

М. Н. Кирсанов

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ
2002

УДК 531 (075.8)
ББК 22.21
К 62

Кирсанов М. Н. **Решебник. Теоретическая механика.** / Под ред. А. И. Кириллова— М., ФИЗМАТЛИТ, 2002. — 384 с. — ISBN 5-9221-0281-8.

Изложены алгоритмы и примеры решения задач статики, кинематики и динамики из курса теоретической механики, изучаемого в технических вузах.

Каждой задаче отведен отдельный раздел, содержащий общую постановку задачи, план ее решения с необходимыми теоретическими пояснениями и пример. Кроме того, в раздел включены десять задач для самостоятельного решения и ответы к ним. Разобраны характерные ошибки, и даны ответы на типичные вопросы, возникающие при решении задач.

Приведены программы решения некоторых задач в системе Maple V.

Книга может быть использована как при очной, так и при дистанционной формах обучения.

Для студентов и преподавателей технических вузов.

Ил. 187.

ISBN 5-9221-0281-8

© ФИЗМАТЛИТ, 2002

© М. Н. Кирсанов, 2002

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	8
I. СТАТИКА	11
Глава 1. ПЛОСКАЯ СИСТЕМА СХОДЯЩИХСЯ СИЛ	14
1.1. Простая стержневая система	14
1.2. Равновесие цепи	21
1.3. Теорема о трех силах	26
Глава 2. ПРОИЗВОЛЬНАЯ ПЛОСКАЯ СИСТЕМА СИЛ	31
2.1. Равновесие тяжелой рамы	31
2.2. Ферма. Аналитические методы расчета	37
2.3. Ферма. Графический расчет	45
2.4. Расчет составной конструкции	54
2.5. Конструкция с распределенными нагрузками	61
2.6. Расчет системы трех тел, соединенных шарниром	67
Глава 3. РАВНОВЕСИЕ ПРИ НАЛИЧИИ ТРЕНИЯ	74
3.1. Трение скольжения	74
3.2. Трение качения	80
Глава 4. ПРОСТРАНСТВЕННАЯ СИСТЕМА СИЛ	86
4.1. Пространственная ферма	86
4.2. Момент силы относительно оси	91
4.3. Равновесие вала	94
4.4. Определение усилий в стержнях, поддерживающих плиту	101
4.5. Тело на сферической и стержневых опорах	106
4.6. Приведение системы сил к простейшему виду	111
Глава 5. ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ	118
5.1. Центр тяжести плоской фигуры	118
5.2. Пространственная стержневая система	122
5.3. Центр тяжести объемного тела	125

II. КИНЕМАТИКА	129
Глава 6. КИНЕМАТИКА ТОЧКИ	131
6.1. Движение точки в плоскости	131
6.2. Путь, пройденный точкой	136
6.3. Движение точки в пространстве	137
6.4. Естественный способ задания движения точки	140
6.5. Движение точки в полярных координатах	144
Глава 7. ВРАЩАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТЕЛА	149
7.1. Вращательное движение тела	149
7.2. Передача вращения	152
Глава 8. ПЛОСКОЕ ДВИЖЕНИЕ ТЕЛА	158
8.1. Скорости точек многосвязного механизма	158
8.2. Ускорения точек многосвязного механизма	170
8.3. Уравнение трех угловых скоростей	179
8.4. Уравнение трех угловых ускорений	183
8.5. Кинематические уравнения плоского движения	188
Глава 9. СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ	195
9.1. Сложное движение точки в плоскости	195
9.2. Сложное движение точки в пространстве	202
9.3. Движение точки по звену механизма	209
9.4. Механизм с муфтой	216
Глава 10. СФЕРИЧЕСКОЕ ДВИЖЕНИЕ ТЕЛА	222
10.1. Скорость и ускорение точки тела	222
III. ДИНАМИКА	226
Глава 11. ДИНАМИКА ТОЧКИ	228
11.1. Постоянные силы	228
11.2. Переменные силы	232
Глава 12. ДИНАМИКА СИСТЕМЫ	236
12.1. Теорема о движении центра масс	236
12.2. Кинетическая энергия механической системы	241
12.3. Теорема об изменении кинетической энергии	247
12.4. Теорема о моменте количества движения системы	253
12.5. Динамический расчет механизма с неизвестным параметром	257

12.6. Плоское движение системы	266
12.7. Динамические реакции в подшипниках ротора	272
Глава 13. АНАЛИТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА	279
13.1. Принцип возможных скоростей	279
13.2. Общее уравнение динамики (одна степень свободы)	288
13.3. Общее уравнение динамики (две степени свободы)	294
13.4. Уравнение Лагранжа 2-го рода (две степени свободы)	300
13.5. Уравнение Лагранжа. Нелинейные уравнения движения	307
13.6. Уравнение Лагранжа 2-го рода для консервативных систем	318
13.7. Функция Гамильтона	324
13.8. Уравнения Гамильтона	326
Глава 14. МАЛЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМЫ	336
14.1. Система с двумя степенями свободы	336
14.2. Колебания узла фермы	343
IV. РЕШЕНИЯ В СИСТЕМЕ MARLE V	349
Глава 15. ПРОГРАММЫ ПО СТАТИКЕ	350
15.1. Расчет фермы	350
15.2. Центр тяжести плоской фигуры	355
Глава 16. ПРОГРАММЫ ПО КИНЕМАТИКЕ	358
16.1. Кинематика точки	358
16.2. Механизм с двумя степенями свободы	361
16.3. Скорости точек плоского механизма	364
Глава 17. ПРОГРАММЫ ПО ДИНАМИКЕ	368
17.1. Принцип возможных скоростей	368
17.2. Динамика машины с кулисным приводом	370
17.3. Колебания системы с двумя степенями свободы	373
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	375
ИМЕННОЙ И ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ	377

ПРЕДИСЛОВИЕ

Теоретическая механика — одна из важнейших дисциплин в техническом вузе. Решение задач по этой дисциплине всегда представляет определенную трудность для студента. Вызвано это многообразием тем или обилием уравнений и теорем, множеством методов, уровнем абстракции при решении задач или какими-либо другими причинами — неизвестно. Скорее всего, для студентов младших курсов все эти факторы вместе приводят к тому, что, по общему мнению, теоретическая механика, наряду с математикой и сопротивлением материалов, числится в технических вузах наиболее сложной дисциплиной.

При столкновении с трудной задачей лучшим помощником для студента, самостоятельно изучающего науку, является книга. По теоретической механике существует много учебников. Можно рекомендовать, например, изданный большим тиражом краткий курс Тарга С.М. [19]. Очень хорошо подходит для технических вузов учебник [5]. В этих учебниках и во многих других после изложения теории дается несколько примеров решения задач. Ознакомление с готовыми решениями *) — один из способов обучения, но не самый лучший. Если ставить перед собой цель научиться решать задачи (а не решить вот эту — конкретную задачу), то лучше всего овладеть секретами мастерства: алгоритмами и схемами решений, методами и специальными приемами. РЕШЕБНИК “Теоретическая механика” ставит перед собой именно такую цель. Продолжая традиции РЕШЕБНИКА “Высшая математика” [10] и РЕШЕБНИКА “Высшая математика.

*) В сети Интернет существуют специальные страницы, где приводятся готовые решения заданий и задач по теоретической механике. Форма и содержание таких решений часто не удовлетворяют самым скромным запросам, не говоря уже о том, что научить они мало чему смогут.

Специальные разделы” [2], в книге даны, во-первых, четкая постановка задачи, во-вторых, конкретный план действий и, наконец, пример решения задачи по этому плану. В качестве примеров взяты задачи из сборника задач Мещерского И.В. [14] или задачи близкие к ним. В конце каждого параграфа приведены десять задач, которые могут быть решены студентами самостоятельно, а некоторые, наиболее сложные, соответствуют по уровню курсовым работам. За образец для таких работ взяты задания из сборников Яблонского А.А. [17] и Новожилова И.В., Зацепина М.Ф. [15].

Ко всем задачам даны не только ответы, но и, как правило, промежуточные результаты. Это упрощает проверку решения. Числовые ответы приведены с двумя или тремя знаками после запятой, предполагая, что данные в задаче имеют соответствующую точность.

Там, где это необходимо, после решения задачи даются ответы на характерные вопросы, возникающие у студентов в процессе решения. За двадцать лет преподавания теоретической механики автор накопил достаточное число таких вопросов. Даны также предостережения о возможных ошибках в решении задач.

В последней части РЕШЕБНИКА приведены примеры решения задач с использованием универсальной математической системы Maple V, позволяющей решить задачу в аналитическом виде и изобразить исследуемое явление, например, движение механизма, на экране компьютера.

Полные тексты приведенных здесь программ и программы для решения других задач механики с примерами, подробными пояснениями и графическим представлением результатов можно найти на авторской странице Интернет: www.academiaxxi.ru/solverTM.html.

Ссылка на РЕШЕБНИК “Высшая математика” обозначена как *Решebник VM* с указанием соответствующего параграфа.

В дополнение к этой книге и к программам для Maple V распространяется пакет программ РЕШЕБНИК.ТМ, представляющий собой электронную версию РЕШЕБНИКА, разработанную на основе пакета AcademiaXXI. С помощью пакета программ РЕШЕБНИК.ТМ студент сможет проще решать многие задачи теоретической механики, уделяя больше сил и времени разбору сути задачи и физического явления, лежащего в основе задачи, предоставляя компьютеру рутинную часть работы, связанную с математическими выкладками и численным счетом.

Для преподавателей теоретической механики автор разработал специальную программу-генератор задач, создающую тексты усло-

вий и ответов по 50 темам статики, кинематики и динамики. Тексты задач и рисунки в формате \LaTeX могут быть использованы для очного и дистанционного обучения. Программа содержит сотни тысяч вариантов задач и используется автором в его педагогической работе. По десять задач из почти всех разделов программы-генератора приведены в этой книге в качестве примеров.

Подробная информация о пакете РЕШЕБНИК.ТМ, программе-генераторе задач и сами программы размещены на странице Интернет: www.academiaxxi.ru/solverTM.html.

Автор будет благодарен всем приславшим свои замечания о комплексе РЕШЕБНИК “Теоретическая механика” и предложения по адресу:

111250 Москва, ул. Красноказарменная, д. 17, Московский энергетический институт (ТУ), кафедра теоретической механики.

E-mail: Kirsanov@termech.mpei.ac.ru.

Часть I

СТАТИКА

В статике изучается равновесие тел под действием сил и свойства систем сил, необязательно находящихся в равновесии.

Задачи статики можно условно разделить на три типа: задачи на равновесие системы сходящихся сил, т.е. сил, линии действия которых пересекаются в одной точке (глава 1), задачи произвольной плоской системы сил (главы 2,3) и задачи пространственной системы сил (глава 4).

Нахождение координат центра тяжести (глава 5) тоже считается задачей статики. Хотя силы в этой задаче явно не присутствуют, основные формулы задачи следуют из уравнений равновесия системы параллельных сил.

Искомые величинами в задачах статики могут быть реакции опор, усилия в элементах конструкций, геометрические (размеры, углы) и материальные (вес, коэффициент трения) характеристики систем. В статически определимых задачах число уравнений равновесия совпадает с числом неизвестных. Именно такие задачи и будут рассмотрены в этой части.

Для решения задач статики потребуются понятия проекции силы на ось и момента силы относительно точки и оси. Напомним, что проекция вектора силы \vec{F} на ось x определяется по формуле $F_x = F \cos \alpha$, где α — угол между положительным направлением оси и вектором силы, отсчитываемый против часовой стрелки. Если угол острый, то проекция положительная, если тупой — отрицательная.

Общее определение момента \vec{M}_O силы \vec{F} относительно точки O дается векторным произведением

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{r}_0 \times \vec{F}, \quad (1)$$

где \vec{r}_0 — радиус-вектор точки приложения вектора силы относительно точки O . Модуль момента вычисляем по формуле $M_O(\vec{F}) = r_0 F \sin \gamma$,

где γ — угол между векторами \vec{r}_0 и \vec{F} . Направление вектора момента вычисляется по правилу векторного произведения. Плечо h силы относительно точки O — это кратчайшее расстояние от точки до линии действия силы; $h = r_0 \sin \gamma$.

Вектор момента перпендикулярен плоскости, в которой располагаются силы. Поэтому в задачах статики плоской системы сил момент можно рассматривать как скалярную величину — величину проекции вектора момента на нормаль к плоскости (ось z). Индекс z для сокращения записи часто опускают и отождествляют момент силы M_O относительно точки на плоскости со скалярной величиной — M_{Oz} . Отсюда вытекает практическое правило определения момента силы относительно точки в плоских задачах статики. Для вычисления момента силы относительно точки O (рис. 1) сначала находим проекции силы на оси, а затем момент вычисляем по формуле $M_{Oz}(F) = -F_x \cdot y_0 + F_y \cdot x_0$. Другой способ вычисления момента: $M_{Oz}(F) = \pm F h$, где h — плечо силы относительно точки O .

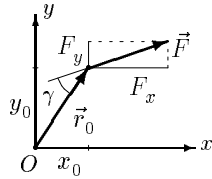


Рис. 1

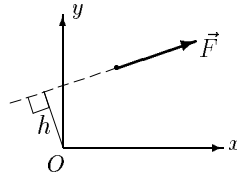


Рис. 2

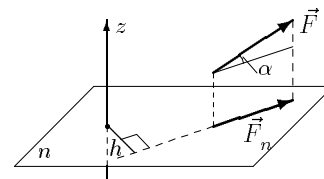




Рис. 3

Знак определяется по правилу векторного произведения. Если сила поворачивает тело относительно центра по часовой стрелке — момент отрицательный, против часовой стрелки — положительный. На рис. 2 момент силы \vec{F} относительно точки O отрицательный. Если сила или линия ее действия пересекает точку, то момент силы относительно этой точки равен нулю.

При решении задач пространственной статики (§ 4.3 – § 4.6) требуется вычислять момент силы относительно оси, или, что то же, проекцию момента силы относительно точки (1) на ось, проходящую через нее. Иногда эту величину удобнее искать как момент проекции \vec{F}_n силы на плоскость, перпендикулярную оси, относительно точки пересечения оси с плоскостью (рис. 3). Знак определяем по направлению вращения вокруг оси с точки зрения наблюдателя, находящегося на конце оси. Если вращение происходит по часовой стрелке, то момент отрицательный, против часовой стрелки — положительный.

Момент силы относительно оси равен нулю, если сила параллельна оси или пересекает ее, т.е., если сила и ось лежат в одной плоскости.

Кроме сил в статике рассматриваются и пары сил. Пара — это совокупность двух равных параллельных противоположно направленных сил. Пара характеризуется моментом — суммой моментов ее сил относительно некоторой точки. Легко показать, что положение точки не существенно и на величину момента не влияет, поэтому момент пары является свободным вектором. Напомним, что вектор силы является вектором скользящим. В зависимости от знака момента пары на плоскости изображать пару будем изогнутой стрелкой  или . Не путать эту стрелку с вектором пары! Вектор пары перпендикулярен ее плоскости.

Решение двух задач статики в системе Maple V приведено в § 15.1, 15.2. Большинство задач статики сводится к решению систем линейных уравнений. Рутинную часть работы по составлению и решению уравнений можно поручить Maple V. Простейшая программа может выглядеть, например, так:

```
eq1:=Xa*2.5+Ya*3.1=20:
eq2:=-Xa*1.5+Ya*10=-12.5:
solve({eq1,eq2},{Xa,Ya});
```

Записывая уравнение на компьютере, а не на бумаге, вы достигаете сразу же нескольких целей. Во-первых, компьютер выполняет математические действия, часто весьма громоздкие. Во-вторых, уравнение легко поправить и сразу же пересчитать, если вы ошиблись при составлении уравнения и ответ не сходится. В-третьих, решение удобно оформить, распечатав его на принтере. Можно вывести график, таблицу результатов и т.д. Все эти действия можно выполнить и в других системах, в частности, в пакете AcademiaXXI, представленном на сайте www.academiaxxi.ru.

Глава 1

ПЛОСКАЯ СИСТЕМА СХОДЯЩИХСЯ СИЛ

При изучении темы ПЛОСКАЯ СИСТЕМА СХОДЯЩИХСЯ СИЛ вы научитесь составлять уравнения проекций и решать задачи равновесия плоских стержневых систем методом вырезания узлов. Этот метод лежит в основе компьютерной программы расчета ферм (§15.1).

1.1. Простая стержневая система

Постановка задачи. Плоская шарнирно-стержневая конструкция закреплена на неподвижном основании и нагружена в шарнирах силами. Найти усилия в стержнях.

ПЛАН РЕШЕНИЯ

Рассматриваем равновесие внутренних шарниров системы, не соединенных с неподвижным основанием. Такие шарниры будем называть узлами. Действие каждого стержня заменяем его реакцией — силой, направленной из узла к стержню. Усилие — это проекция реакции стержня на внешнюю нормаль к сечению. Если в результате решения задачи реакция стержня, приложенная таким образом к узлу, оказывается отрицательной, то стержень сжат, в противном случае стержень растянут.

1. Вырезаем узел, соединенный только с двумя стержнями. Действие стержней заменяем их реакциями.
2. Для полученной системы сходящихся сил составляем уравнения равновесия в проекциях на выбранные для этого узла оси.
3. Решаем систему двух линейных уравнений и находим искомые усилия.
4. Вырезаем очередной узел системы, тот, к которому подходят не более двух стержней с неизвестными усилиями. Составляем и решаем уравнения равновесия в проекциях на оси, выбранные для этого

узла. Этот пункт плана выполняем несколько раз для всех узлов до нахождения всех усилий.

5. Для проверки решения мысленно отделяем конструкцию от основания, заменяя действие рассеченных стержней найденными реакциями. Проверяем выполнение условий равновесия полученной системы сил.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Существуют фермы ^{*)}, у которых к каждому узлу присоединены более двух стержней. Например, на рис. 4 изображена конструкция (сетчатая ферма В.Г.Шухова), к каждому узлу которой подходит по три стержня. Диагональные стержни расположены в разных плоскостях и не пересекаются.

Здесь нельзя определять усилия по предложенной схеме, переходя от одного узла к другому, так как нет узла, с которого можно начать расчет. В этом случае сначала составляются уравнения равновесия отдельных узлов, а потом совместно решается система полученных уравнений. Систему можно решать любым известным способом (Решбник ВМ, §2.1).

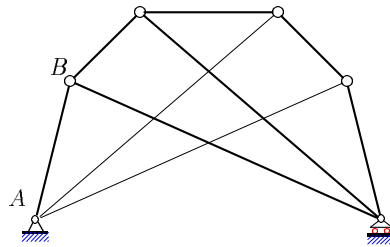


Рис. 4

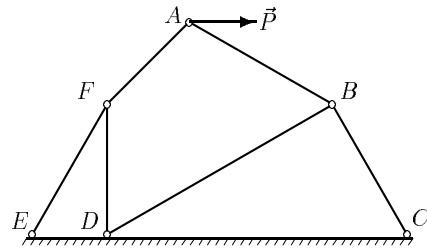


Рис. 5

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Для упрощения уравнений равновесия одну из осей координат можно направить вдоль стержня с неизвестным усилием. Для каждого узла можно выбрать свою систему координат.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Углы между осями и векторами усилий легче определять, если проводить через узлы вспомогательные вертикальные или горизонтальные прямые.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Усилия в стержнях можно найти с помощью системы Maple V (Программа 1, с. 350).

^{*)} Шарнирно-стержневая конструкция, нагруженная в шарнирах силами, называется фермой. Весом стержней фермы и трением в шарнирах пренебрегают.

ПРИМЕР. Плоская шарнирно-стержневая конструкция закреплена на неподвижном основании шарнирами E , D , C и нагружена в шарнире A горизонтальной силой $P = 100$ кН (рис. 5). Даны углы: $\angle DFA = 135^\circ$, $\angle ABD = 60^\circ$, $\angle DCB = 60^\circ$, $\angle BDC = 30^\circ$, $\angle DFE = 30^\circ$. Найти усилия в стержнях.

РЕШЕНИЕ

Конструкция состоит из шести стержней, соединенных тремя шарнирами (узлами). Узлы фермы находятся в равновесии. Для каждого узла A , B , F составляем по два уравнения равновесия в проекциях на выбранные оси. Из шести уравнений находим шесть искомых усилий.

1. Решение задачи начинаем с рассмотрения узла A , так как этот узел соединен только с двумя стержнями AB и AF . При вырезании узла действие каждого стержня заменяем силой, направленной из шарнира к стержню (рис. 6).

2. Составляем уравнения равновесия. Для упрощения уравнений ось y направляем по стержню AB . Получаем

$$\sum X_i = S_{AF} \cos 15^\circ - P \sin 30^\circ = 0,$$

$$\sum Y_i = -S_{AF} \sin 15^\circ + S_{AB} + P \cos 30^\circ = 0,$$

где X_i — проекции силы i на ось x , а Y_i — проекции силы i на ось y .

3. Решаем уравнения. Из первого уравнения системы находим усилие $S_{AF} = 51.76$ кН, из второго — усилие $S_{AB} = -73.21$ кН.

4. Рассматриваем узел F . К нему подходят три стержня (рис. 7).

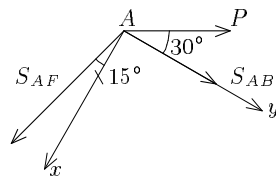


Рис. 6

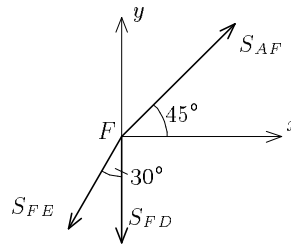


Рис. 7

Усилие в одном из них уже известно $S_{AF} = 51.76$ кН. Усилия в двух других находим из уравнений для проекций:

$$\sum X_i = -S_{FE} \sin 30^\circ + S_{AF} \cos 45^\circ = 0,$$

$$\sum Y_i = -S_{FE} \cos 30^\circ - S_{FD} + S_{AF} \sin 45^\circ = 0.$$

Находим $S_{FE} = 73.21$ кН, $S_{FD} = -26.79$ кН.

Составляем уравнения равновесия узла B в проекциях на оси, направленные по стержням BC и BD (рис. 8):

$$\sum X_i = S_{DB} + S_{AB} \sin 30^\circ = 0,$$

$$\sum Y_i = S_{BC} - S_{AB} \cos 30^\circ = 0.$$

Решая уравнения, получаем: $S_{DB} = -S_{AB} \sin 30^\circ = 73.21 \cdot 0.5 = 36.6$ кН, $S_{BC} = S_{AB} \cos 30^\circ = -73.21 \cdot 0.866 = -63.4$ кН.

5. Проверка. Рассматриваем равновесие конструкции в целом.

