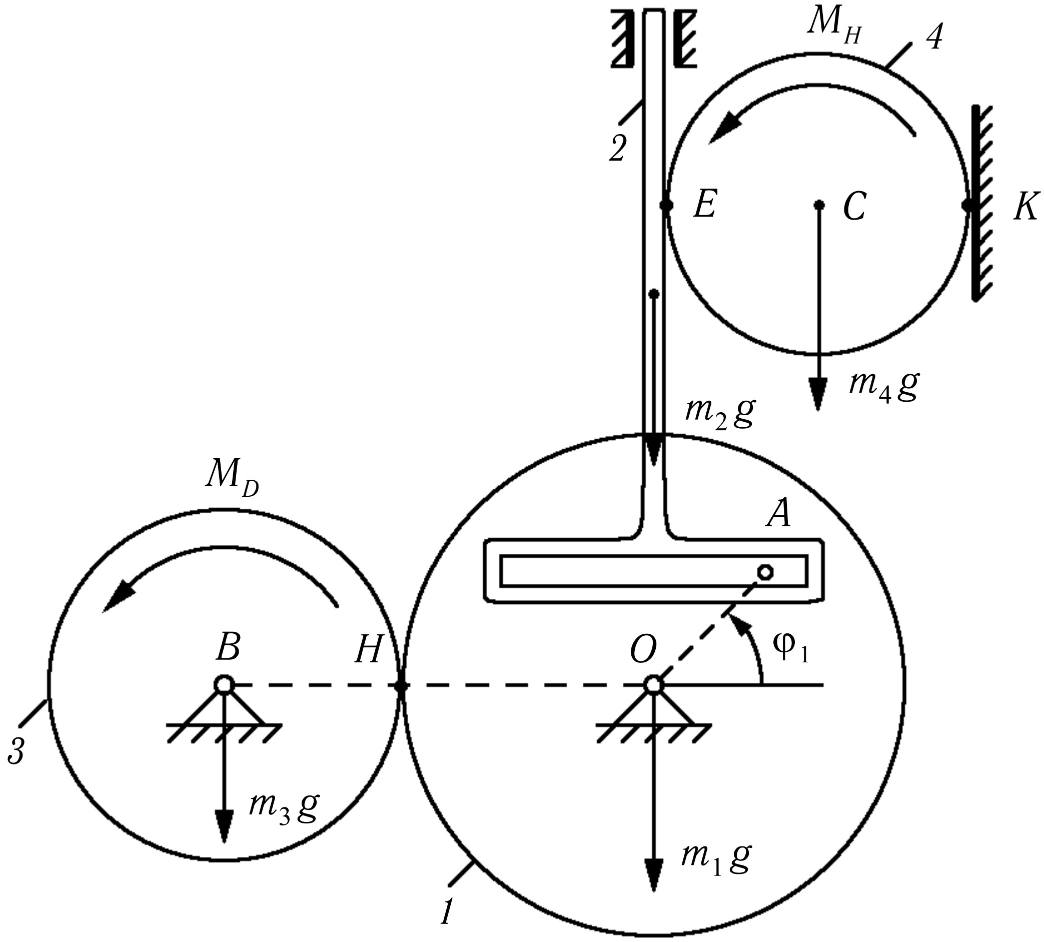
Поскольку плоскость – гладкая, то трения между пластинкой и плоскостью нет. Но между пластинкой и стержнем трение есть.

Пусть f_0 – статический коэффициент трения в точке A.

Мы считаем, что силы P и Q, длина l, угол α и коэффициент f_0 заданы.

Требуется найти силу F, при которой система будет в равновесии.

Освободим систему от связей:



Заметим сразу же:

X_A – сила трения, Y_A – нормальная реакция.

Почему направление введенных нами реакций связей выбрано именно таким? При равновесии действующая на пластинку сила X_A должна уравновешивать силу F, поэтому она и направлена в сторону, противоположную силе F. Стержень давит на пластинку, так что сила Y_A направлена вниз.

Применяя теперь аксиому о действии и противодействии, однозначно определяем и направление сил, действующих в точке A на стержень со стороны пластинки.

Со стороны гладкой плоскости на пластинку действуют сила N и пара сил с моментом M'. Так как связь – односторонняя, то сила N направлена вверх; направление же момента M' выбрано произвольно.

Предметный и именной указатель