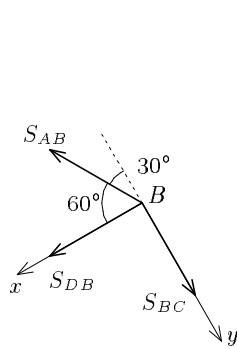


Рис. 8

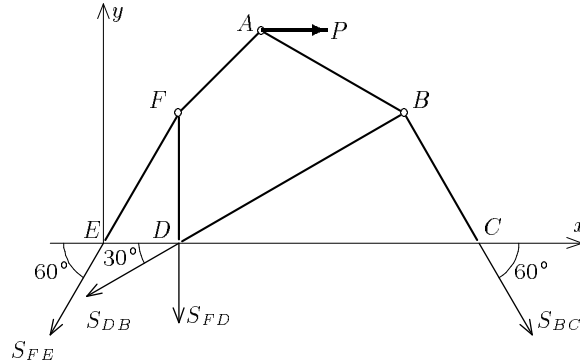


Рис. 9

Горизонтальным сечением отсекаем ферму от основания. Действия стержней заменяем силами, которые направляем, как и раньше, по внешним нормальям к сечениям стержней, т.е. вниз (рис. 9).

Система сил, действующих на ферму, не является сходящейся. Для такой системы справедливы три уравнения равновесия, одно из которых — уравнение моментов. Составление уравнения моментов — тема задач статики произвольной плоской или пространственной системы сил (§2.1 – 3.2). Для того, чтобы не выходить за пределы темы поставленной задачи, в решении которой используются только уравнения проекций, составим два уравнения проекций на оси x и y всех сил, действующих на ферму целиком:

$$\sum X_i = -S_{FE} \cos 60^\circ - S_{DB} \cos 30^\circ + S_{BC} \cos 60^\circ + P = 0,$$

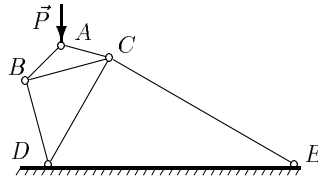
$$\sum Y_i = -S_{FE} \sin 60^\circ - S_{FD} - S_{DB} \sin 30^\circ - S_{BC} \sin 60^\circ = 0.$$

Суммы равны нулю. Это подтверждает правильность решения.
Результаты расчетов в кН заносим в таблицу:

S_{AF}	S_{AB}	S_{FE}	S_{FD}	S_{DB}	S_{BC}
51.76	-73.21	73.21	-26.79	36.60	-63.40

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ. Плоская шарнирно-стержневая конструкция закреплена на неподвижном основании и нагружена в одном шарнире вертикальной или горизонтальной силой P . Найти усилия в стержнях (в кН).

1.



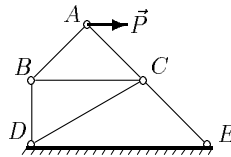
$$P = 1 \text{ кН},$$

$$\angle ACB = 30^\circ, \angle ABC = 30^\circ,$$

$$\angle BDC = 45^\circ, \angle BCD = 45^\circ,$$

$$\angle CDE = 60^\circ, \angle CED = 30^\circ.$$

2.



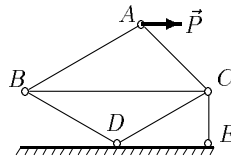
$$P = 2 \text{ кН},$$

$$\angle ACB = 45^\circ, \angle ABC = 45^\circ,$$

$$\angle BDC = 60^\circ, \angle BCD = 30^\circ,$$

$$\angle CDE = 30^\circ, \angle CED = 45^\circ.$$

3.



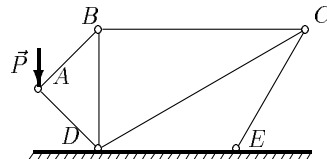
$$P = 3 \text{ кН},$$

$$\angle ACB = 45^\circ, \angle ABC = 30^\circ,$$

$$\angle BDC = 120^\circ, \angle BCD = 30^\circ,$$

$$\angle CDE = 30^\circ, \angle CED = 90^\circ.$$

4.

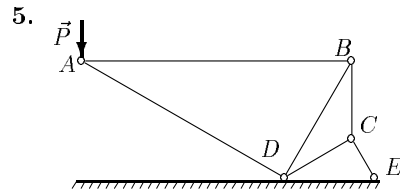


$$P = 4 \text{ кН},$$

$$\angle ABD = 45^\circ, \angle ADB = 45^\circ,$$

$$\angle BDC = 60^\circ, \angle BCD = 30^\circ,$$

$$\angle CDE = 30^\circ, \angle CED = 120^\circ.$$

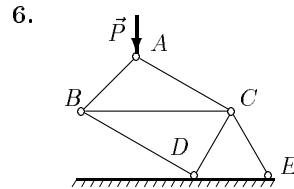


$$P = 5 \text{ кН},$$

$$\angle ABD = 60^\circ, \angle ADB = 90^\circ,$$

$$\angle BDC = 30^\circ, \angle BCD = 120^\circ,$$

$$\angle CDE = 30^\circ, \angle CED = 60^\circ.$$

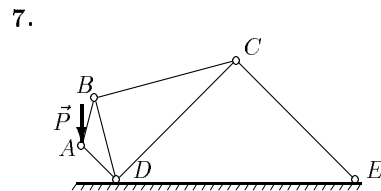


$$P = 6 \text{ кН},$$

$$\angle ACB = 30^\circ, \angle ABC = 45^\circ,$$

$$\angle BDC = 90^\circ, \angle BCD = 60^\circ,$$

$$\angle CDE = 60^\circ, \angle CED = 60^\circ.$$

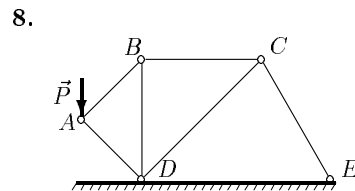


$$P = 7 \text{ кН},$$

$$\angle ABD = 30^\circ, \angle ADB = 30^\circ,$$

$$\angle BDC = 60^\circ, \angle BCD = 30^\circ,$$

$$\angle CDE = 45^\circ, \angle CED = 45^\circ.$$

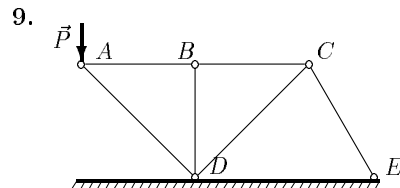


$$P = 8 \text{ кН},$$

$$\angle ABD = 45^\circ, \angle ADB = 45^\circ,$$

$$\angle BDC = 45^\circ, \angle BCD = 45^\circ,$$

$$\angle CDE = 45^\circ, \angle CED = 60^\circ.$$

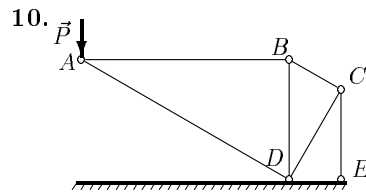


$$P = 9 \text{ кН},$$

$$\angle ABD = 90^\circ, \angle ADB = 45^\circ,$$

$$\angle BDC = 45^\circ, \angle BCD = 45^\circ,$$

$$\angle CDE = 45^\circ, \angle CED = 60^\circ.$$



$$P = 10 \text{ кН},$$

$$\angle ABD = 90^\circ, \angle ADB = 60^\circ,$$

$$\angle BDC = 30^\circ, \angle BCD = 90^\circ,$$

$$\angle CDE = 60^\circ, \angle CED = 90^\circ.$$

Ответы

№	S_{AB}	S_{AC}	S_{AD}	S_{BC}	S_{BD}	S_{CD}	S_{CE}
1	-1.115	-0.816	—	0.966	-0.558	-0.472	-0.106
2	1.414	-1.414	—	-1.000	1.000	0.732	-1.932
3	2.196	-1.553	—	-3.804	2.196	5.660	-3.928
4	2.828	—	-2.828	2.000	-2.000	-3.464	2.000
5	8.660	—	-10.000	15.000	-17.321	7.500	12.990
6	-5.379	-4.392	—	10.392	-7.608	-7.856	5.321
7	5.715	—	-2.092	2.858	-4.950	-2.475	1.429
8	5.657	—	-5.657	4.000	-4.000	-3.586	2.928
9	9.000	—	-12.728	9.000	0.000	-8.069	6.588
10	17.321	—	-20.000	20.000	-10.000	-34.641	40.000

Ответы на типичные вопросы, возникающие при решении задачи

1. Почему в задаче не указаны длины стержней?

Решение задачи зависит только от углов между стержнями и от внешних нагрузок. Длины стержней не нужны.

2. После вырезания узла получилась система двух уравнений с тремя (или более) неизвестными.

Во-первых, см. Замечание 1. Во-вторых, этого можно избежать, если рассматривать всякий раз узел с двумя неизвестными реакциями. В-третьих, возможно не было замечено, что одно из усилий уже было найдено.

Предупреждение типичных ошибок

1. Меняя направление реакции стержня, при переходе от рассмотрения равновесия узла на одном его конце к равновесию другого, не надо менять знак усилия.

2. Не надо вырезать опорные шарниры. Из этого ничего не получится. Реакции основания вы не знаете!

3. Для метода вырезания узлов характерно накопление ошибок округления. Поэтому рекомендуем промежуточные результаты получать с повышенной точностью, т.е. с четырьмя-пятью знаками после запятой.

4. Не стоит вводить для одного усилия два обозначения, например, усилие S_{AB} при рассмотрении узла A и S'_{AB} для B . Записывая (или держа в уме) естественное в этом случае соотношение для противоположно направленных векторов реакций: $\vec{S}'_{AB} = -\vec{S}_{AB}$, можно по ошибке знак минус отнести и к величинам усилий, хотя на самом деле это одно и то же значение, а минус уже учтен при изображении векторов в разные стороны.

1.2. Равновесие цепи

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. *Определить положение равновесия плоского шарнирно-стержневого механизма, состоящего из последовательно соединенных невесомых стержней. Механизм расположен в вертикальной плоскости. В крайних точках механизм шарнирно закреплен на неподвижном основании. Средние шарниры нагружены силами. Найти усилия в стержнях.*

Особенностью задачи является необычный для статики объект исследования — механизм, имеющий возможность двигаться. При определенном соотношении нагрузок и геометрических параметров механизм принимает положение равновесия. В качестве искомой величины может быть угол или какая-либо другая геометрическая характеристика конструкции.

ПЛАН РЕШЕНИЯ

1. Записываем уравнения равновесия узлов системы в проекциях.
2. Решаем полученную систему уравнений. Определяем усилия в стержнях и искомый угол.
3. Проверяем равновесие конструкции в целом, освобождая ее от внешних связей. Проверочным уравнением может быть уравнение проекций на какую-либо ось.

ПРИМЕР *). Определить положение равновесия плоского симметричного шарнирно-стержневого механизма. Концы A и E шарнирно закреплены на неподвижном основании. Три внутренних шарнира B , C и D нагружены одинаковой вертикальной нагрузкой Q .

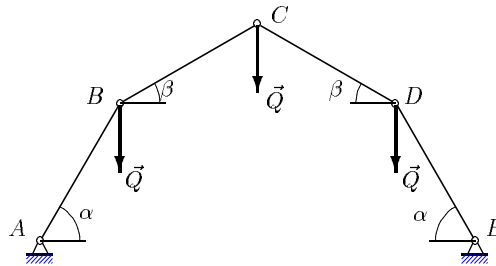


Рис. 10

В положении равновесия $\alpha = 60^\circ$. Определить угол β и усилия в стержнях (рис. 10). Весом стержней пренебречь.

*) Задача 2.39 из сборника И.В. Мещерского.

РЕШЕНИЕ

Конструкция, данная в условии задачи, представляет собой механизм, находящийся в равновесии только при некоторых определенных нагрузках. При изменении направлений и величин нагрузок меняется и конфигурация конструкции. Одной из неизвестных величин задачи (помимо усилий в стержнях) является угол β . Для решения задачи используем метод вырезания узлов (§1.1).

1. Записываем уравнения равновесия узлов системы. Составим уравнения равновесия узла C (рис.11):

$$\sum X_i = -S_{BC} \cos \beta + S_{CD} \cos \beta = 0, \quad (1)$$

$$\sum Y_i = -Q - S_{BC} \sin \beta - S_{CD} \sin \beta = 0. \quad (2)$$

Конструкция симметрична, поэтому уравнения равновесия узлов B и D запишутся одинаково. Рассмотрим равновесие узла B (рис.12).

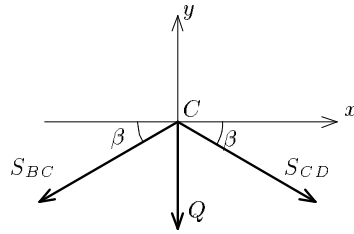


Рис. 11

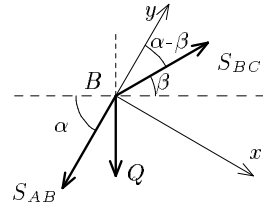


Рис. 12

Для упрощения уравнений направим ось y по стержню AB , ось x — перпендикулярно AB . Тогда, уравнение равновесия в проекции на ось x содержит только одну неизвестную величину:

$$\sum X_i = S_{BC} \sin(\alpha - \beta) + Q \cos \alpha = 0, \quad (3)$$

$$\sum Y_i = S_{BC} \cos(\alpha - \beta) - S_{AB} - Q \sin \alpha = 0. \quad (4)$$

2. Решаем систему уравнений (1-4). Из (1) получаем, что $S_{CD} = S_{BC}$. Это равенство объясняется симметрией конструкции и симметрией нагрузок. Из (2) и (4) с учетом полученного равенства находим

$$Q = -2S_{BC} \sin \beta, \quad (5)$$

$$S_{AB} = S_{BC} \cos(\alpha - \beta) - Q \sin \alpha. \quad (6)$$

Выражаем S_{BC} из (5) и подставляем в (3):

$$-Q \sin(\alpha - \beta) / (2 \sin \beta) + Q \cos \alpha = 0.$$

Так как $Q \neq 0$, то после сокращения на Q получаем уравнение для β :

$$-\sin(\alpha - \beta) + 2 \cos \alpha \sin \beta = 0,$$

или $3 \operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3}$, $\operatorname{tg} \beta = 0.577$, $\beta = 30^\circ$. Из (5) получаем усилие $S_{BC} = -Q / (2 \sin \beta) = -Q$. Стержень BC сжат. Из (6) находим усилие

$$S_{AB} = S_{BC} \cos(60^\circ - 30^\circ) - Q \sin 60^\circ = -Q\sqrt{3}.$$

В силу симметрии задачи $S_{BC} = S_{CD}$, $S_{AB} = S_{DE}$. Результаты расчетов заносим в таблицу:

$\operatorname{tg} \beta$	β	S_{AB}	S_{BC}	S_{CD}	S_{DE}
0.577	$\pi/6$	$-Q\sqrt{3}$	$-Q$	$-Q$	$-Q\sqrt{3}$

3. Проверка. Рассмотрим равновесие всей конструкции в целом.

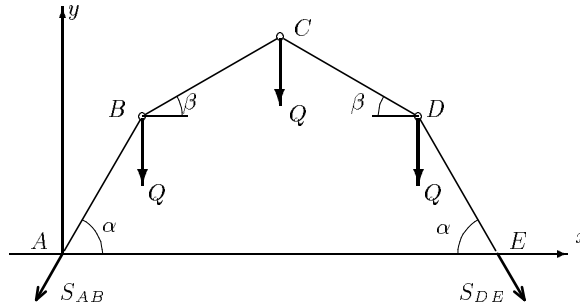


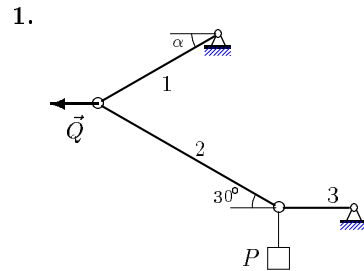
Рис. 13

Отсекая стержни от основания, заменим их действие реакциями, направленными по внешним нормальям к сечениям стержней, т.е. вниз (рис. 13). Уравнение проекций на ось x составлять не имеет смысла — в силу симметрии оно лишь подтвердит, что $S_{AB} = S_{DE}$. Проверяем равенство нулю суммы проекций всех сил на вертикаль:

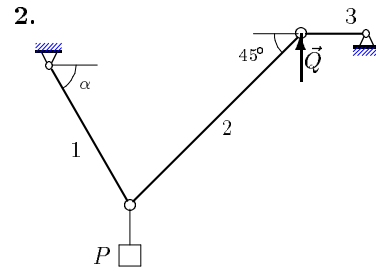
$$\sum Y_i = -3Q - S_{AB} \cos 30^\circ - S_{DE} \cos 30^\circ = -3Q + 2Q\sqrt{3} \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.$$

Задача решена верно.

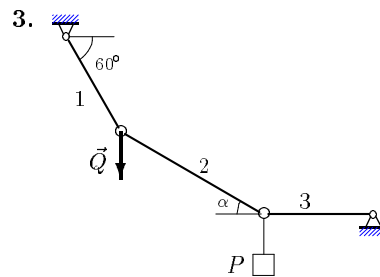
УСЛОВИЯ ЗАДАЧ. Определить положение равновесия плоского шарнирно-стержневого механизма, состоящего из трех последовательно соединенных невесомых стержней. Механизм расположен в вертикальной плоскости. В крайних точках механизм шарнирно закреплен на неподвижном основании. Средние шарниры нагружены вертикальными или горизонтальными силами или грузом P . Найти угол α (в рад) и усилия в стержнях 1, 2, 3 (в кН).



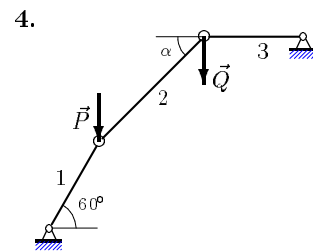
$$P = 70 \text{ кН}, Q = 240 \text{ кН}.$$



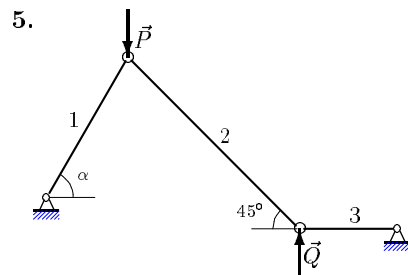
$$P = 90 \text{ кН}, Q = 30 \text{ кН}.$$



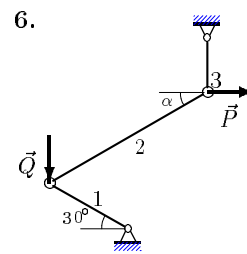
$$P = 80 \text{ кН}, Q = 160 \text{ кН}.$$



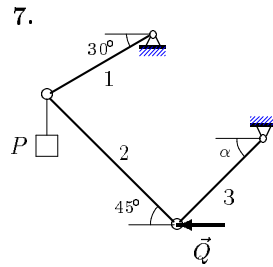
$$P = 40 \text{ кН}, Q = 50 \text{ кН}.$$



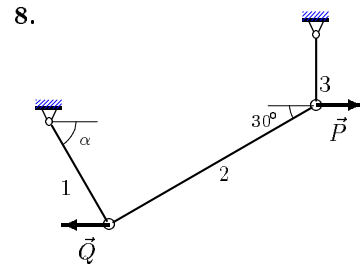
$$P = 45 \text{ кН}, Q = 20 \text{ кН}.$$



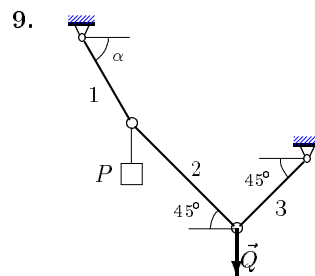
$$P = 50 \text{ кН}, Q = 60 \text{ кН}.$$



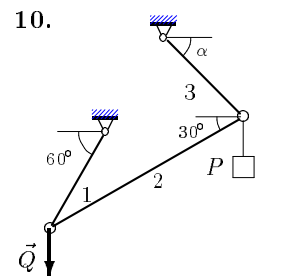
$$P = 90 \text{ кН}, Q = 110 \text{ кН}.$$



$$P = 30 \text{ кН}, Q = 40 \text{ кН}.$$



$$P = 100 \text{ кН}, Q = 270 \text{ кН}.$$



$$P = 20 \text{ кН}, Q = 10 \text{ кН}.$$

Ответы

№	$\text{tg } \alpha$	α	S_1	S_2	S_3
		рад			
1	0.589	0.533	137.852	140.000	121.244
2	2.000	1.107	67.082	42.426	30.000
3	0.577	0.524	277.128	160.000	138.564
4	0.962	0.766	-103.923	-72.111	-51.962
5	1.250	0.896	-32.016	-28.284	-20.000
6	0.623	0.557	-57.735	58.900	31.132
7	1.078	0.823	65.885	-80.692	77.836
8	1.732	1.047	-20.000	34.641	17.321
9	1.741	1.049	271.017	190.919	190.919
10	1.732	1.047	17.321	-10.000	17.321

Ответы на типичные вопросы, возникающие при решении задачи, и предупреждение типичных ошибок см. с. 20.

1.3. Теорема о трех силах

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. Тело находится в равновесии под действием трех сил, одна из которых известна, у другой известно только направление, а у третьей не известны ни величина, ни направление. Используя теорему о трех силах, найти неизвестные силы.

ПЛАН РЕШЕНИЯ

В теореме о трех силах утверждается, что если на тело, находящееся в равновесии, действуют три непараллельные силы (включая реакции опор), то они лежат в одной плоскости, и линии их действия пересекаются в одной точке.

1. Найдем точку пересечения линий действия двух сил, направления которых известны. Через эту точку должна пройти и линия действия третьей силы.

2. Имея направления векторов трех сил, строим из них силовой треугольник. Начало одного вектора является концом другого. Если тело находится в равновесии, то сумма векторов сил, действующих на него, равна нулю. Следовательно, треугольник сил должен быть замкнут.

3. Из условия замкнутости треугольника по направлению заданной силы определяем направление обхода треугольника и, следовательно, направления искомых сил.

4. Находим стороны силового треугольника — искомые силы.

ПРИМЕР *). Горизонтальный невесомый стержень AB находится в равновесии под действием трех сил, одна из которых вертикальная сила $F = 5$ кН (рис. 14), другая — реакция опорного стержня CD , а третья — реакция неподвижного шарнира A . Используя теорему о трех силах, найти неизвестные реакции опор.

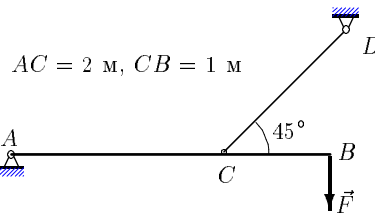


Рис. 14

*) Задача 2.29 из сборника И.В. Мещерского.

РЕШЕНИЕ

1. Найдем точку пересечения линий действия двух сил, направления которых известны. Определим направление линии действия третьей силы.

На стержень AB действуют три силы: заданная сила \vec{F} , реакция \vec{R}_A шарнира A и реакция \vec{R}_D стержня CD . При этом линия действия вектора \vec{R}_D известна. Она совпадает со стержнем CD , так как стержень нагружен только двумя силами в точках C и D (вес стержня не учитывается). Согласно аксиоме статики эти силы равны по величине и направлены вдоль CD в разные стороны. Направление реакции шарнира A определяем по теореме о трех силах. Линии действия сил \vec{F} , \vec{R}_D и \vec{R}_A пересекаются в точке O (рис. 15). Следовательно, AO — линия действия силы \vec{R}_A . Известны только линии действия сил \vec{R}_D и \vec{R}_A , поэтому векторы на рис. 15 не изображаем, пока из силового треугольника не узнаем их направления.

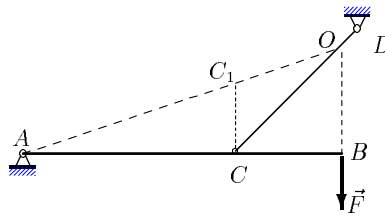


Рис. 15

2. Строим силовой треугольник. Сумма векторов сил, находящихся в равновесии, равна нулю, следовательно, треугольник, составленный из \vec{F} , \vec{R}_D и \vec{R}_A , должен быть замкнут.

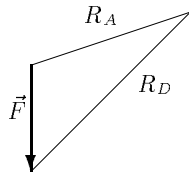


Рис. 16

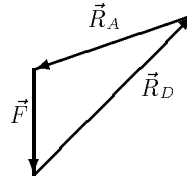


Рис. 17

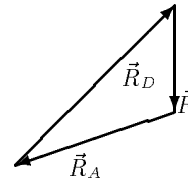


Рис. 18

Треугольник строим, начиная с известной силы \vec{F} (рис. 16). Через начало и конец вектора \vec{F} проводим прямые, параллельные направлениям \vec{R}_D и \vec{R}_A .

3. Из условия замкнутости треугольника по направлению внешней силы \vec{F} определяем направление обхода треугольника и, следовательно, направления реакций опор.

Замкнутость треугольника сил означает, что начало одной силы совпадает с концом другой. Отсюда определяем направление обхода треугольника, которое может быть различным в зависимости от способа построения силового треугольника (рис. 17 — против часовой стрелки, рис. 18 — по часовой стрелке). Направления и величины сил в обоих случаях одни и те же.

Изобразим реакции с учетом найденных направлений (рис. 19).

4. Определяем длины сторон силового треугольника — величины реакций опор. Найти стороны треугольника сил означает решить задачу. В нашем случае известны углы (по построению) и сторона F треугольника. Две другие стороны находятся по теореме синусов.

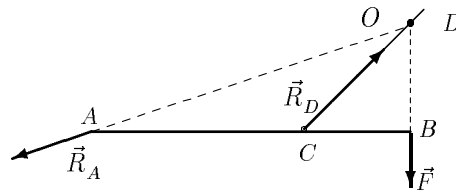


Рис. 19

Можно поступить иначе, используя свойства подобия. На рис. 15 найдем треугольник подобный силовому. В ряде случаев этот треугольник очевиден. В общем же, для получения такого треугольника надо выполнить дополнительные построения: провести линии, проходящие через характерные точки (шарниры, точки приложения сил и т.п.), параллельно сторонам силового треугольника. Проведем, например, вертикаль CC_1 . Образуется треугольник CC_1O , подобный силовому (рис. 15, 17). Подобие следует из условия параллельности сторон треугольников.

Найдем стороны треугольника CC_1O :

$$OB = CB = 1 \text{ м}, \quad OC = \sqrt{2}CB = \sqrt{2} = 1.414 \text{ м}.$$

Из подобия $\triangle AOB$ и $\triangle ACC_1$ имеем соотношения

$$AC_1/AO = AC/AB = CC_1/OB.$$

Отсюда вычисляем длины: $AO = \sqrt{AB^2 + OB^2} = \sqrt{10}$, $AC_1 = 2\sqrt{10}/3$, $C_1O = \sqrt{10}/3 = 1.054 \text{ м}$, $CC_1 = (2/3)OB = 0.667 \text{ м}$.

Из условия подобия треугольника сил и $\triangle CC_1O$ следует, что

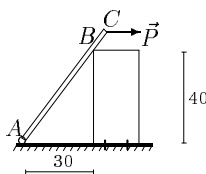
$$F/CC_1 = R_A/C_1O = R_D/CO.$$

Из этих пропорций находим искомые величины:

$$R_A = F \cdot C_1O/CC_1 = 7.901 \text{ кН}, \quad R_D = F \cdot CO/CC_1 = 10.607 \text{ кН}.$$

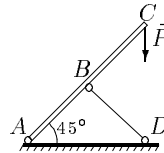
УСЛОВИЯ ЗАДАЧ. Тело находится в равновесии под действием трех сил, одна из которых — известный вес тела G или внешняя нагрузка P , другая — реакция опоры в точке B (гладкая опора или опорный стержень) с известным направлением, а третья — реакция неподвижного шарнира A . Используя теорему о трех силах, найти неизвестные реакции опор (в кН). Размеры указаны в см.

1.



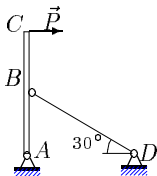
$$P = 10 \text{ кН}, \quad AC = 60 \text{ см}$$

2.



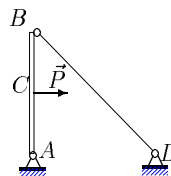
$$P = 20 \text{ кН}, \quad AB = BD = CB$$

3.



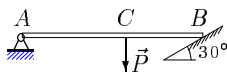
$$P = 30 \text{ кН}, \quad AB = BC$$

4.



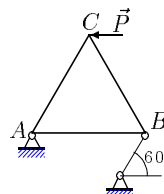
$$P = 40 \text{ кН}, \quad AB = AD, \quad AC = BC$$

5.



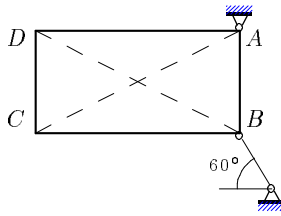
$$P = 25 \text{ кН}, \quad 3AC = 4CB$$

6.



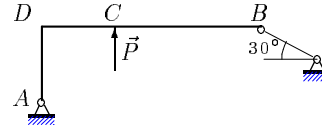
$$P = 35 \text{ кН}, \quad AB = BC = CA$$

7.



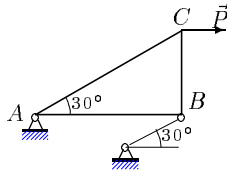
$$G = 45 \text{ кН}, 2AB = BC$$

8.



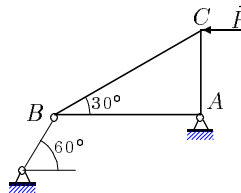
$$P = 10 \text{ кН}, BD = 3AD = 3DC$$

9.



$$P = 90 \text{ кН}$$

10.



$$P = 70 \text{ кН}$$

Ответы

№	R_A	R_B	№	R_A	R_B
1	-9.600	6.210	6	34.999	60.621
2	-28.284	20.000	7	-90.000	55.769
3	-69.282	45.826	8	4.226	8.695
4	-28.284	28.284	9	-103.923	187.350
5	-16.496	13.521	10	-46.667	61.734

Предупреждение типичных ошибок

1. Размеры на чертеже сил, приложенных к телу (рис.15), измеряются в единицах длины (м, см), а на силовом треугольнике (рис. 17, 18) в единицах сил (Н, кН). Не надо принимать линейные расстояния AO , CO и BO за величины соответствующих сил.

2. Реакция гладкого основания перпендикулярна поверхности основания. Реакция гладкой поверхности тела о неподвижную опору перпендикулярна поверхности тела.

3. В данной задаче должно быть только три силы. Лишние силы возникают, если прикладывать вес тела там, где его нет, или если реакцию в шарнире A раскладывать на составляющие.

Глава 2

ПРОИЗВОЛЬНАЯ ПЛОСКАЯ СИСТЕМА СИЛ

Изучив в предыдущем разделе систему сходящихся сил и уравнения проекций, в разделе ПРОИЗВОЛЬНАЯ ПЛОСКАЯ СИСТЕМА СИЛ вы научитесь составлять уравнения моментов, более эффективно находить усилия в стержнях фермы и определять реакции опор составных конструкций.

Почти все задачи этого раздела заканчиваются решением системы линейных уравнений. Простейший способ выполнения этой трудоемкой процедуры с помощью Maple V приведен на с. 13.

2.1. Равновесие тяжелой рамы

Постановка задачи. Тяжелая однородная рама расположена в вертикальной плоскости и опирается на неподвижный шарнир и наклонный невесомый стержень. К раме приложены внешние сосредоточенные силы и моменты. Учитывая погонный вес рамы, найти реакции опор.

План решения

1. Согласно аксиоме о связях, освобождаем раму от связей. Действие опор заменяем их реакциями. Выбираем систему координат. В неподвижном шарнире имеются две неизвестные составляющие реакции (горизонтальная и вертикальная), а в невесомом опорном стержне — одна неизвестная реакция, направленная вдоль стержня. Все наклонные силы раскладываем на составляющие вдоль осей координат.

2. К центру каждого участка рамы прикладываем его вес, вычисленный по формуле $G_k = l_k \rho$, где l_k — длина участка, ρ — погонный вес рамы (вес единицы длины стержня, из которого составлена рама).

3. Составляем уравнение моментов всех сил, действующих на раму, относительно неподвижного шарнира. Определяем из этого уравнения реакцию опорного стержня.

4. Составляем уравнения проекций всех сил на оси x и y . Из этих уравнений определяем составляющие реакции неподвижного шарнира (горизонтальную и вертикальную).

5. Выполняем проверку решения, составляя уравнение моментов относительно какой-либо точки, не лежащей на линиях действия искомых реакций.

ПРИМЕР. Тяжелая однородная рама расположена в вертикальной плоскости и опирается на неподвижный шарнир A и наклонный невесомый стержень H . К раме приложены внешние сосредоточенные силы $P = 20$ кН, $Q = 10$ кН и момент $M = 100$ кНм. Дано: $\gamma = 60^\circ$, $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $AB = 2$ м, $BC = 4$ м, $CD = 6$ м, $DH = 4$ м, $KC = 2$ м (рис. 20). Учитывая погонный вес рамы $\rho = 4$ кН/м, найти реакции опор.

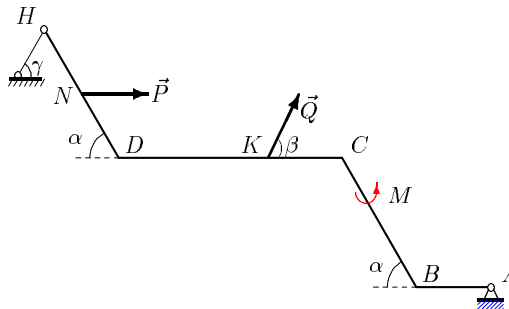


Рис. 20

РЕШЕНИЕ

1. Освобождаем раму от связей. Действие опор заменяем их реакциями (рис. 21). Выбираем систему координат с началом в точке A . В неподвижном шарнире A реакция R_A имеет две неизвестные компоненты X_A и Y_A . Невесомый опорный стержень в шарнире H заменяем на его реакцию, направленную по стержню (т.е. под углом γ к горизонту).

2. К центру каждого участка рамы (всего четыре прямолинейных участка) прикладываем его вес, вычисленный по формуле $G_k = l_k \rho$, где l_k , $k = 1, \dots, 4$ — длины отрезков рамы AB , BC , CD и DH , ρ — погонный вес рамы.

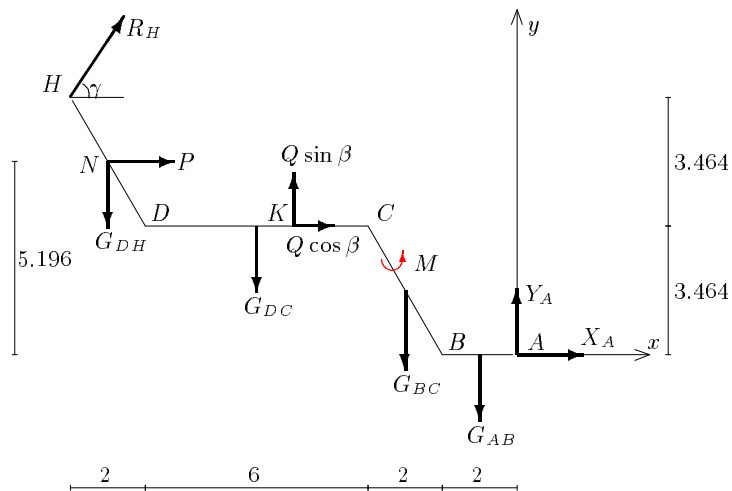


Рис. 21

3. Составляем уравнение моментов относительно шарнира A , выделяя в нем для удобства счета отдельные слагаемые:

$$\sum M_A = M_A(R_H) + M_A(P) + M_A(Q) + M_A(G_k) + M = 0. \quad (1)$$

Момент $M_A(R_H)$ реакции опоры

$$M_A(R_H) = R_H h = -R_H((HD + CB) \sin \alpha \cos \gamma + (HD \cos \alpha + DC + CB \cos \alpha + AB) \sin \gamma),$$

где h — плечо реакции R_H взятое со знаком момента.

Моменты сил P и Q и момент $M_A(G_k)$ сил тяжести участков:

$$M_A(P) = -P(ND + CB) \sin \alpha = -103.923 \text{ кНм},$$

$$M_A(Q) = -Q \cos \beta CB \sin \alpha - Q \sin \beta(KC + CB \cos \alpha + AB) = -69.282 \text{ кНм},$$

$$M_A(G_k) = G_{DH}((ND + CB) \cos \alpha + DC + AB) + G_{DC}(DC/2 + CB \cos \alpha + AB) + G_{CB}(CB/2 \cos \alpha + AB) + G_{AB}AB/2.$$

Вычисляя величины сил тяжести участков

$$G_{AB} = 2 \cdot 4 = 8 \text{ кН}, \quad G_{BC} = 4 \cdot 4 = 16 \text{ кН},$$

$$G_{DC} = 6 \cdot 4 = 24 \text{ кН}, \quad G_{DH} = 4 \cdot 4 = 16 \text{ кН},$$

получаем $M_A(G_k) = 400$ кНм.

В итоге уравнение моментов (1) принимает вид

$$-13.856R_H - 103.923 - 69.282 + 400 + 100 = 0.$$

Отсюда находим реакцию стержня

$$R_H = \frac{326.795}{13.856} = 23.584 \text{ кН.}$$

4. Реакции X_A и Y_A определяем из уравнений проекций:

$$\sum X_i = X_A + Q \cos \beta + R_H \cos \gamma + P = 0,$$

$$X_A = -36.792 \text{ кН,}$$

$$\sum Y_i = Y_A - G_{AB} - G_{BC} - G_{DC} - G_{DH} + Q \sin \beta + R_H \sin \gamma = 0,$$

$$Y_A = 34.915 \text{ кН.}$$

Ответы заносим в таблицу. Моменты — в кНм, силы — в кН.

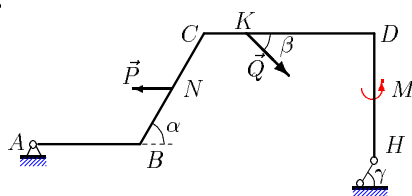
$M_A(Q)$	$M_A(P)$	$\sum_k M_A(G_k)$	h	X_A	Y_A	R_H
-69.282	-103.923	400	-13.856	-36.792	34.915	23.584

5. Проверка. Составляем сумму моментов всех сил, действующих на раму, включая найденные реакции опор, относительно произвольной точки, например, K . Этот выбор оправдывается тем, что в уравнение моментов войдут все найденные реакции, а известная сила Q не войдет (ее проверять не требуется), и уравнение будет на два слагаемых короче

$$\begin{aligned} \sum M_K = & -R_H \cdot 3.464 \cos \gamma - R_H \cdot 6 \sin \gamma - P \cdot 1.732 + M + G_{DH} \cdot 5 + \\ & + G_{DC} \cdot 1 - G_{BC} \cdot 3 - G_{AB} \cdot 5 + Y_A \cdot 6 + X_A \cdot 3.464 = 0. \end{aligned}$$

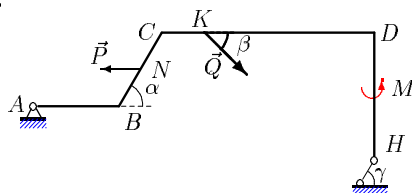
УСЛОВИЯ ЗАДАЧ. Тяжелая однородная рама расположена в вертикальной плоскости и опирается на неподвижный шарнир A и наклонный невесомый стержень H . К раме приложены горизонтальная сила P , наклонная сила Q и момент M . Учитывая погонный вес рамы ρ , найти реакции опор.

1.



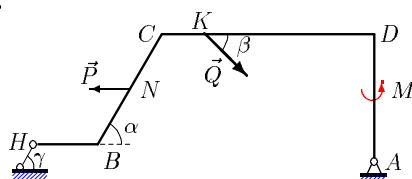
$\rho = 1 \text{ кН/м}$, $P = 5 \text{ кН}$,
 $Q = 11 \text{ кН}$, $M = 30 \text{ кНм}$,
 $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 30^\circ$, $\gamma = 30^\circ$,
 $AB = 5 \text{ м}$, $BC = 6 \text{ м}$,
 $CD = 8 \text{ м}$, $DH = 6 \text{ м}$,
 $CK = 2 \text{ м}$, $CN = 3 \text{ м}$.

2.



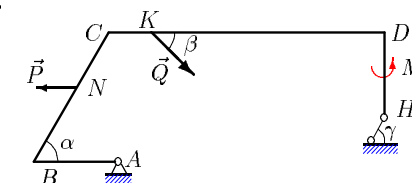
$\rho = 2 \text{ кН/м}$, $P = 6 \text{ кН}$,
 $Q = 12 \text{ кН}$, $M = 50 \text{ кНм}$,
 $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 30^\circ$, $\gamma = 45^\circ$,
 $AB = 4 \text{ м}$, $BC = 4 \text{ м}$,
 $CD = 10 \text{ м}$, $DH = 6 \text{ м}$,
 $CK = 2 \text{ м}$, $CN = 2 \text{ м}$.

3.



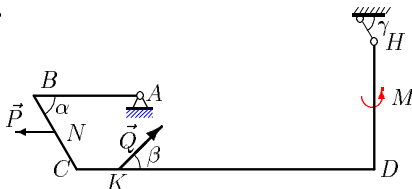
$\rho = 3 \text{ кН/м}$, $P = 8 \text{ кН}$,
 $Q = 13 \text{ кН}$, $M = 70 \text{ кНм}$,
 $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 45^\circ$, $\gamma = 60^\circ$,
 $HB = 3 \text{ м}$, $BC = 6 \text{ м}$,
 $CD = 10 \text{ м}$, $DA = 6 \text{ м}$,
 $CK = 2 \text{ м}$, $CN = 3 \text{ м}$.

4.



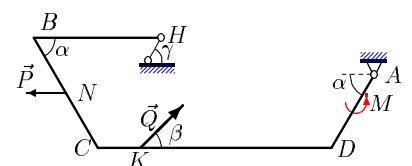
$\rho = 1 \text{ кН/м}$, $P = 6 \text{ кН}$,
 $Q = 14 \text{ кН}$, $M = 30 \text{ кНм}$,
 $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 45^\circ$, $\gamma = 30^\circ$,
 $AB = 4 \text{ м}$, $BC = 7 \text{ м}$,
 $CD = 13 \text{ м}$, $DH = 4 \text{ м}$,
 $CK = 2 \text{ м}$, $CN = 3 \text{ м}$.

5.



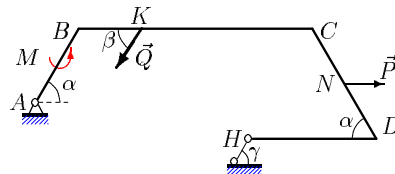
$\rho = 2 \text{ кН/м}$, $P = 7 \text{ кН}$,
 $Q = 15 \text{ кН}$, $M = 50 \text{ кНм}$,
 $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 45^\circ$, $\gamma = 45^\circ$,
 $AB = 5 \text{ м}$, $BC = 4 \text{ м}$,
 $CD = 14 \text{ м}$, $DH = 6 \text{ м}$,
 $CK = 2 \text{ м}$, $CN = 2 \text{ м}$.

6.



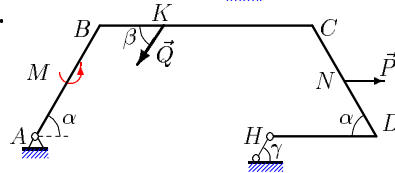
$\rho = 3 \text{ кН/м}$, $P = 8 \text{ кН}$,
 $Q = 16 \text{ кН}$, $M = 70 \text{ кНм}$,
 $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 45^\circ$, $\gamma = 60^\circ$,
 $HB = 6 \text{ м}$, $BC = 6 \text{ м}$,
 $CD = 11 \text{ м}$, $DA = 4 \text{ м}$,
 $CK = 2 \text{ м}$, $CN = 3 \text{ м}$.

7.



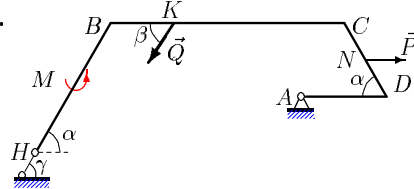
$\rho = 1 \text{ кН/м}$, $P = 7 \text{ кН}$,
 $Q = 17 \text{ кН}$, $M = 30 \text{ кНм}$,
 $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $\gamma = 30^\circ$,
 $AB = 4 \text{ м}$, $BC = 11 \text{ м}$,
 $CD = 6 \text{ м}$, $DH = 6 \text{ м}$,
 $BK = 3 \text{ м}$, $CN = 3 \text{ м}$.

8.



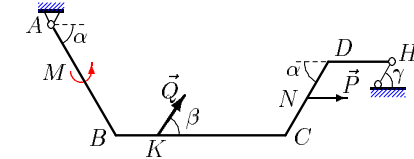
$\rho = 2 \text{ кН/м}$, $P = 8 \text{ кН}$,
 $Q = 18 \text{ кН}$, $M = 50 \text{ кНм}$,
 $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $\gamma = 45^\circ$,
 $AB = 6 \text{ м}$, $BC = 10 \text{ м}$,
 $CD = 6 \text{ м}$, $DH = 5 \text{ м}$,
 $BK = 3 \text{ м}$, $CN = 3 \text{ м}$.

9.



$\rho = 3 \text{ кН/м}$, $P = 9 \text{ кН}$,
 $Q = 19 \text{ кН}$, $M = 70 \text{ кНм}$,
 $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $\gamma = 60^\circ$,
 $HB = 7 \text{ м}$, $BC = 11 \text{ м}$,
 $CD = 4 \text{ м}$, $DA = 4 \text{ м}$,
 $BK = 3 \text{ м}$, $CN = 2 \text{ м}$.

10.



$\rho = 2 \text{ кН/м}$, $P = 8 \text{ кН}$,
 $Q = 20 \text{ кН}$, $M = 50 \text{ кНм}$,
 $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $\gamma = 45^\circ$,
 $AB = 6 \text{ м}$, $BC = 8 \text{ м}$,
 $CD = 4 \text{ м}$, $DH = 3 \text{ м}$,
 $BK = 2 \text{ м}$, $CN = 2 \text{ м}$.

Ответы

№	$M_A(Q)$	$M_A(P)$	$\Sigma_k M_A(G_k)$	h	X_A	Y_A	R_H
	кНм						
1	-104.500	12.990	-243.5	8.696	-34.901	12.963	35.074
2	-84.000	10.392	-468.0	13.107	-30.914	27.478	37.508
3	18.385	27.215	487.5	-14.258	-22.341	47.561	42.298
4	-74.862	20.785	-104.3	4.464	-28.795	23.526	28.746
5	26.136	-12.124	-187.0	9.571	5.480	38.307	12.850
6	-85.259	-6.928	754.5	-9.526	-41.750	3.112	76.873
7	-44.167	-6.062	-251.5	6.500	-34.704	20.820	41.805
8	-46.765	-20.785	-487.0	7.778	-44.868	23.720	64.867
9	131.636	-15.588	281.3	-9.526	-24.027	51.973	49.054
10	138.564	27.713	-313.0	12.538	-23.455	19.225	7.714

Предупреждение типичных ошибок

1. При вычислении весов участков рамы не надо мельчить участки. Берите прямолинейные участки от одного изгиба до другого или до опоры.

2. Вычисляя момент наклонной силы, учитывайте обе ее составляющие. Не забывайте, что плечо силы относительно точки равно расстоянию от точки до *линии действия силы*, а не до точки приложения силы.

3. Знак сосредоточенного момента (пары) в уравнении моментов не зависит от взаимного расположения точки приложения момента и точки, относительно которой уравнение составляется. Он определяется самим моментом (против часовой стрелки “плюс”, по часовой стрелке “минус”). Точка приложения пары не требует точного задания, так как по свойству пары ее можно переносить в любую точку тела, не меняя воздействия на тело.

4. Точку приложения силы можно переносить вдоль линии действия силы, не меняя воздействия силы на тело (вектор силы в теоретической механике является *скользящим*). Перенеся силу вдоль ее линии действия поближе к точке, относительно которой вычисляется ее момент, можно упростить определение момента.

5. Наклонный стержень одним концом закреплен на неподвижном шарнире. Часто вместо того, чтобы просто отбросить стержень и приложить к телу одну силу R_H , направленную вдоль стержня, студент изображает две реакции этого шарнира, после чего в задаче количество неизвестных становится больше, чем уравнений. Одновременно с такой ошибкой возникает вопрос, чему равна длина наклонного опорного стержня? Длина стержня в задаче не дана.

6. Вес участков рамы учитывайте только в тех задачах, где это оговорено. В данной задаче рама имеет вес.

2.2. Ферма. Аналитические методы расчета

Постановка задачи. *Плоская ферма опирается на неподвижный и подвижный шарниры. К узлам фермы приложены нагрузки. Найти усилия в стержнях фермы методом Риттера^{*)} или методом вырезания узлов.*

^{*)} Август Риттер (1826-1906) — немецкий механик.

Эта задача является усложненным вариантом задачи из §1.1, где усилия в стержнях можно было легко определить только из уравнений проекций, не находя реакции опор и не привлекая понятие момента силы. Аналогично можно поступить и в этой задаче, однако порядок системы линейных уравнений, описывающей равновесие всех узлов, будет велик, поэтому, во-первых, надежно решить такую систему можно только с помощью компьютера (§ 15.1, с. 350), во-вторых, таким образом будет проделана лишняя работа, так как система уравнений содержит усилия всех стержней, в том числе и тех, которые по условию задачи не требуется определять. Поэтому для решения сложных ферм, содержащих большое число стержней, применим метод Риттера, основная идея которого — независимое определение усилий в стержнях. Эту же идею можно с успехом применять и в других задачах статики.

ПЛАН РЕШЕНИЯ

1. Освобождаем ферму от внешних связей. Действие опорных шарниров заменяем их реакциями. Для определения реакций опор составляем три уравнения равновесия.

2. Проверяем найденные реакции, составляя еще одно уравнение равновесия фермы.

3. В тех стержнях, где это возможно, усилия находим методом Риттера^{*)}. Мысленно разделяем ферму на две части, пересекая *три* стержня (сечение Риттера). Действие разрезанных стержней заменяем их усилиями, направляя соответствующие векторы из узлов в сторону сечения, предполагая стержни растянутыми.

Рассматриваем равновесие одной из частей фермы (как правило, где меньше нагрузок). Для стержней, усилия в которых необходимо определить, находим точки Риттера (моментные точки). Они являются точками попарного пересечения линий действия сил в рассеченных стержнях. Искомые усилия определяем из уравнений моментов рассматриваемой части относительно точек Риттера.

Если два стержня в сечении параллельны, то точки Риттера для третьего стержня не существует, и для определения усилия в нем необходимо составить уравнение проекций на ось, перпендикулярную параллельным стержням.

В уравнение метода Риттера всегда входит усилие только одного стержня. Это позволяет искать усилия независимо одно от другого,

^{*)} Другие названия — метод сечений, метод моментных точек.

уменьшая тем самым возможность ошибок и избегая накопления неизбежных погрешностей округления в численных расчетах.

4. Определяем усилия методом вырезания узлов (§ 1.1). Этот метод применяют в тех случаях, когда сечения Риттера для нужного стержня не существует. Вырезаем узел фермы, к которому подходит стержень с искомым усилием. Выбираем оси и составляем уравнения равновесия узла в проекциях. Решаем уравнения относительно искомого усилия. Если к узлу подходит более двух стержней с неизвестными усилиями, то метод вырезания узлов можно комбинировать с методом Риттера.

ПРИМЕР. Плоская ферма опирается на неподвижный и подвижный шарниры (рис. 22). К узлам фермы приложены две вертикальные нагрузки $P = 90$ кН и две наклонные $Q = 40$ кН и $F = 38$ кН, $\alpha = 55^\circ$, $\beta = 15^\circ$. Найти усилия в стержнях 1–5.

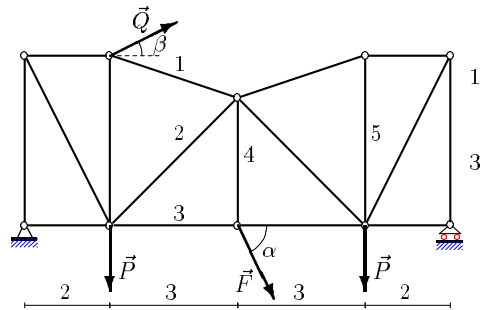


Рис. 22

РЕШЕНИЕ

1. Освобождаем ферму от внешних связей. Действие опор заменяем их реакциями. Левую (неподвижную) шарнирную опору заменяем двумя составляющими реакции X_A , Y_A , правую (подвижную) — одной вертикальной Y_B (рис. 23). Для определения реакций опор составляем три уравнения равновесия — уравнение проекций на горизонтальную ось x и два уравнения моментов относительно опор^{*)}:

$$\sum X_i = X_A + F \cos \alpha + Q \cos \beta = 0,$$

$$\sum M_A = -2P + 2Q \sin \beta - 4Q \cos \beta - 5F \sin \alpha - 8P + 10Y_B = 0,$$

$$\sum M_B = 8P - 8Q \sin \beta - 4Q \cos \beta + 5F \sin \alpha + 2P - 10Y_A = 0.$$

^{*)} Уравнение проекций на ось y оставим для проверки реакций Y_A и Y_B .

Система уравнений состоит из трех независимых друг от друга уравнений, решение которых легко найти, подставив численные значения нагрузок и углов из условия

$$Y_A = 81.827 \text{ кН}, \quad Y_B = 118.948 \text{ кН}, \quad X_A = -60.433 \text{ кН}.$$

2. Проверяем найденные вертикальные реакции, составляя уравнение проекций всех сил на ось y :

$$\begin{aligned} \sum Y_i &= Y_A - P + Q \sin \beta - F \sin \alpha - P + Y_B = \\ &= 81.827 - 90 + 40 \sin 15 - 38 \sin 55 - 90 + 118.948 = 0. \end{aligned}$$

Горизонтальную реакцию X_A можно проверить, составив еще одно уравнение моментов, например относительно точки D .

3. Методом Риттера находим усилия в стержнях 1, 2, 3. Сечением I-I (рис. 23) мысленно разделяем ферму на две части, пересекая три стержня. Действие разрезанных частей заменяем их усилиями.

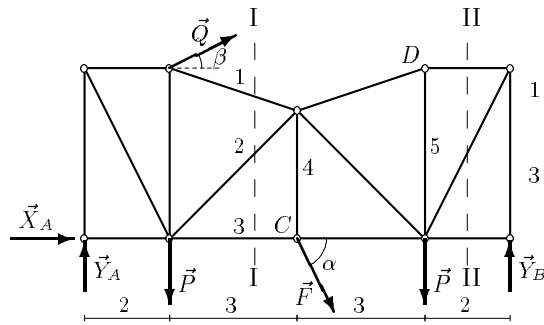


Рис. 23

Рассматриваем левую часть (рис. 24), на которую действуют четыре известные силы \vec{X}_A , \vec{Y}_A , \vec{P} , \vec{Q} и реакции стержней, направленные из узлов к сечению. Точки Риттера R_1 , R_2 , R_3 находятся в точках попарного пересечения линий действия сил \vec{S}_1 , \vec{S}_2 , \vec{S}_3 . Номер точки Риттера соответствует номеру рассеченного стержня, который через эту точку не проходит.

Точка R_2 находится на продолжении стержня 1. Расстояние до нее легко вычислить, зная угол γ между стержнем 1 и горизонталью: $\text{tg } \gamma = 1/3$.

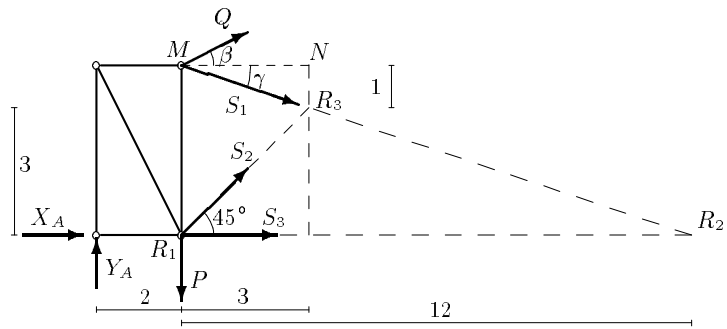


Рис. 24

Уравнения метода Риттера имеют вид

$$\begin{aligned} \sum M_{R_1} &= -4 \cdot S_1 \cos \gamma - 4 \cdot Q \cos \beta - 2 \cdot Y_A = 0, \\ \sum M_{R_2} &= -12 \cdot S_2 \cos 45 - 4 \cdot Q \cos \beta - 12 \cdot Q \sin \beta + 12 \cdot P - 14 \cdot Y_A = 0, \\ \sum M_{R_3} &= 3 \cdot S_3 - 1 \cdot Q \cos \beta - 3 \cdot Q \sin \beta + 3 \cdot P - 5 \cdot Y_A + 3 \cdot X_A = 0. \end{aligned}$$

Находим решение системы: $S_1 = -83.854$ кН, $S_2 = -40.584$ кН, $S_3 = -130.04$ кН.

4. Методом вырезания узлов определяем S_4 . Вырезаем узел C (рис. 23) и составляем уравнение проекций на ось y (рис. 25), из которого сразу же определяем искомое усилие:

$$\sum Y_i = S_4 - F \sin \alpha = 0, \quad S_4 = 31.128 \text{ кН.}$$

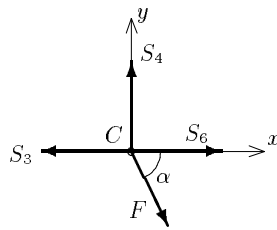


Рис. 25

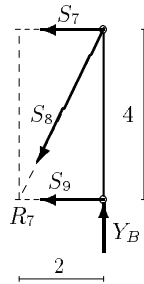


Рис. 26

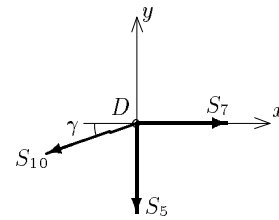


Рис. 27

Усилие больше нуля, следовательно, стержень 4 растянут. Усилие в стержне 5 методом Риттера определить нельзя — не существует сечения, делящего ферму на две части и пересекающего при этом три

стержня. В этом состоит недостаток метода. Поэтому воспользуемся методом вырезания узлов совместно с методом Риттера. Находим S_5 из условия равновесия узла D . К узлу подходят три стержня с неизвестными усилиями. Одно из них — S_7 легко найти по методу Риттера. Проводим сечение II-II (рис. 23) и рассматриваем правую часть фермы (рис. 26). Для определения S_7 составляем уравнение моментов относительно точки Риттера R_7 :

$$\sum M_{R_7} = S_7 \cdot 4 + Y_B \cdot 2 = 0.$$

Находим $S_7 = -59.474$ кН. Заметим, что для определения усилия S_8 по методу Риттера, необходимо составить уравнение проекций на ось y .

Вырезаем узел D и составляем уравнения равновесия (рис. 27):

$$\sum X_i = S_7 - S_{10} \cos \gamma = 0, \quad \sum Y_i = -S_5 - S_{10} \sin \gamma = 0.$$

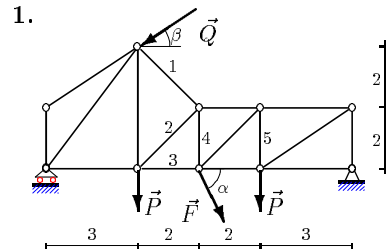
Исключая S_{10} , находим

$$S_{10} = S_7 / \cos \gamma, \quad S_5 = -S_{10} \sin \gamma = -S_7 \operatorname{tg} \gamma = 19.825 \text{ кН}.$$

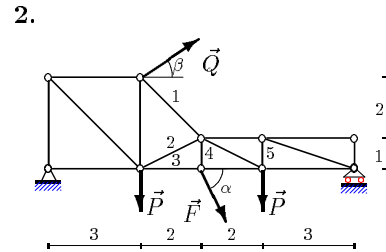
Результаты расчетов в кН занесем в таблицу:

X_A	Y_A	Y_B	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
-60.433	81.827	118.948	-83.854	-40.584	-130.04	31.128	19.825

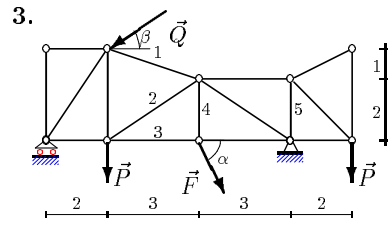
УСЛОВИЯ ЗАДАЧ. Плоская ферма опирается на неподвижный и подвижный шарниры. К узлам фермы приложены две вертикальные нагрузки P и две наклонные — Q и F . Размеры даны в метрах. Найти усилия в стержнях 1–5.



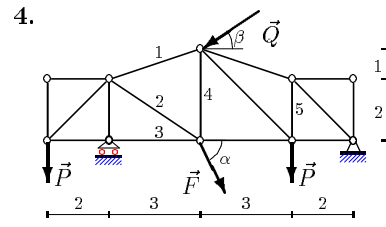
$$P = 2 \text{ кН}, \quad Q = 9 \text{ кН}, \quad F = 9 \text{ кН}, \\ \alpha = 60^\circ, \quad \beta = 30^\circ.$$



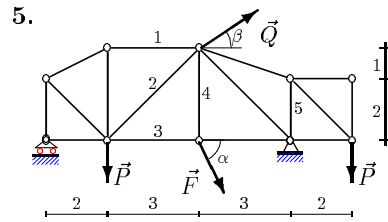
$$P = 2 \text{ кН}, \quad Q = 8 \text{ кН}, \quad F = 10 \text{ кН}, \\ \alpha = 60^\circ, \quad \beta = 15^\circ.$$



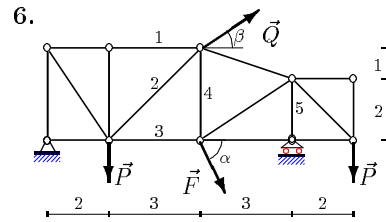
$P = 3 \text{ кН}, Q = 7 \text{ кН}, F = 1 \text{ кН},$
 $\alpha = 60^\circ, \beta = 45^\circ.$



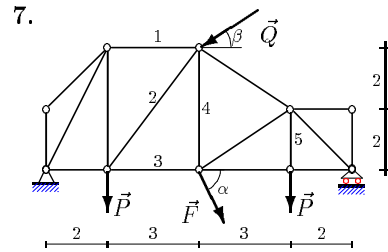
$P = 4 \text{ кН}, Q = 4 \text{ кН}, F = 2 \text{ кН},$
 $\alpha = 30^\circ, \beta = 45^\circ.$



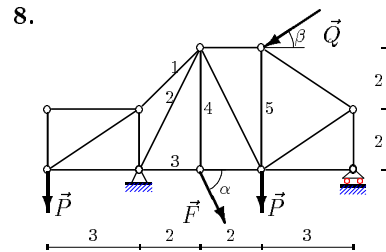
$P = 5 \text{ кН}, Q = 5 \text{ кН}, F = 3 \text{ кН},$
 $\alpha = 45^\circ, \beta = 45^\circ.$



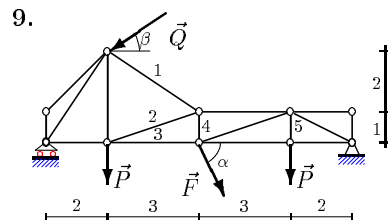
$P = 6 \text{ кН}, Q = 6 \text{ кН}, F = 4 \text{ кН},$
 $\alpha = 45^\circ, \beta = 15^\circ.$



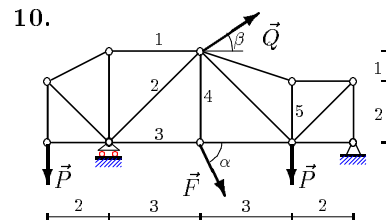
$P = 7 \text{ кН}, Q = 7 \text{ кН}, F = 5 \text{ кН},$
 $\alpha = 60^\circ, \beta = 15^\circ.$



$P = 8 \text{ кН}, Q = 3 \text{ кН}, F = 7 \text{ кН},$
 $\alpha = 30^\circ, \beta = 30^\circ.$



$P = 8 \text{ кН}, Q = 5 \text{ кН}, F = 20 \text{ кН},$
 $\alpha = 45^\circ, \beta = 30^\circ.$



$P = 3 \text{ кН}, Q = 6 \text{ кН}, F = 15 \text{ кН},$
 $\alpha = 45^\circ, \beta = 45^\circ.$

Ответы

№	Реакции опор, кН			Усилия в стержнях, кН				
	X_A	Y_A	R_B	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
1	3.294	4.129	12.165	-1.880	-9.891	16.118	5.665	-2.129
2	-12.727	2.563	8.027	-14.552	-28.897	41.136	8.660	8.027
3	4.450	4.423	7.393	0.022	1.016	4.084	0.866	-3.000
4	1.096	2.375	9.453	-2.938	8.157	-4.000	-3.525	1.583
5	-5.657	7.942	0.644	-0.429	6.161	-3.927	2.121	-3.333
6	-8.624	1.305	11.971	-0.870	6.640	4.799	-2.485	-11.971
7	4.261	12.776	7.366	-6.388	-7.219	6.458	6.602	7.000
8	-3.464	19.485	1.515	16.971	-26.257	3.206	3.500	-0.742
9	-9.812	14.272	18.370	-9.515	-41.577	51.690	7.870	8.000
10	-14.849	5.477	6.886	2.000	-5.496	1.886	10.607	-1.826

Предупреждение типичных ошибок

1. Следует помнить три основных свойства сечения Риттера:

- сечение делит ферму на две части
- сечение пересекает ровно три стержня
- сечение не проходит через шарниры

Второе свойство имеет исключения. Существуют фермы, которые одним сечением можно разделить на две, рассекая $N > 3$ стержней. При этом для одного из стержней существует точка Риттера — точка пересечения остальных $N - 1$ стержней (подумайте, как выглядит такая ферма).

2. Сечение Риттера не обязательно должно изображаться непрерывной линией. В ферме на рис. 4, с. 15 для определения усилия в стержне AB надо выполнить разрывное сечение (какое?). Экспериментируя с сечениями, не забывайте про три его основных свойства.

3. Рассматривая одну из частей рассеченной фермы, забудьте на время о существовании другой. Иначе в уравнения равновесия вы можете случайно включить внешние силы или реакции опор отброшенной части.

4. Не стоит беспокоиться, если точка Риттера находится на отрезанной части, располагается где-нибудь далеко или попадает на шарнир. Ее положение может быть где угодно.

5. В уравнения метода Риттера (моментов или проекций) должно войти *только одно* усилие стержня фермы. В этом основной смысл метода Риттера. Очень часто встречается следующая ошибка. Составляя уравнение, студент неправильно выбирает точку Риттера или

составляет не то уравнение, например, уравнение проекций вместо уравнения моментов. При этом в уравнение кроме одного неизвестного усилия входят и другие, ранее найденные. В принципе такое уравнение может быть и верно, и ответ получится верным, но это не метод Риттера, где определение усилий производится *независимо* одно от другого во избежание накопления ошибок.

6. Положение точки Риттера для каждого стержня не зависит от рассматриваемой части. Однако степень сложности уравнения моментов для разных частей фермы может существенно отличаться. Для большей надежности решения уравнение Риттера (в форме уравнения моментов или уравнения проекций) для одной части может служить проверочным для другой.

7. Проверить расчет можно на компьютере. Программа расчета фермы в системе Maple V приведена на с. 350.

2.3. Ферма. Графический расчет

Постановка задачи. *С помощью диаграммы Максвелла–Кремоны*) найти усилия в стержнях фермы.*

ПЛАН РЕШЕНИЯ

Графический метод расчета ферм является дополнением к аналитическим методам расчета, которые вы изучили в предыдущем параграфе. Диаграмма Максвелла–Кремоны состоит из отдельных силовых многоугольников. Каждый многоугольник соответствует равновесию какого-либо узла фермы.

1. Обозначаем усилия в стержнях фермы.
2. Освобождаем ферму от связей. Действие опор заменяем их реакциями. Составляем три уравнения равновесия. Находим реакции.
3. Проверяем найденные реакции, составляя еще одно уравнение равновесия.
4. Изображаем все силы, действующие на ферму (включая найденные аналитически реакции опор), в виде векторов вне фермы. Если реакция опоры отрицательная, то заменяем ее направление на противоположное. Для графического способа требуются только реальные направления реакций.
5. Обозначаем буквами или цифрами *внешние поля* — области чертежа, разделенные силами и стержнями фермы.

*) *Джеймс Максвелл* (1831–1879) — шотландский физик, математик, астроном. *Антонио Кремона* (1830–1903) — итальянский математик.

6. Обозначаем буквами или цифрами *внутренние поля* — области, ограниченные стержнями фермы.

7. Внешним нагрузкам и усилиям в стержнях даем новые имена — по соседним с силой (или стержнем) полям.

8. Построение диаграммы Максвелла–Кремоны начинаем с многоугольника внешних сил. Выберем направление обхода фермы (по часовой стрелке или против). Начинаем с произвольной силы. Откладывая ее в масштабе и соблюдая направление, обозначаем на диаграмме начальную и конечную точку строчными буквами, соответствующими ее новому обозначению по направлению обхода. Следующая сила пристраивается к концу первой и т.д. до замыкания многоугольника внешних сил и реакций опор.

9. Строим точки внутренних полей на диаграмме. Точку, соответствующую внутреннему полю, можно найти, если у этого поля построены точки двух соседних с ней полей.

Таким образом, начинать графический расчет можно с поля, у которого имеется два соседних с ним внешних поля, уже отмеченные на диаграмме. Искомая точка лежит на пересечении прямых, параллельных стержням, имена которых состоят из имени искомой точки и точек найденных внешних полей. Этот пункт выполняем многократно, до полного построения диаграммы. Модули усилий в стержнях равны длинам соответствующих отрезков на диаграмме.

10. Определяем знаки усилий. Рассматриваем шарнир фермы, к которому подходит какая-либо внешняя нагрузка или стержень с усилием известного знака. Равновесие шарнира изображено на диаграмме замкнутым силовым многоугольником с заданным направлением обхода. Сопоставляя направление усилия на диаграмме и его направление в вырезанном узле, определяем знак усилия. Если направление вектора на многоугольнике совпадает с направлением вектора, приложенного к узлу, то усилие больше нуля. В противном случае — усилие меньше нуля, т.е. стержень сжат.

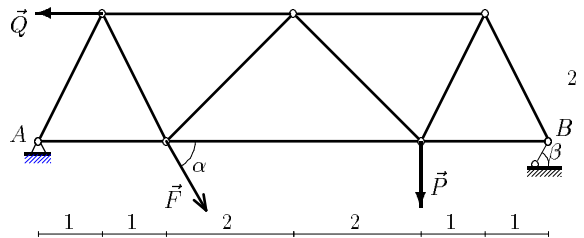


Рис. 28

ПРИМЕР. С помощью диаграммы Максвелла–Кремоны найти усилия в стержнях фермы (рис. 28). $Q = 15$ кН, $P = 30$ кН, $F = 20$ кН, $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 60^\circ$. Размеры даны в м.

РЕШЕНИЕ

1. Обозначаем усилия в стержнях фермы так, как это принято в строительной механике. Усилия в стержнях верхнего пояса (слева направо) — O_1, \dots, O_4 , диагонали (раскосы) — D_1, \dots, D_4 , усилия в нижнем поясе — U_1, U_2, U_3 (рис. 29).

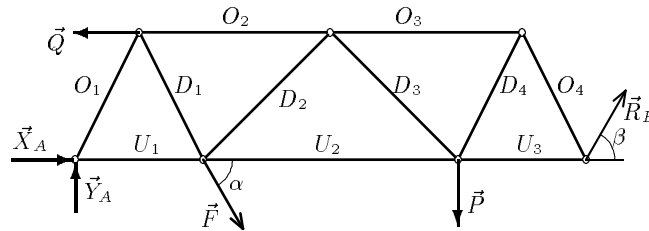


Рис. 29

2. Определяем реакции опор фермы. Реакцию \vec{R}_B направляем вдоль опорного стержня, т.е. под углом β к горизонту (рис. 29). Составляем уравнения равновесия:

$$\begin{aligned}\sum X_i &= X_A - Q + F \cos \alpha + R_B \cos \beta = 0, \\ \sum M_A &= Q \cdot 2 - F \cdot 2 \sin \alpha + R_B \cdot 8 \sin \beta - P \cdot 6 = 0, \\ \sum M_B &= Q \cdot 2 + F \cdot 6 \sin \alpha - Y_A \cdot 8 + P \cdot 2 = 0.\end{aligned}$$

Решаем уравнения и получаем следующие значения:

$$X_A = -8.32 \text{ кН}, \quad Y_A = 24.24 \text{ кН}, \quad R_B = 26.65 \text{ кН}.$$

3. Проверяем вертикальные реакции, составляя уравнение проекций на вертикальную ось:

$$\sum Y_i = Y_A - F \sin \alpha - P + R_B \sin \beta = 0.$$

4. Изображаем все силы, действующие на ферму. Реакцию X_A , которая оказалась в результате решения меньше нуля, направляем в противоположную сторону (рис. 30). Величина этой силы $|X_A| = 8.32$ кН.

5. Обозначаем внешние поля — области чертежа, разделенные силами и стержнями фермы, — C, D, E, G, H, I (рис. 31). Чтобы

не внести путаницу, не следует использовать буквы A, B, Q, P, F , имеющиеся в задаче для обозначения опор и сил.

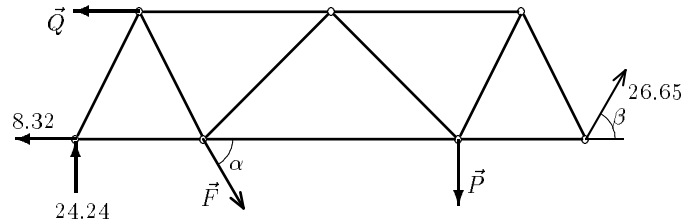


Рис. 30

6. Обозначаем внутренние поля K, L, M, N, R (рис. 31).

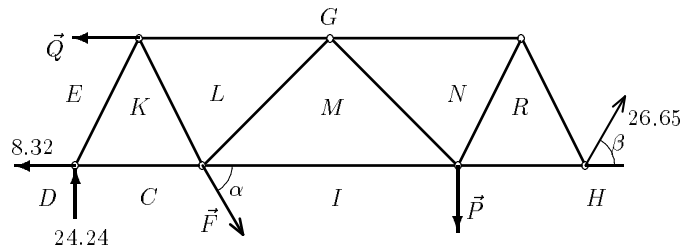


Рис. 31

7. Внешним нагрузкам и усилиям в стержнях даем новые имена — по соседним с силой (или стержнем) полям. Приведем таблицу соответствия имен.

F	P	Q	X_A	Y_A	R_B	O_1	O_2	O_3	O_4	D_1	D_2	D_3	D_4	U_1	U_2	U_3
IC	HI	EG	DE	CD	GH	EK	GK	GN	GR	KL	LM	MN	NR	KC	MI	RH

8. Строим многоугольник внешних сил. Выберем направление обхода фермы по часовой стрелке. Начинаем с произвольной силы, например, $F = 20$ кН. Откладывая в масштабе эту силу и соблюдая ее направление, обозначаем начальную и конечную точку строчными буквами i и c , соответствующими направлению обхода — из поля I в поле C . Следующая по часовой стрелке нагрузка — вертикальная реакция опоры $Y_A = 24.24$ кН. Строим ее в точке c вслед за силой F . Конечную точку помечаем буквой d . Обход фермы продолжаем, пока многоугольник не замкнется. Последней будет сила $P = 30$ кН, обозначенная как HI . Конец ее попадает на исходную точку i (рис. 32).

верно. Заметим, что для ферм с большим числом узлов построение диаграммы — трудоемкий процесс. Это связано с недостатком метода вырезания узлов, графической интерпретацией которого является диаграмма Максвелла–Кремоны. Недостаток вызван неизбежным накоплением ошибок округления в процессе последовательного расчета узлов.

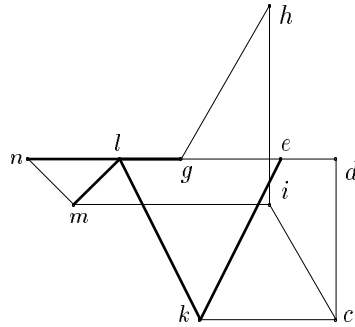


Рис. 36

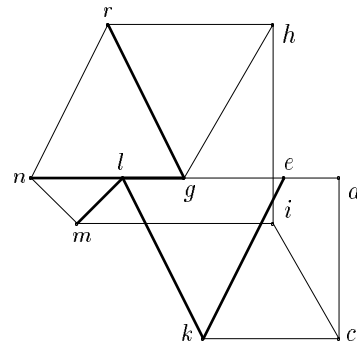


Рис. 37

10. Определяем знаки усилий. Рассмотрим, например, усилие O_1 . Вырезаем узел A , к которому приложено усилие O_1 . К этому же узлу приложены два известных вектора реакций опор и еще одно усилие U_1 с неизвестным знаком. Как обычно, усилия стержней рисуют выходящими из узла (рис. 38). Затем на диаграмме Максвелла–Кремоны выделяется замкнутый многоугольник сил, изображающий равновесие узла (рис. 39). Направление обхода многоугольника (начало одного вектора совпадает с концом предыдущего) задается по известной силе или по усилию в стержне с ранее определенным знаком.

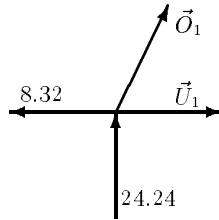


Рис. 38

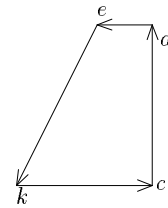


Рис. 39

Здесь обход $cdek$ против часовой стрелки задает реакция опоры $Y_A = 24.24$ кН (cd), или $X_A = 8.32$ кН (de). Если направление вектора

на многоугольнике совпадает с направлением вектора, приложенного к узлу, то усилие больше нуля — стержень растянут. В противном случае — усилие O_1 (ek) меньше нуля, что соответствует сжатию стержня. Такие усилия на диаграмме изображаются утолщенными линиями. Кроме того, получаем $U_1 > 0$. Аналогично определяются знаки и других усилий. Заметим, что особенно эффективно рассматривать узлы, к которым подходит много стержней и приложена хотя бы одна внешняя нагрузка.

Окончательные результаты в кН заносим в таблицу:

O_1	O_2	O_3	O_4	D_1	D_2	D_3	D_4	U_1	U_2	U_3
-27.10	-9.24	-23.08	-25.80	27.10	-9.79	9.79	25.80	20.45	29.49	24.87

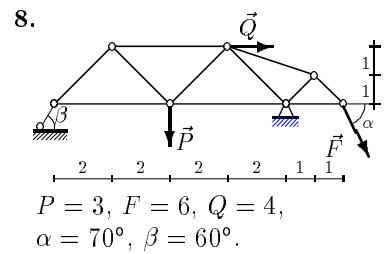
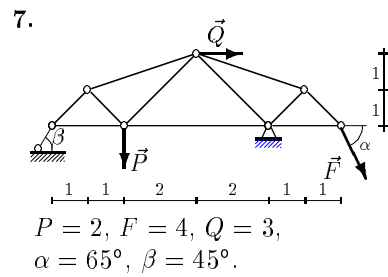
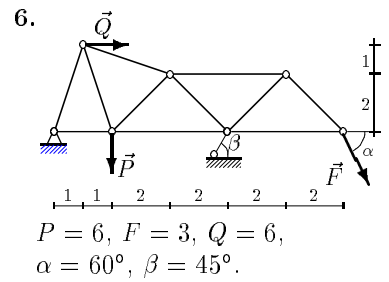
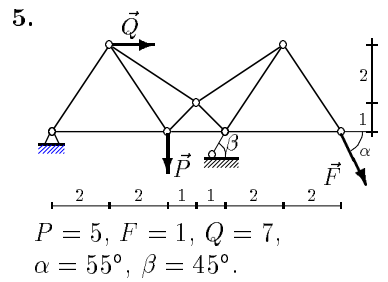
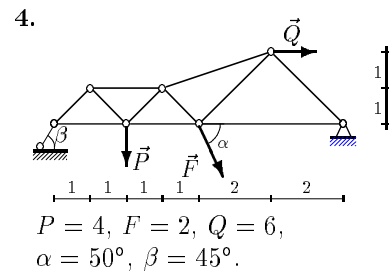
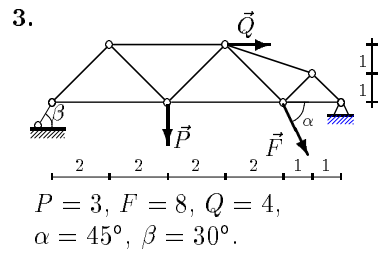
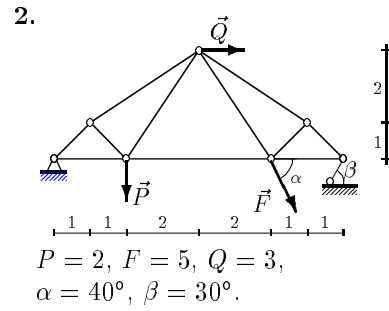
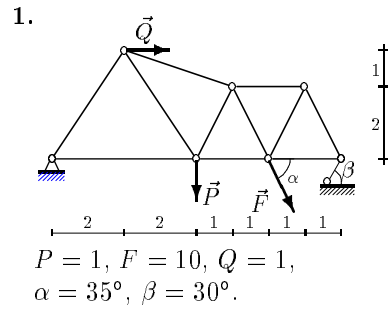
ЗАМЕЧАНИЕ 1. Точность, с которой можно получить усилия графическим способом, обычно невысока. Результаты с тремя знаками после запятой, данные в таблицах, получены, конечно, не графически, а из решения задачи аналитическим методом вырезания узлов^{*)}.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Графический способ расчета ферм в реальной инженерной практике безнадежно устарел, для расчета пространственных ферм он вообще не годится. Однако в учебных целях, для проверки аналитического решения и как пример изящного и быстрого определения усилий с помощью карандаша и линейки, диаграмма Максвелла–Кремоны сохраняет свое значение.

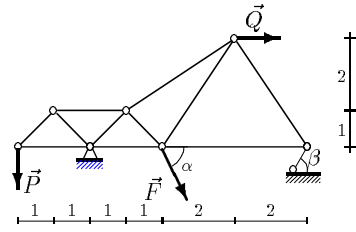
ЗАМЕЧАНИЕ 3. В качестве необычной задачи программирования, предлагаем попробовать найти алгоритм автоматического построения диаграммы Максвелла–Кремоны в системе Maple V, Maple 7, Mathematica 4 или в любом другом пакете, позволяющем работать с графикой. Основное требование к программе — не составлять уравнения равновесия узлов фермы в проекциях. Допустимо найти аналитическим методом реакции опор.

Условия задач. С помощью диаграммы Максвелла–Кремоны найти усилия в стержнях плоской фермы, находящейся под действием вертикальной силы P , наклонной F и горизонтальной Q . Одна опора фермы — неподвижный шарнир, другая — наклонный опорный стержень. Размеры даны в метрах, нагрузки — в кН.

^{*)} Программа расчета в системе Maple V приведена на с. 350.

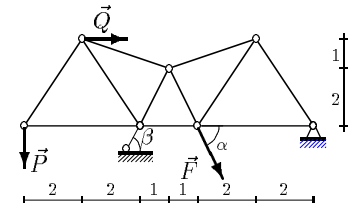


9.



$P = 4, F = 7, Q = 6,$
 $\alpha = 75^\circ, \beta = 60^\circ.$

10.



$P = 5, F = 9, Q = 7,$
 $\alpha = 35^\circ, \beta = 30^\circ.$

Ответы

№	Реакции опор, кН			Усилия в стержнях, кН		
	Неподвижный шарнир		Опорный стержень	Нижний пояс		
	X_A	Y_A	R_B	U_1	U_2	U_3
1	-18.158	1.559	10.354	19.197	22.055	11.555
2	-13.820	1.178	8.071	14.998	14.058	11.025
3	-13.348	6.525	4.263	-1.560	-0.298	-6.823
4	-9.552	3.266	3.205	0.000	0.532	-6.286
5	-15.772	-2.379	11.595	14.186	12.875	0.027
6	-16.830	-0.732	13.195	16.586	12.366	-1.098
7	-3.815	6.500	-1.238	0.000	-2.875	-1.935
8	-5.527	9.548	-1.050	-0.384	-5.203	-3.586
9	-10.075	6.841	4.527	-4.000	4.916	4.877
10	-28.705	1.887	16.550	-3.333	-19.195	-27.446

№	Усилия в стержнях, кН							
	Верхний пояс				Раскосы			
	O_1	O_2	O_3	O_4	D_1	D_2	D_3	D_4
1	-1.874	-4.172	-5.177	-5.788	3.459	-2.100	0.625	5.788
2	-1.667	-1.700	-5.820	-5.707	0.333	2.120	2.893	1.141
3	-3.014	-4.263	-10.318	-9.228	3.014	1.228	3.386	4.614
4	-3.205	-4.532	-0.841	-4.619	3.205	2.452	-2.828	4.995
5	2.860	-8.280	2.363	0.984	2.660	3.941	-8.583	-2.560
6	0.772	-6.536	5.196	3.674	1.407	6.597	-9.521	-3.674
7	1.238	1.384	5.732	5.127	-0.619	3.447	-6.629	-2.563
8	1.286	1.819	8.915	7.974	-1.286	5.529	-9.516	-3.987
9	5.657	8.000	1.672	-4.712	-5.657	-4.018	5.329	3.597
10	6.009	-0.452	-3.411	-2.268	-5.838	-3.821	2.456	3.565

2.4. Расчет составной конструкции

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. *Плоская рама состоит из двух частей, соединенных одним шарниром. На раму действует момент и силы. Учитывая погонный вес, найти реакции опор.*

ПЛАН РЕШЕНИЯ

Составная конструкция, состоящая из двух тел, соединенных шарниром, содержит четыре неизвестные реакции опор. Так как для одного тела под действием плоской системы сил можно составить только три независимых уравнения равновесия, то для определения реакций необходимо рассматривать равновесие каждой части составной конструкции в отдельности.

1-й способ

1. Разбиваем систему на два тела по сочленяющему шарниру. В месте разбиения прикладываем реакции отброшенной части. Внешние связи заменяем их реакциями.

2. Для каждого тела, образованного при разбиении, составляем по три уравнения равновесия.

3. Решаем систему шести уравнений. Определяем реакции опор.

4. Делаем проверку решения, составляя уравнения равновесия целой (нерасчлененной) системы.

2-й способ

1. Разбиваем систему на два тела по сочленяющему шарниру. В месте разбиения прикладываем реакции отброшенной части. Внешние связи заменяем их реакциями.

2. Для каждого тела, образованного при разбиении, составляем уравнения моментов относительно точки сочленения. Полученные уравнения дополняем двумя уравнениями равновесия для всей конструкции в целом.

3. Решаем систему четырех уравнений. Определяем реакции опор.

4. Делаем проверку решения, составляя уравнения равновесия целой (нерасчлененной) системы.

ПРИМЕР. Плоская рама состоит из двух частей, соединенных в точке C шарниром. На раму действует момент $M = 100$ кНм, горизонтальная сила $P = 20$ кН и наклонная сила $Q = 10$ кН. Учитывая погонный вес $\rho = 4$ кН/м, найти реакции опор (рис. 40). Дано: $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 50^\circ$, $AB = 4$ м, $BC = 6$ м, $CD = 4$ м, $DE = 2$ м, $KC = 2$ м, $AN = NB$.

РЕШЕНИЕ

1-й способ

1. Разбиваем конструкцию на два тела по сочленяющему шарниру C . Получаем две части (рис. 41-42). Внешние связи конструкции заменяем реакциями.

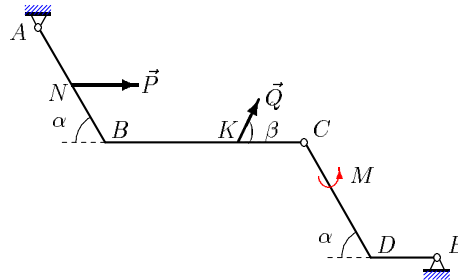


Рис. 40

В точке A прикладываем реакции X_A и Y_A , в точке E — реакции X_E и Y_E . К каждому телу в точке C прикладываем реакции отброшенной части. Согласно 3-му закону Ньютона, реакции X_C и Y_C для разных частей равны по величине и направлены в противоположные стороны.

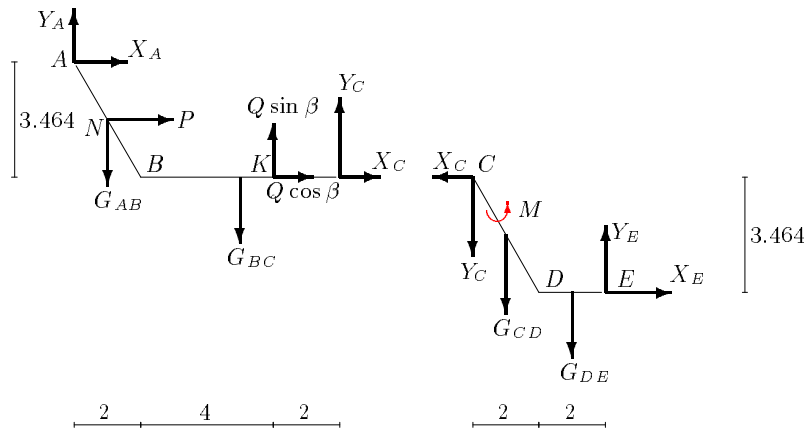


Рис. 41

Рис. 42

Система уравнений равновесия двух тел, образованных при разбиении, замыкается — имеем шесть уравнений равновесия (по три уравнения на каждую часть) и шесть неизвестных $X_A, Y_A, X_E, Y_E, X_C, Y_C$.

2. Для каждой отдельной части составляем по три уравнения равновесия:

$$\sum X_i^{(\text{лев})} = X_A + P + Q \cos \beta + X_C = 0, \quad (1)$$

$$\sum Y_i^{(\text{лев})} = Y_A + Q \sin \beta + Y_C - G_{AB} - G_{BC} = 0, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \sum M_{C_i}^{(\text{лев})} = & -X_A AB \sin \alpha - Y_A (AB \cos \alpha + BC) - \\ & - P NB \sin \alpha - Q KC \sin \beta + \\ & + G_{AB} (NB \cos \alpha + BC) + G_{BC} (BC/2) = 0; \end{aligned} \quad (3)$$

$$\sum X_i^{(\text{прав})} = -X_C + X_E = 0, \quad (4)$$

$$\sum Y_i^{(\text{прав})} = -Y_C + Y_E - G_{CD} - G_{DE} = 0, \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \sum M_{C_i}^{(\text{прав})} = & X_E CD \sin \alpha + Y_E (DE + CD \cos \alpha) + M - \\ & - G_{DE} (DE/2 + CD \cos \alpha) - G_{CD} (CD/2) \cos \alpha = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

3. Решаем систему (1–6) относительно неизвестных X_A , Y_A , X_E , Y_E , X_C , Y_C . Можно использовать любой способ решения системы линейных уравнений (*Решебник ВМ*, §2.1). Рекомендуем наиболее эффективный для таких систем метод исключения Гаусса.

Если для решения использовать компьютер, систему лучше записать в матричном виде, предварительно вычислив правые части системы (1–6) и коэффициенты при неизвестных. Величины сил тяжести участков вычисляем через погонный вес ρ по формуле $G = \rho L$, где L — длина соответствующего участка. В нашем случае

$$G_{AB} = 4 \cdot 4 = 16 \text{ кН}, \quad G_{BC} = 4 \cdot 6 = 24 \text{ кН},$$

$$G_{CD} = 4 \cdot 4 = 16 \text{ кН}, \quad G_{DE} = 4 \cdot 2 = 8 \text{ кН}.$$

Система (1–6) имеет следующий матричный вид:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -3.464 & -8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3.464 & 4 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} X_A \\ Y_A \\ X_E \\ Y_E \\ X_C \\ Y_C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -26.428 \\ 32.339 \\ -134.038 \\ 0 \\ 24 \\ -60 \end{vmatrix}.$$

Результаты расчетов в кН заносим в таблицу:

X_A	Y_A	X_E	Y_E	X_C	Y_C
73.202	-14.943	-99.630	71.282	-99.632	-47.281

4. Делаем проверку решения, составляя уравнения равновесия для целой (нерасчленной) системы (рис. 43):

$$\begin{aligned} \sum M_{E_i}^{(\text{нел})} = & -Y_A((AB + CD) \cos \alpha + BC + DE) + M - \\ & - P(NB + CD) \sin \alpha - X_A(AB + CD) \sin \alpha - \\ & - QCD \sin \alpha \cos \beta - Q(KC + CD \cos \alpha + DE) \sin \beta + \\ & + G_{AB}((NB + CD) \cos \alpha + BC + DE) + \\ & + G_{BC}(BC/2 + CD \cos \alpha + DE) + \\ & + G_{CD}((CD/2) \cos \alpha + DE) + G_{DE}(DE/2) = 0, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \sum M_{A_i}^{(\text{нел})} = & Y_E((AB + CD) \cos \alpha + BC + DE) + M + \\ & + PAN \sin \alpha + X_E(AB + CD) \sin \alpha + \\ & + QAB \sin \alpha \cos \beta + Q(BK + AB \cos \alpha) \sin \beta - \\ & - G_{DE}(DE/2 + (AB + CD) \cos \alpha + BC) - \\ & - G_{CD}((AB + CD/2) \cos \alpha + BC) - \\ & - G_{BC}(BC/2 + AB \cos \alpha) - G_{AB}(AB/2) \cos \alpha = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

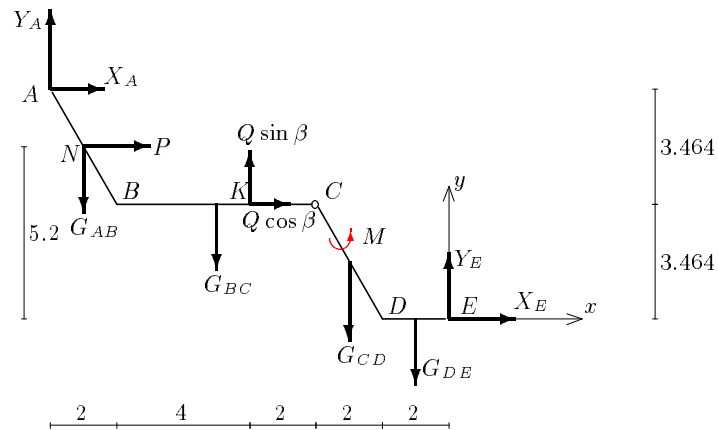


Рис. 43

2-й способ

1. Разбиваем конструкцию на два тела по сочленяющему шарниру C . Получаем две части (рис. 41–42). Внешние связи конструкции заменяем реакциями.

2. Относительно шарнира C для каждой части конструкции составляем уравнения моментов (3) и (6). Для всей системы в целом составляем уравнения моментов (7,8) относительно опор A и E .

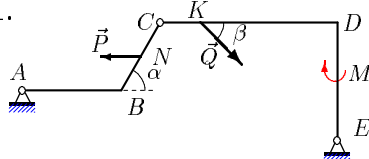
3. Решаем систему четырех уравнений (3,6,7,8) относительно четырех неизвестных, замечая, что система распадается на две: уравнения (3) и (7) для X_A и Y_A и уравнения (6) и (8) для X_E и Y_E .

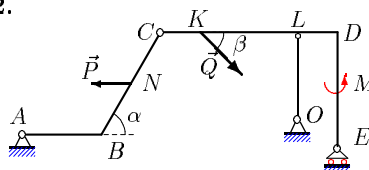
4. Делаем проверку решения, составляя уравнения равновесия целой (нерасчлененной) системы (рис. 43):

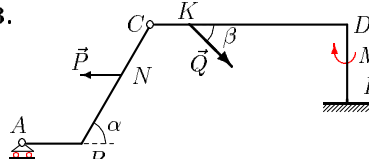
$$\sum X_i^{(\text{цел})} = X_A + P + Q \cos \beta + X_E = 0,$$

$$\sum Y_i^{(\text{цел})} = Y_A + Q \sin \beta - G_{AB} - G_{BC} + Y_E - G_{CD} - G_{DE} = 0.$$

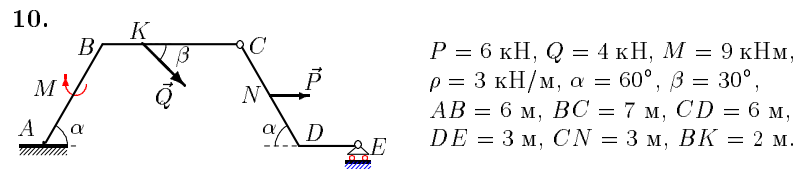
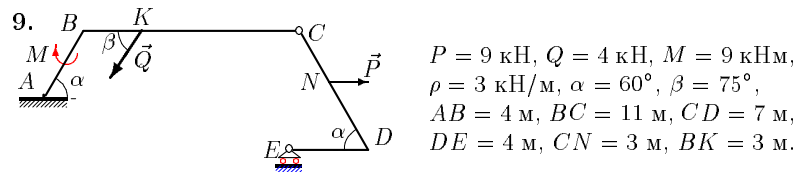
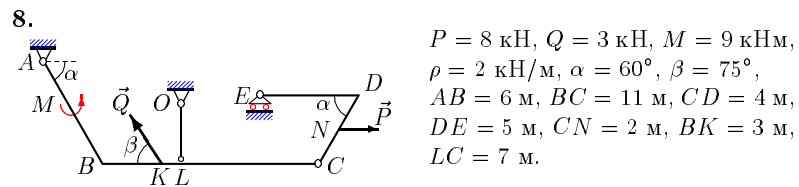
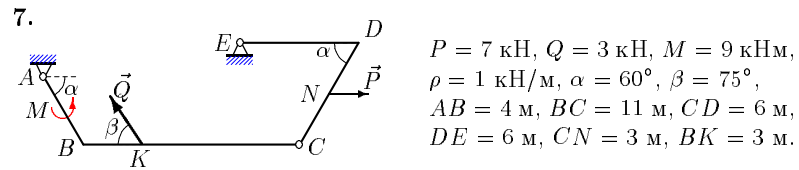
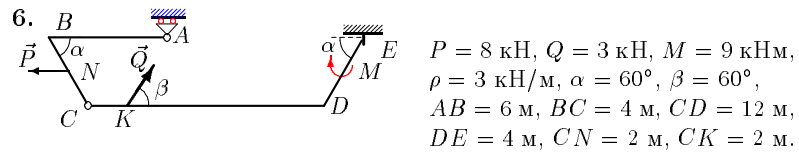
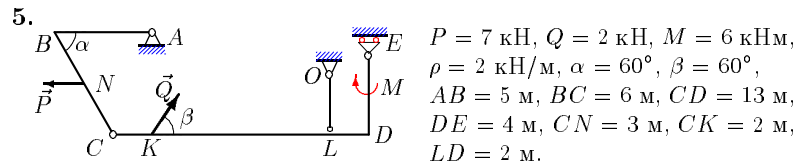
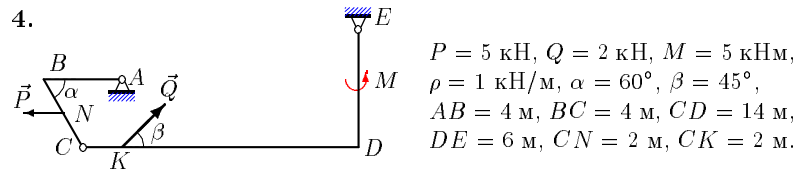
УСЛОВИЯ ЗАДАЧ. Плоская рама состоит из двух частей, соединенных в точке C шарниром. На раму действует момент M , горизонтальная сила P и наклонная сила Q . Учитывая погонный вес ρ , найти реакции опор.

- 

$P = 4 \text{ кН}, Q = 1 \text{ кН}, M = 3 \text{ кНм},$
 $\rho = 1 \text{ кН/м}, \alpha = 60^\circ, \beta = 30^\circ,$
 $AB = 5 \text{ м}, BC = 4 \text{ м}, CD = 9 \text{ м},$
 $DE = 6 \text{ м}, CN = 2 \text{ м}, CK = 2 \text{ м}.$
- 

$P = 5 \text{ кН}, Q = 1 \text{ кН}, M = 3 \text{ кНм},$
 $\rho = 2 \text{ кН/м}, \alpha = 60^\circ, \beta = 30^\circ,$
 $AB = 4 \text{ м}, BC = 6 \text{ м}, CD = 9 \text{ м},$
 $DE = 6 \text{ м}, CN = 3 \text{ м}, CK = 2 \text{ м},$
 $LD = 2 \text{ м}.$
- 

$P = 7 \text{ кН}, Q = 2 \text{ кН}, M = 9 \text{ кНм},$
 $\rho = 3 \text{ кН/м}, \alpha = 60^\circ, \beta = 45^\circ,$
 $AB = 3 \text{ м}, BC = 7 \text{ м}, CD = 10 \text{ м},$
 $DE = 4 \text{ м}, CN = 3 \text{ м}, CK = 2 \text{ м}.$



Ответы

№	X_A	Y_A	X_E	Y_E	S_{OL}	кН	
						M_A	M_E
1	11.062	8.270	-7.928	16.230	—	—	—
2	4.134	9.499	—	-50.005	91.006	—	—
3	—	9.779	5.586	63.635	—	—	-376.867
4	14.529	18.835	-10.943	7.751	—	—	—
5	6.000	-5.005	—	-188.232	247.505	—	—
6	—	-1.964	6.500	77.366	—	—	-684.804
7	10.323	4.504	-16.547	19.598	—	—	—
8	-7.224	-12.671	—	-5.619	67.392	—	—
9	-7.965	144.598	—	-62.735	—	1559.959	—
10	-9.464	59.348	—	8.652	—	415.158	—

Ответы на типичные вопросы, возникающие при решении задачи

1. Что представляет собой опора в точке E в варианте 3,6 и в точке A в варианте 9?

Это жесткая заделка. Реакции заделки — две силы, например, X_E и Y_E и момент M_E .

2. Куда направлять неизвестные реакции? Для двусторонних связей (не освобождающихся) реакции — силы принято направлять по положительному направлению осей координат, а моменты — против часовой стрелки. В данной задаче и везде, где это специально не оговорено, связи двусторонние.

3. Какие еще возможны схемы решения задачи?

Можно составить систему из шести уравнений, куда войдут по два уравнения равновесия для каждой части и два уравнения равновесия рамы в целом (**2+2+2**). Возможны также варианты **3+2+1**, **3+1+2** и другие схемы ^{*)}. Однако, здесь следует проявлять осторожность в выборе вида уравнений. В частности, если для каждой части и для рамы в целом составить уравнение проекций на одну и ту же ось или уравнение моментов относительно одной и той же точки, то три уравнения, например, $\sum X_i^{(\text{лев})} = 0$, $\sum X_i^{(\text{прав})} = 0$, $\sum X_i^{(\text{цел})} = 0$, будут зависимыми — сумма уравнений для частей дает уравнение для целой конструкции.

4. Можно ли разбить раму не по шарниру, а по какой-либо другой точке, например, по угловой?

^{*)} Невозможно только появление в таких схемах цифры **4**, так как для одного тела в плоской задаче статики более трех независимых уравнений равновесия не существует.

Можно, но не нужно, так как при этом, кроме реакций X и Y , в точке разбиения рамы следует добавить еще одну неизвестную величину — момент. Этот момент удерживает от поворота одну часть относительно другой. В шарнире такой момент отсутствует, поэтому его и берут за точку разбиения, чтобы не увеличивать число неизвестных. Определение внутреннего момента в каждой точке рамы составляет одну из задач сопротивления материалов и строительной механики (построение эпюры моментов).

2.5. Конструкция с распределенными нагрузками

Постановка задачи. *Найти реакции опор плоской составной рамы, находящейся под действием линейно распределенной нагрузки и нагрузки, равномерно распределенной по дуге окружности.*

ПЛАН РЕШЕНИЯ

1. Внешние связи заменяем реакциями. Разбиваем систему на два тела по сочленяющему шарниру. К каждой из образовавшихся частей прикладываем реакции шарнира, помня о том, что части взаимодействуют с силами равными по величине и противоположными по направлению.

2. Линейную нагрузку с максимальным значением q_{max} , распределенную по треугольнику, заменяем на сосредоточенную Q в центре тяжести треугольника ($1/3$ длины участка L нагрузки, считая от прямого угла). Значение нагрузки вычисляем по формуле площади треугольника $Q = q_{max}L/2$.

3. Нагрузку q , равномерно распределенную по дуге окружности радиусом R с центральным углом 2α , заменим ее равнодействующей $Q = q \cdot 2R \sin \alpha$, направленной по биссектрисе центрального угла ([19], § 21).

4. Для каждого тела составляем по три уравнения равновесия.

5. Решаем систему шести уравнений. Определяем реакции опор.

6. Делаем проверку решения, составляя уравнения равновесия для целой (нерасчлененной) системы.

ПРИМЕР. Найти реакции опор плоской составной рамы, находящейся под действием линейно распределенной нагрузки с максимальной интенсивностью $q_1 = 10$ кН/м на вертикальном участке рамы

AB , и нагрузки с интенсивностью $q_2 = 2$ кН/м, равномерно распределенной по дуге CK окружности с центром в точке O (рис. 44). $AB = 3$ м, $BC = 6$ м, $DE = 4$ м, $R = 5$ м, $CK = \pi R/3$.

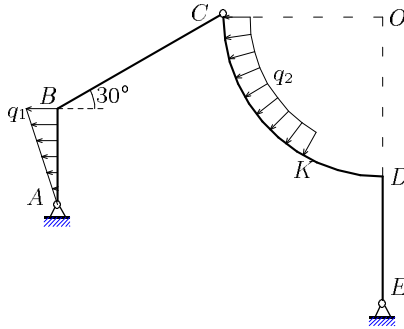


Рис. 44

РЕШЕНИЕ

1. Внешние связи заменяем реакциями $\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{X}_E, \vec{Y}_E$. Число неизвестных реакций больше трех. Следовательно, для решения задачи необходимо разбить конструкцию на две и рассмотреть равновесие каждой образовавшейся части (рис. 45–46).

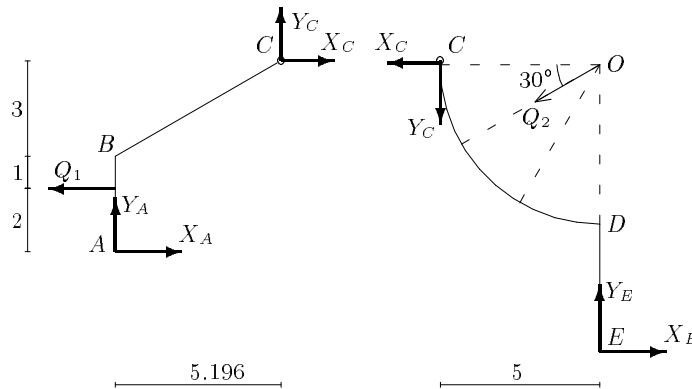


Рис. 45

Рис. 46

При разбиении по шарниру к каждой из частей прикладываем реакции шарнира, помня о том, что части взаимодействуют с силами, равными по величине и противоположными по направлению (об этом шла речь в § 2.4, с. 55).

2. Нагрузку, распределенную по линейному закону, заменяем сосредоточенной Q_1 , приложенной к раме на расстоянии $AB/3$ от максимального значения q_1 в том же направлении (рис. 45). Величина равнодействующей Q_1 вычисляется по формуле площади прямоугольного треугольника с катетами AB и q_1 :

$$Q_1 = \frac{1}{2} q_1 AB = \frac{1}{2} 10 \cdot 3 = 15 \text{ кН.}$$

3. Нагрузку с интенсивностью q_2 , равномерно распределенную по дуге CK , заменяем ее равнодействующей

$$Q_2 = q_2 \cdot 2R \sin\left(\frac{CK}{2R}\right) = 2 \cdot 2 \cdot 5 \sin(\pi/6) = 10 \text{ кН,}$$

направленной по биссектрисе угла $\angle KOC = 60^\circ$ (рис. 47). Так как $2R \sin(\pi/6) = CK$, то величина Q_2 совпадает со значением равнодействующей нагрузки, равномерно распределенной по хорде CK , той же интенсивности q_2 . Воспользуемся тем, что вектор силы в теоретической механике является скользящим. Для удобства вычисления

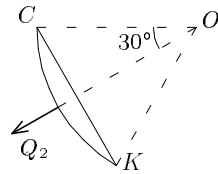


Рис. 47

момента силы Q_2 переносим точку ее приложения вдоль линии действия силы в центр окружности O . То, что точка O не принадлежит раме, и сила как-бы “зависает” в воздухе, не должно смущать. Твердое тело CDE можно мысленно расширить до точки O , давая, таким образом, силе Q_2 реальную точку приложения.

4. Составляем уравнения равновесия частей рамы:

$$\begin{aligned} \sum X_i^{(\text{лев})} &= X_A + X_C - Q_1 = 0, \\ \sum Y_i^{(\text{лев})} &= Y_A + Y_C = 0, \\ \sum M_{C_i}^{(\text{лев})} &= X_A(AB + BC \sin 30^\circ) - Y_A BC \cos 30^\circ - \\ &\quad - Q_1(AB/3 + BC \sin 30^\circ) = 0, \quad (1) \\ \sum X_i^{(\text{прав})} &= X_E - X_C - Q_2 \cos 30^\circ = 0, \\ \sum Y_i^{(\text{прав})} &= Y_E - Y_C - Q_2 \sin 30^\circ = 0, \\ \sum M_{C_i}^{(\text{прав})} &= X_E(DE + R) + Y_E R - Q_2 R \sin 30^\circ = 0. \end{aligned}$$

5. Решаем систему (1) шести уравнений с шестью неизвестными. Результаты расчетов в кН заносим в таблицу:

X_A	Y_A	X_E	Y_E	X_C	Y_C
18.322	9.609	5.338	-4.609	-3.322	9.609

6. Выполняем проверку решения — составляем уравнения моментов для всей системы в целом (рис. 48):

$$\begin{aligned} \sum M_{E_i}^{(уел)} = & -X_A(R + DE - AB - BC \sin 30^\circ) - \\ & -Y_A(BC \cos 30^\circ + R) + Q_1(R + DE - AB/3 - BC \sin 30^\circ) + \\ & + Q_2 \cos 30^\circ(R + DE) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum M_{A_i}^{(уел)} = & X_E(R + DE - AB - BC \sin 30^\circ) + \\ & + Y_E(BC \cos 30^\circ + R) + (2/3)Q_1 AB - \\ & - Q_2 \sin 30^\circ(BC \cos 30^\circ + R) + Q_2 \cos 30^\circ(AB + BC \sin 30^\circ) = 0. \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Можно предложить второй способ решения задачи, рассмотренный в предыдущем параграфе (с. 54). Для каждого тела, образованного при разбиении, составляем уравнения моментов относительно точки сочленения C . Полученные уравнения дополняем двумя уравнениями равновесия для всей конструкции в целом (рис. 48).

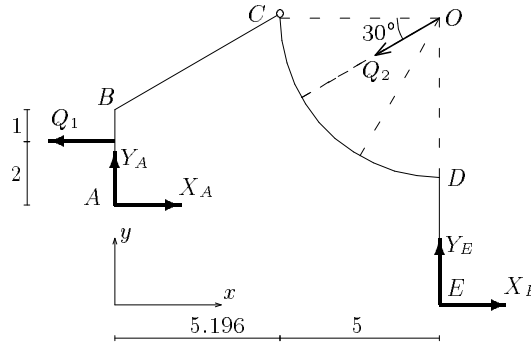
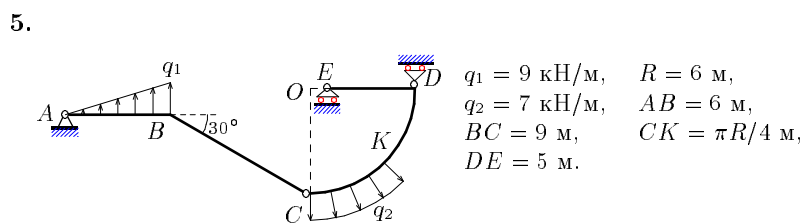
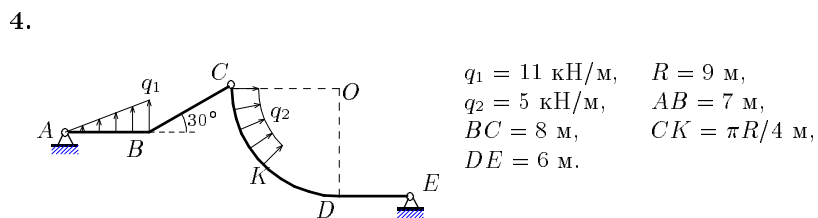
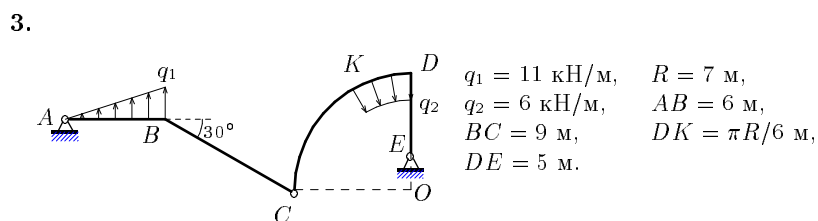
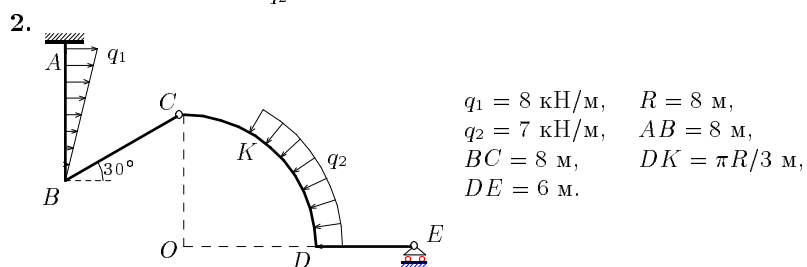
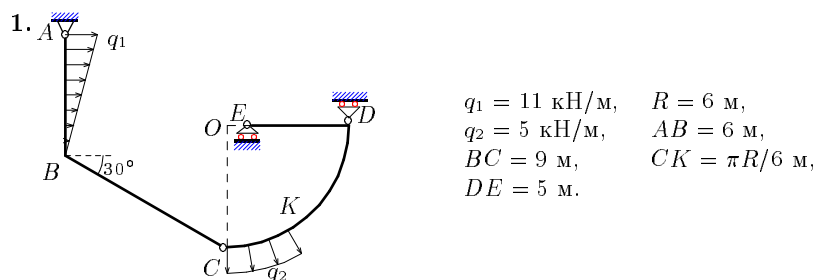
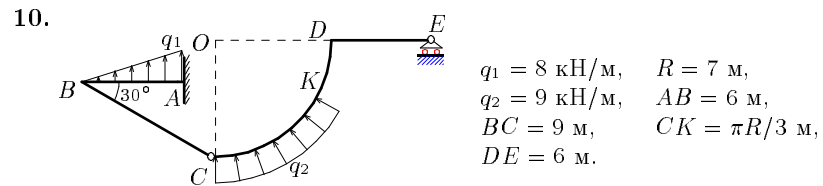
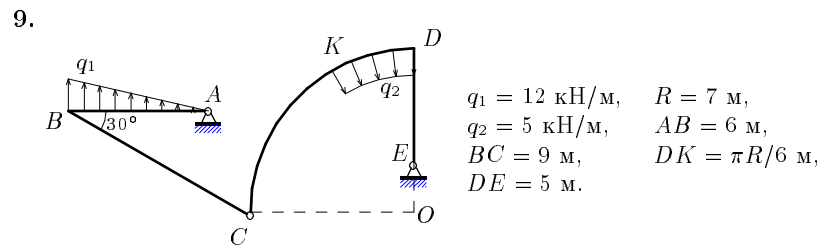
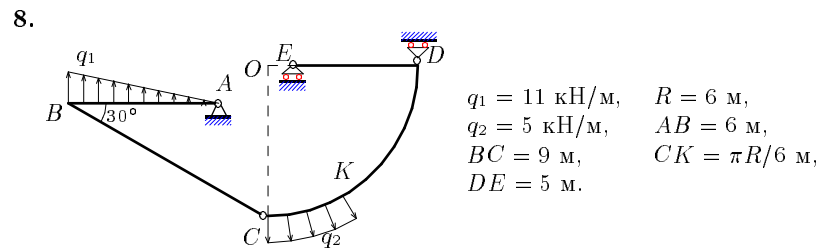
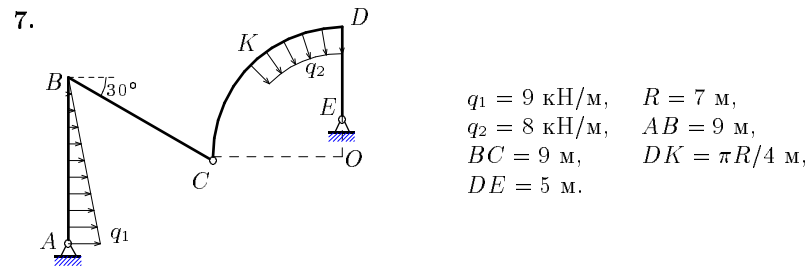
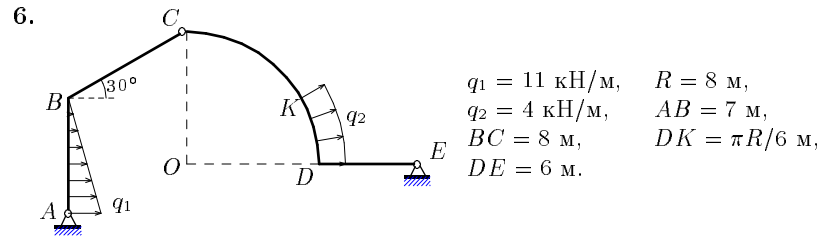


Рис. 48

Для данного примера это уравнения моментов относительно опорных шарниров A и E .

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ. Найти реакции опор плоской составной рамы, находящейся под действием линейно распределенной нагрузки с максимальной интенсивностью q_1 и нагрузки с интенсивностью q_2 , равномерно распределенной по дуге окружности. Участок CD представляет собой четверть окружности радиуса R с центром в O .





Ответы

№	X_A	Y_A	Y_D	X_E	Y_E	M_A
	кН					кНм
1	-37.019	13.882	4.600	—	-3.482	—
2	16.497	0.287	—	—	27.713	110.646
3	13.010	-27.675	—	-18.637	15.675	—
4	-42.002	-37.663	—	10.182	-14.017	—
5	-12.302	-15.158	11.191	—	6.665	—
6	-34.480	-6.584	—	-20.020	2.297	—
7	29.021	24.549	—	-85.923	15.049	—
8	-4.019	-96.489	-10.875	—	89.363	—
9	-29.207	-43.005	—	24.518	24.505	—
10	31.500	-61.598	—	—	-16.962	122.290

2.6. Расчет системы трех тел, соединенных шарниром

Постановка задачи. *Определить реакции опор конструкции, состоящей из трех тел, соединенных в одной точке шарниром.*

План решения

1. Расчленим конструкцию на три отдельных тела и сочленяющий шарнир в качестве четвертого тела. Считая, что каждое из трех тел в точке сочленения взаимодействует только с осью шарнира, действие оси шарнира на тело заменяем ее реакциями.

2. Записываем по три уравнения равновесия для каждого из тел и два уравнения равновесия в проекциях для системы сил, приложенных к оси шарнира.

3. Решаем систему 11 уравнений с 11 неизвестными.

4. Выполняем проверку решения, составляя дополнительное уравнение равновесия для нерасчлененной конструкции.

Пример. Определить реакции опор конструкции, состоящей из трех тел, соединенных в точке C шарниром. В точке B конструкция опирается на неподвижный шарнир, в точках D и E — подвижные шарниры, в точке A — горизонтальный опорный стержень. На конструкцию действуют силы $F = 40$ кН, $P = 20$ кН, $Q = 10$ кН и сосредоточенные моменты $M_1 = 100$ кНм, $M_2 = 30$ кНм (рис. 49); $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 30^\circ$. Размеры на рисунке указаны в метрах.

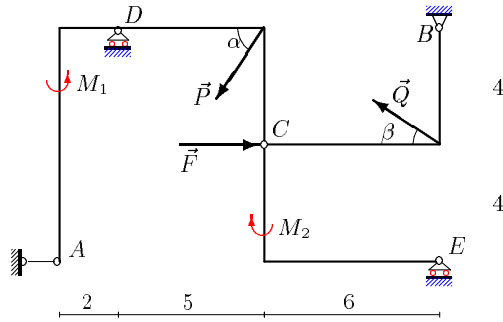


Рис. 49

РЕШЕНИЕ

1. Расчленим конструкцию на три отдельных тела ADC , CB , CE и соединяющий шарнир C в качестве четвертого тела. Считая, что каждое из трех тел в точке сочленения взаимодействует только с осью шарнира C , действие оси шарнира на тело заменяем ее реакциями (рис. 50).

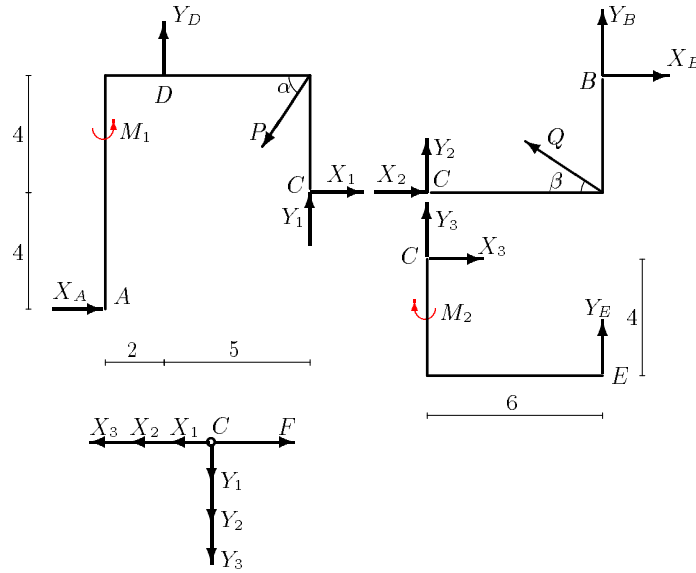


Рис. 50

2. Для каждого из тел (AC , BC , EC) записываем по три уравнения равновесия — два уравнения проекций и уравнение моментов относительно точки C^*). Для системы сил, сходящихся в шарнире C , составляем два уравнения равновесия в проекциях (рис. 50). Получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned}\sum X_i^{(AC)} &= X_1 - P \cos \alpha + X_A = 0, \\ \sum Y_i^{(AC)} &= Y_1 - P \sin \alpha + Y_D = 0, \\ \sum M_C^{(AC)} &= X_A \cdot 4 - Y_D \cdot 5 + M_1 + P \cdot 4 \cos \alpha = 0,\end{aligned}\tag{1}$$

$$\begin{aligned}\sum X_i^{(BC)} &= X_2 - Q \cos \beta + X_B = 0, \\ \sum Y_i^{(BC)} &= Y_2 + Q \sin \beta + Y_B = 0, \\ \sum M_C^{(BC)} &= -X_B \cdot 4 + Y_B \cdot 6 + Q \cdot 6 \sin \beta = 0,\end{aligned}\tag{2}$$

$$\begin{aligned}\sum X_i^{(EC)} &= X_3 = 0, \\ \sum Y_i^{(EC)} &= Y_3 + Y_E = 0, \\ \sum M_C^{(EC)} &= Y_E \cdot 6 - M_2 = 0,\end{aligned}\tag{3}$$

$$\begin{aligned}\sum X_i^{(C)} &= -X_1 - X_2 - X_3 + F = 0, \\ \sum Y_i^{(C)} &= -Y_1 - Y_2 - Y_3 = 0.\end{aligned}\tag{4}$$

3. Решаем систему 11 уравнений с 11 неизвестными. Результаты расчетов в кН записываем в таблицу:

X_A	Y_D	X_B	Y_B	Y_E	X_1	Y_1	X_2	Y_2	X_3	Y_3
-10.90	19.28	-10.44	-11.96	5.00	20.90	-1.96	19.10	6.96	0	-5.00

4. Выполняем проверку решения, составляя дополнительное уравнение равновесия для нерасчлененной системы (рис. 51). Моментную точку K выбираем так, чтобы в уравнения вошли все проверяемые величины X_A , Y_D , X_B , Y_B , Y_E :

$$\begin{aligned}\sum M_K^{(\text{цел})} &= X_A \cdot 4 + Y_D \cdot 2 + M_1 - M_2 + P \cdot \cos \alpha \cdot 4 - \\ &\quad - P \cdot \sin \alpha \cdot 7 + Q \cdot \sin \beta \cdot 13 + Y_E \cdot 13 + Y_B \cdot 13 - X_B \cdot 4 = 0.\end{aligned}$$

*) В качестве моментной точки можно выбирать любую, в том числе и не принадлежащую телу.

ЗАМЕЧАНИЕ. Предложенный способ расчета не является единственным. Например, если из трех частей, соединенных в одном шарнире, можно отделить одну, имеющую в качестве опоры подвижный шарнир (часть CE , рис. 50), то получится система двух тел, одно из которых (CE) имеет три неизвестные реакции. Определить эти реакции можно из системы трех уравнений равновесия этой части.

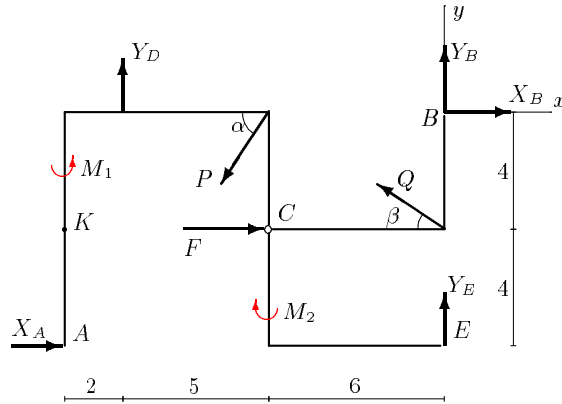
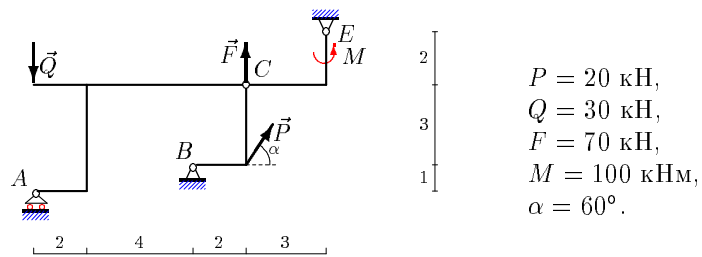


Рис. 51

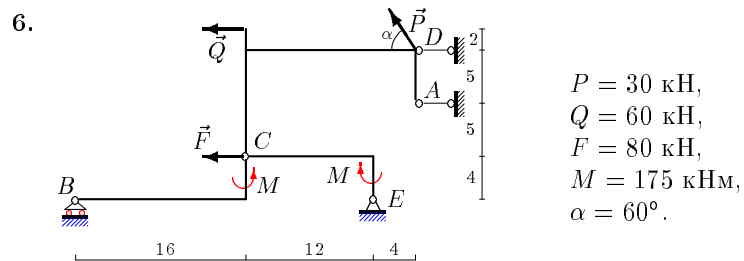
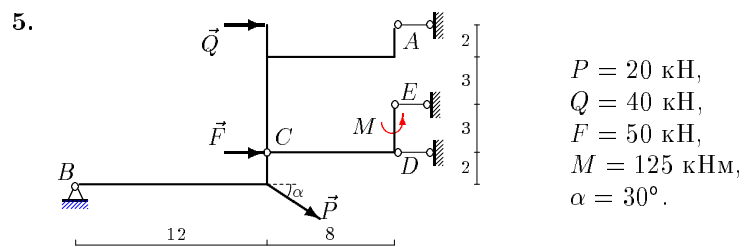
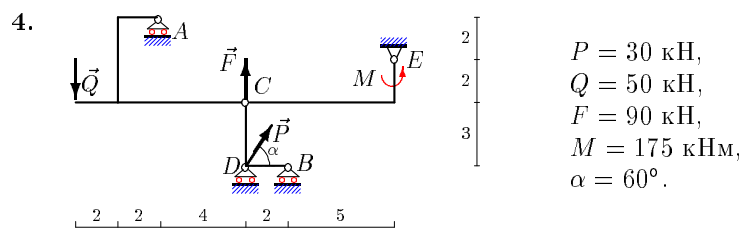
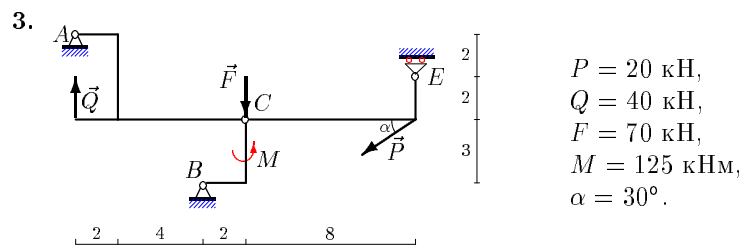
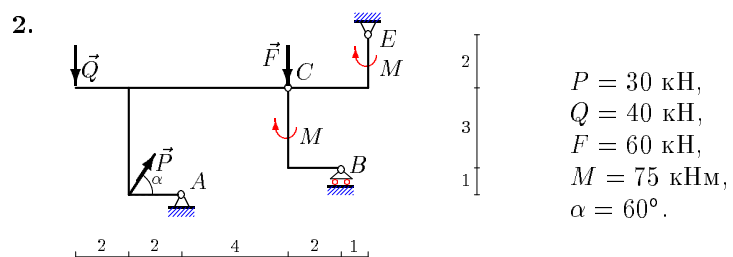
Затем следует рассмотреть оставшуюся часть, состоящую из двух еще нерасчлененных тел. В качестве дополнительной нагрузки к ним будут приложены (в противоположную сторону) две реакции отброшенной третьей части.

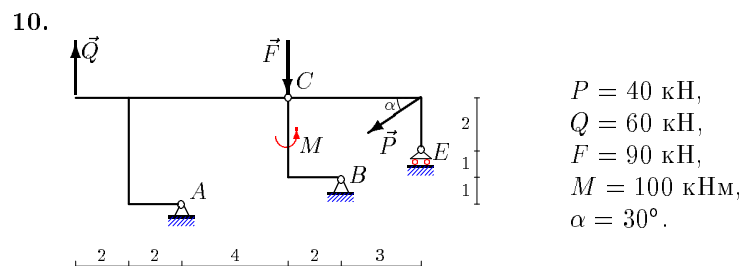
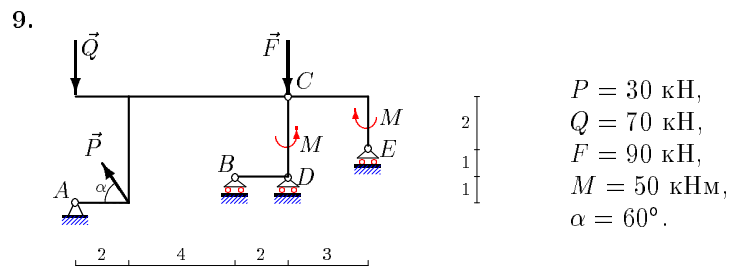
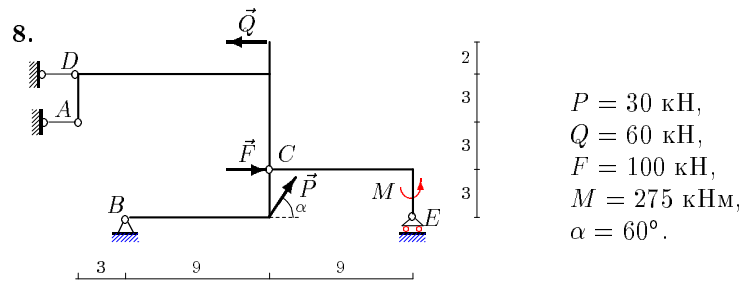
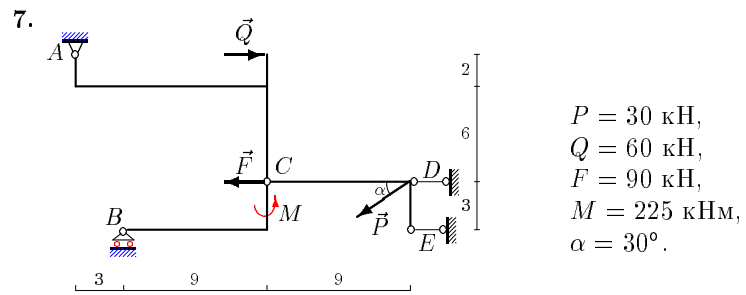
УСЛОВИЯ ЗАДАЧ. Определить реакции опор конструкции (в кН), состоящей из трех тел, соединенных в точке C шарниром. Размеры указаны в метрах.

1.



$$\begin{aligned}
 P &= 20 \text{ кН}, \\
 Q &= 30 \text{ кН}, \\
 F &= 70 \text{ кН}, \\
 M &= 100 \text{ кНм}, \\
 \alpha &= 60^\circ.
 \end{aligned}$$





Ответы

№	X_A	Y_A	X_B	Y_B	X_E	Y_E	X_D	Y_D
1	—	30.000	-74.785	-97.177	64.785	9.856	—	—
2	-103.529	-47.500	—	37.500	88.529	84.019	—	—
3	9.240	-44.620	8.080	74.620	—	10.000	—	—
4	—	100.000	—	-22.500	-15.000	-29.286	—	-114.195
5	-40.000	—	42.679	10.000	41.667	—	-151.667	—
6	-256.148	—	—	10.938	154.505	-36.918	256.643	—
7	-45.000	-10.000	—	25.000	45.000	—	55.981	—
8	-267.449	—	-1.276	4.575	—	-30.556	213.724	—
9	15.000	50.514	—	25.000	—	16.667	—	41.838
10	100.785	-19.215	-66.144	49.215	—	20.000	—	—

Ответы на типичные вопросы, возникающие при решении задачи

1. К какой части отнести нагрузку, приложенную к шарниру C ?


Эту нагрузку можно отнести к любой части.

2. Чему равна длина опорных стержней, например, горизонтальных A , D и E в варианте 5?

Для решения задачи длины опорных стержней не нужны. Освобождаясь от опор, реакцию опоры прикладываем к телу, в месте крепления опоры, положение другого конца опорного стержня может быть неопределено. Для опорного стержня самое главное — это его направление. Реакцию опорного стержня направляем вдоль него.

3. В результате решения реакция подвижной опоры оказалась отрицательной. Означает ли это, что опора отрывается от поверхности скольжения?

Нет. Предполагается, что все связи двусторонние, т.е. предусмотрено некоторое ограничение (на рисунке не показано), не позволяющее подвижным опорам отрываться от поверхности. Более точное

изображение подвижной опоры: 

4. В условии задачи не указана точка приложения момента M .

Вектор сосредоточенного момента (пары) является свободным. Его можно прикладывать к любой точке тела, не переносите его только с одной части составной конструкции в другую.

Глава 3

РАВНОВЕСИЕ ПРИ НАЛИЧИИ ТРЕНИЯ

3.1. Трение скольжения

Постановка задачи. Конструкция состоит из двух шарнирно соединенных между собой тел. Одна из опор конструкции представляет собой одностороннюю связь и допускает проскальзывание с трением. Коэффициент трения, размеры конструкции и часть внешних нагрузок заданы. Найти пределы изменения одной из внешних нагрузок, действующей на конструкцию в условии равновесия.

План решения

1. Задаем направление возможного движения подвижной опоры, скользящей с трением. Прикладываем к этой опоре силу трения, направляя ее в сторону противоположную возможному движению. Предельное значение силы трения связываем с величиной нормальной реакции опоры N по формуле Кулона $F_{\text{тр}} = Nf$, где f — коэффициент трения, зависящий от свойств контактирующих материалов и заданный в условии задачи.

2. Решаем задачу о равновесии системы тел. Для этого разбиваем систему на две отдельные части, для которых составляем и решаем уравнения равновесия (§ 2.4, § 2.5). Из решения определяем предельное значение нагрузки для заданного направления скольжения опоры.

3. Меняем направление возможного движения системы и направление предельной силы трения. Предыдущий пункт плана выполняем заново и определяем другое предельное значение нагрузки. Два найденных значения нагрузки определяют ту область ее изменения, при которой конструкция находится в равновесии.

ПРИМЕР. Конструкция состоит из двух частей, шарнирно соединенных в точке C (рис. 52). Опора B представляет собой одностороннюю связь и допускает проскальзывание с коэффициентом трения $f = 0.2$, опора A — неподвижный шарнир. К конструкции приложена

пара сил с моментом $M = 10$ кНм, сила $Q = 10$ кН под углом $\alpha = 60^\circ$. Размеры даны в метрах. Найти пределы изменения нагрузки P , действующей под углом $\beta = 30^\circ$ на конструкцию, в условии равновесия.

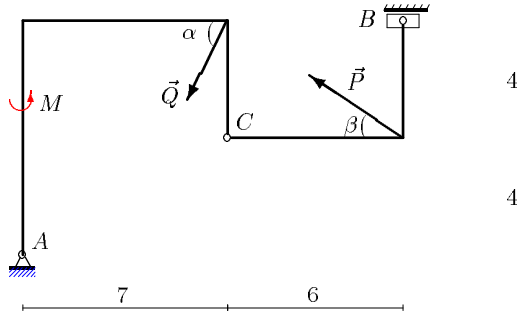


Рис. 52

РЕШЕНИЕ

1. Задаем направление возможного движения подвижной опоры, скользящей с трением. Предполагая возможное движение ползуна B влево, силу трения $\vec{F}_{\text{тр}}$ направим направо (рис. 53). Предельное значение силы трения связываем с нормальной реакцией опоры N по формуле Кулона:

$$F_{\text{тр}} = Nf, \quad (1)$$

где $f = 0.2$ — коэффициент трения.

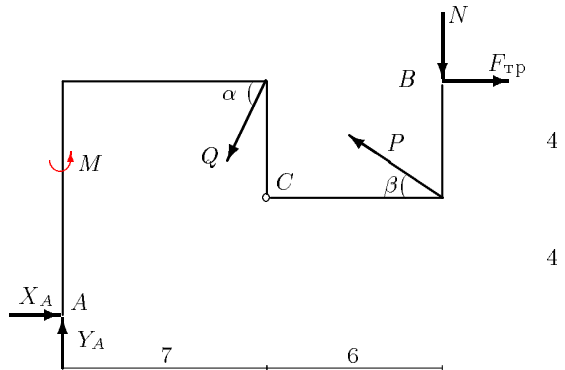


Рис. 53

2. Решаем задачу о равновесии системы тел. Для этого систему разбиваем по шарниру C на две отдельные части — AC и CB . Реакции шарнира C — X_C , Y_C для левой и правой части направлены в противоположные стороны (рис. 54). К точке A прикладываем две составляющие реакции неподвижного шарнира X_A , Y_A .

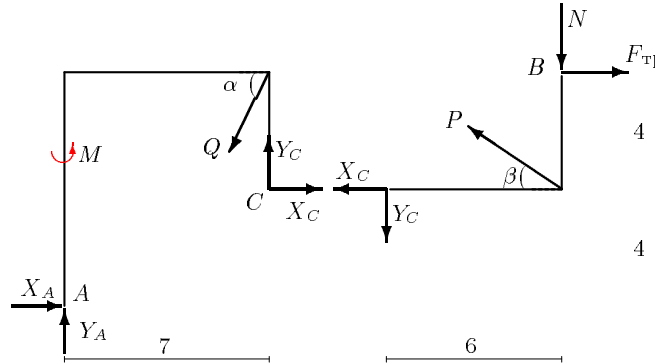


Рис. 54

Действие ползуна заменяем нормальной реакцией N , направленной вниз, так как ползун по условию задачи является односторонней связью, и силой трения $F_{\text{тр}}$. Из множества комбинаций уравнений равновесия (§ 2.4, с. 60) выберем уравнение моментов относительно точки A для всей системы в целом (рис. 53) и сумму моментов относительно C для правой части:

$$\begin{aligned} \sum M_A^{(\text{цел})} &= -N \cdot 13 - F_{\text{тр}} \cdot 8 + M - Q \cdot 7 \cdot \sin \alpha + \\ &\quad + Q \cdot 8 \cdot \cos \alpha + P(4 \cos \beta + 13 \sin \beta) = 0, \quad (2) \\ \sum M_C^{(\text{прав})} &= -N \cdot 6 - F_{\text{тр}} \cdot 4 + P \cdot 6 \sin \beta = 0. \end{aligned}$$

Уравнения (2) вместе с законом Кулона (1) образуют замкнутую систему трех линейных уравнений с тремя неизвестными N , $F_{\text{тр}}$, P . Решение системы имеет вид

$$N = \frac{3P}{6 + 4f}, \quad P = \frac{3 + 2f}{0.978 + 0.746f}. \quad (3)$$

При $f = 0.2$ получаем $P_1 = 3.015$ кН. Эта нагрузка для движения влево является предельной.

3. Меняем направление возможного движения системы и направление предельной силы трения. Пусть ползун B движется вправо. Силу $\vec{F}_{\text{тр}}$ направим в противоположную сторону. Очевидно, знак момента силы $\vec{F}_{\text{тр}}$ в уравнениях (2) изменится на противоположный, следовательно, решение для нового направления движения будет отличаться от (3) только знаком при f . Формально подставляя в (3) $f = -0.2$, получим $P_2 = 3.136$ кН. Значения P_1 и P_2 являются границами области равновесия.

Чтобы убедиться, что равновесие соответствует значениям нагрузки между этими числами, определим P при $f = 0$. Действительно, из (3) имеем $P_1 < P = 3.066$ кН $< P_2$.

Из выражения (3) для N также следует, что при $f = \pm 0.2$ нормальная реакция $N > 0$, поэтому отрыв ползуна B от поверхности невозможен. Таким образом, рама находится в равновесии при

$$P_{\min} \leq P \leq P_{\max},$$

где

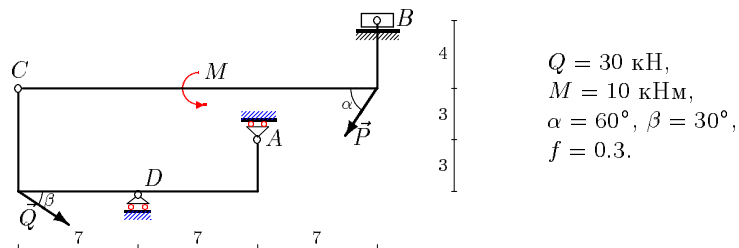
$$P_{\min} = 3.015 \text{ кН}, \quad P_{\max} = 3.136 \text{ кН}.$$

Этим нагрузкам соответствуют следующие значения нормальной реакции: $N_{(\min)} = 1.330$ кН, $N_{(\max)} = 1.806$ кН.

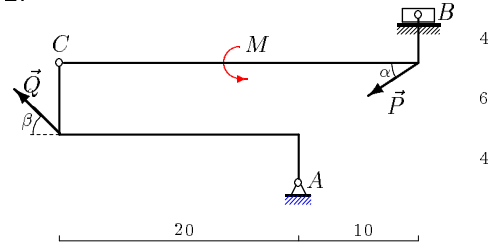
ЗАМЕЧАНИЕ. Неравенство $N_{(\min)} < N_{(\max)}$ не является обязательным.

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ. Конструкция состоит из двух шарнирно соединенных между собой тел. Опора B представляет собой одностороннюю связь и допускает проскальзывание с коэффициентом трения f . Найдите пределы изменения нагрузки P , действующей на конструкцию в условии равновесия (в кН). Размеры даны в метрах.

1.



2.



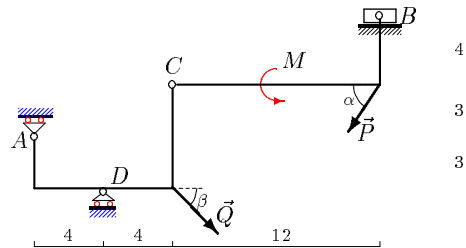
$$Q = 40 \text{ кН},$$

$$M = 20 \text{ кНм},$$

$$\alpha = 30^\circ, \beta = 45^\circ,$$

$$f = 0.1.$$

3.



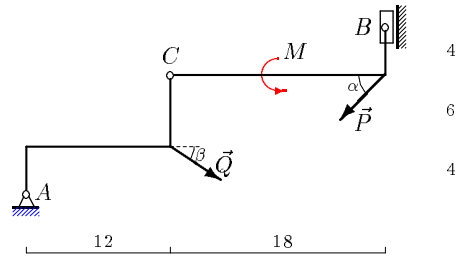
$$Q = 50 \text{ кН},$$

$$M = 30 \text{ кНм},$$

$$\alpha = 60^\circ, \beta = 45^\circ,$$

$$f = 0.3.$$

4.



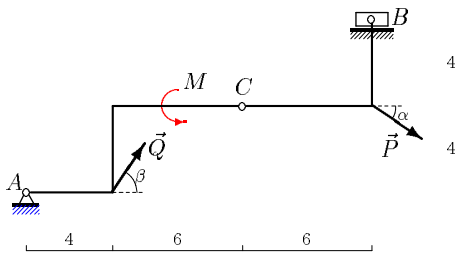
$$Q = 60 \text{ кН},$$

$$M = 40 \text{ кНм},$$

$$\alpha = 45^\circ, \beta = 30^\circ,$$

$$f = 0.1.$$

5.



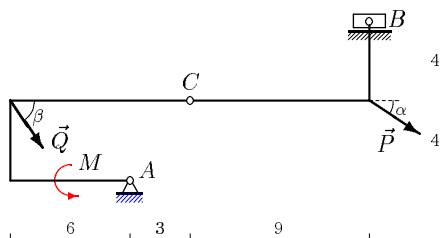
$$Q = 20 \text{ кН},$$

$$M = 70 \text{ кНм},$$

$$\alpha = 30^\circ, \beta = 60^\circ,$$

$$f = 0.1.$$

6.



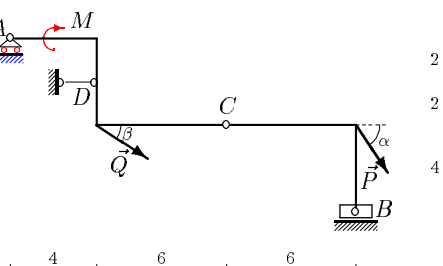
$$Q = 20 \text{ кН},$$

$$M = 70 \text{ кНм},$$

$$\alpha = 30^\circ, \beta = 60^\circ,$$

$$f = 0.1.$$

7.



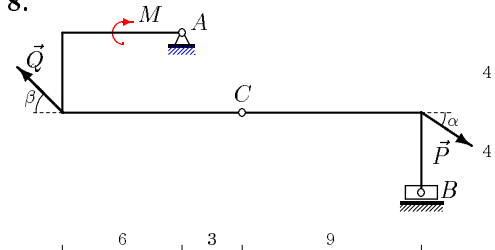
$$Q = 30 \text{ кН},$$

$$M = 80 \text{ кНм},$$

$$\alpha = 60^\circ, \beta = 30^\circ,$$

$$f = 0.07.$$

8.



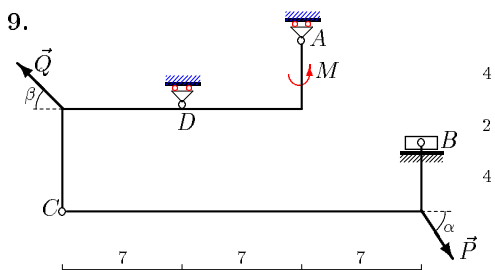
$$Q = 40 \text{ кН},$$

$$M = 90 \text{ кНм},$$

$$\alpha = 30^\circ, \beta = 45^\circ,$$

$$f = 0.1.$$

9.



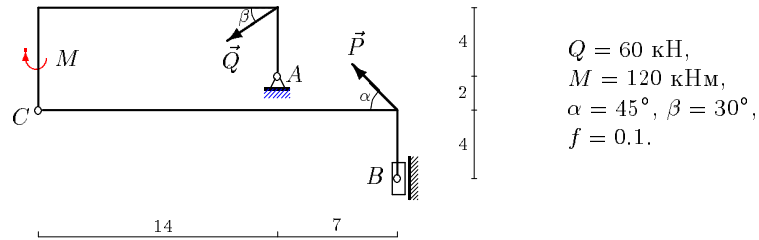
$$Q = 50 \text{ кН},$$

$$M = 100 \text{ кНм},$$

$$\alpha = 60^\circ, \beta = 45^\circ,$$

$$f = 0.3.$$

10.



Ответы

№	P_{\min}	$N_{(\min)}$	P_{\max}	$N_{(\max)}$
1	35.019	28.238	115.080	105.197
2	47.392	22.726	54.669	27.028
3	48.951	36.266	163.360	154.415
4	14.705	66.891	27.849	54.217
5	38.807	18.191	41.937	22.466
6	37.163	19.446	40.139	19.216
7	67.892	61.674	120.648	99.826
8	103.805	49.694	112.148	58.682
9	45.587	41.872	139.065	113.924
10	2.319	18.121	6.877	16.740

3.2. Трение качения

Постановка задачи. Система состоит из двух цилиндров, соединенных стержнем. Цилиндры могут кататься без проскальзывания, один цилиндр без — сопротивления, другой — с трением качения. В каких пределах меняется внешний момент, приложенный к одному из цилиндров, в условии равновесия системы?

Трение качения происходит за счет деформации цилиндра и опорной поверхности в месте контакта. В результате реакция опоры смещается в сторону возможного движения на половину длины площадки контакта и создает момент сопротивления. Плечо этого момента принимают за коэффициент трения качения. Таким образом, $M_{\text{тр}} = N\delta$, где N — реакция опоры, δ — коэффициент трения качения, имеющий размерность длины. Так в рамках теоретической механики, где изучается твердое тело, для объяснения явления трения качения вводят гипотезу деформируемости. Считают, что область деформаций

в теле мала, а глубиной продавливания цилиндра в поверхность (или величиной смятия цилиндра) пренебрегают. Коэффициент трения качения зависит не только от свойств материала цилиндра и поверхности, но и от радиуса цилиндра.

ПЛАН РЕШЕНИЯ

1. Задаем направление возможного движения при достижении условия предельного равновесия. К катящемуся телу (цилиндру, колесу) прикладываем момент трения качения, направляя его в сторону, противоположную возможному движению. Не забываем про силу сцепления в точке контакта, направленную вдоль плоскости.

2. Решаем задачу о равновесии системы тел. Используем метод разбиения системы на отдельные тела. Внешние и внутренние связи заменяем их реакциями. Составляем и решаем уравнения равновесия. Оси координат для уравнения проекций для цилиндрических тел выбираем вдоль нормальной реакции, а уравнение моментов составляем относительно точки касания. Из решения системы уравнений равновесия определяем условие предельного равновесия.

3. Меняем направление возможного движения системы и направление момента трения качения. Решаем задачу заново, определяем второе условие предельного равновесия.

ПРИМЕР. Система состоит из двух цилиндров весом $G_1 = 20$ Н, и $G_2 = 30$ Н с одинаковыми радиусами $R = 50$ см, соединенных однородным стержнем веса $G_3 = 40$ Н. Цилиндры могут кататься без проскальзывания, цилиндр 1 — без сопротивления, а цилиндр 2 — с трением качения.

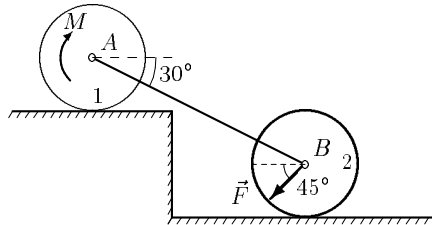


Рис. 55

Коэффициент трения качения $\delta = 2$ мм. К цилиндру 1 приложена пара с моментом M . К оси цилиндра 2 приложена наклонная сила $F = 10$ Н (рис. 55). В каких пределах меняется момент M в условии равновесия системы?

РЕШЕНИЕ

1. Задаем направление возможного движения при достижении условия предельного равновесия. Пусть за счет достаточно большой, по сравнению с моментом M , силы F произойдет движение системы влево. Тогда момент трения качения, приложенный к цилиндру 2, будет направлен по часовой стрелке (рис. 57). Его величину находим по формуле $M_{\text{тр}} = N_2 \cdot \delta$.

2. Решаем задачу о равновесии системы двух цилиндров и стержня. Разбиваем систему на три тела (рис. 56, 57, 58). Внешние связи заменяем реакциями $F_{\text{сц1}}$, N_1 , $F_{\text{сц2}}$, N_2 .

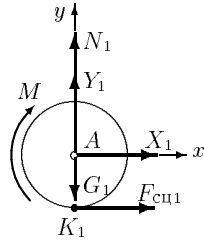


Рис. 56

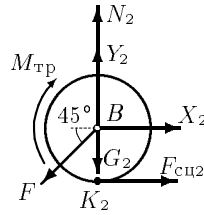


Рис. 57

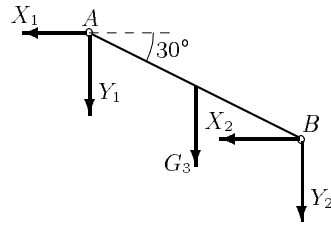


Рис. 58

Реакции $F_{\text{сц1}}$ и $F_{\text{сц2}}$ приложены к цилиндрам в точках их касания поверхностей, вызваны силами сцепления (трения) и обеспечивают вращение цилиндров. Реакции внутренних связей — X_1 , Y_1 , X_2 , Y_2 .

При составлении системы семи уравнений с неизвестными X_1 , Y_1 , N_1 , X_2 , Y_2 , N_2 , M избегаем уравнения, в которые входят неизвестные реакции $F_{\text{сц1}}$ и $F_{\text{сц2}}$.

Составляем уравнения равновесия для цилиндра 1 (рис. 56):

$$\begin{aligned} \sum Y_i^{(\text{цил1})} &= Y_1 + N_1 - G_1 = 0, \\ \sum M_{K_1}^{(\text{цил1})} &= -X_1 \cdot R - M = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Уравнения равновесия цилиндра 2 (рис. 57) имеют вид

$$\begin{aligned} \sum Y_i^{(\text{цил2})} &= Y_2 + N_2 - G_2 - F \sin 45^\circ = 0, \\ \sum M_{K_2}^{(\text{цил2})} &= -X_2 \cdot R - M_{\text{тр}} + F \cos 45^\circ R = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Уравнения равновесия стержня АВ (рис. 58) имеют вид

$$\begin{aligned}\sum X_i^{(\text{стерж})} &= -X_1 - X_2 = 0, \\ \sum Y_i^{(\text{стерж})} &= -Y_1 - Y_2 - G_3 = 0, \\ \sum M_A^{(\text{стерж})} &= -X_2 \cdot AB \sin 30^\circ - Y_2 \cdot AB \cos 30^\circ - \\ &\quad - G_3(AB/2) \cos 30^\circ = 0.\end{aligned}\quad (3)$$

Из решения системы уравнений (1-3) определяем

$$M = \frac{\sqrt{3}R FR\sqrt{2} - \delta(G_3 + 2G_2 + F\sqrt{2})}{2R\sqrt{3} + \delta}.\quad (4)$$

Радиус и коэффициент трения качения переводим в метры $R = 0.5$ м, $\delta = 0.002$ м. Получаем $M = 3.414$ Нм. Вычисляем нормальные реакции опор:

$$N_1 = 36.058 \text{ Н}, \quad N_2 = 61.013 \text{ Н}.$$

Убеждаемся, что $N_1 > 0$ и $N_2 > 0$, что соответствует наличию опоры. Если реакция опоры равна нулю, то это означает отрыв тела от поверхности, отрицательной реакции опоры $N \leq 0$ в задаче с односторонней связью не существует (физически не реализуется).

3. Меняем направление возможного движения системы. Пусть за счет действия момента M произойдет движение системы вправо. Момент трения качения направим против часовой стрелки (рис. 59). Составляя уравнения равновесия для новой системы сил, заметим,

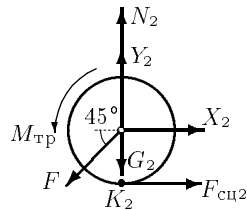


Рис. 59

что отличие от прежней системы проявляется только в знаке $M_{\text{тр}}$ во втором уравнении равновесия (2). Так как $M_{\text{тр}} = N_2 \cdot \delta$, то новое решение для M будет формально отличаться от (4) только знаком у коэффициента трения δ . Поэтому, не решая (и даже не составляя) системы уравнений равновесия типа (1-3) для нового направления возможного движения, записываем ответ, изменяя знаки у δ в (4):

$$M = \frac{\sqrt{3}R FR\sqrt{2} + \delta(G_3 + 2G_2 + F\sqrt{2})}{2R\sqrt{3} - \delta} = 3.658 \text{ Нм}.\quad (5)$$

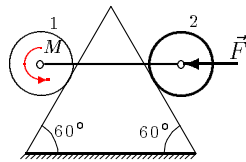
Точно так же находим нормальные реакции опор: $N_1 = 35.776$ Н, $N_2 = 61.295$ Н. При равновесии системы момент, приложенный к

цилиндру 1, изменяется в пределах (в Нм) *)

$$3.414 \leq M \leq 3.658.$$

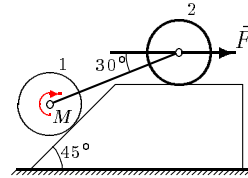
УСЛОВИЯ ЗАДАЧ. Система состоит из двух цилиндров весом G_1 и G_2 с одинаковыми радиусами R , соединенных однородным стержнем весом G_3 . Цилиндры могут кататься без проскальзывания, цилиндр 1 без сопротивления, а цилиндр 2 с трением качения (δ). В каких пределах меняется внешний момент M при условии равновесия системы?

1.



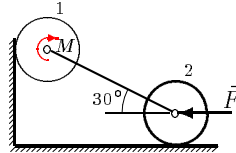
$$G_1 = 10 \text{ Н}, G_2 = 23 \text{ Н}, G_3 = 30 \text{ Н}, \\ F = 5 \text{ Н}, R = 35 \text{ см}, \delta = 3 \text{ мм}.$$

2.



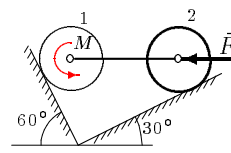
$$G_1 = 22 \text{ Н}, G_2 = 23 \text{ Н}, G_3 = 50 \text{ Н}, \\ F = 10 \text{ Н}, R = 50 \text{ см}, \delta = 4 \text{ мм}.$$

3.



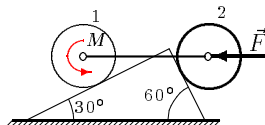
$$G_1 = 5 \text{ Н}, G_2 = 25 \text{ Н}, G_3 = 10 \text{ Н}, \\ F = 30 \text{ Н}, R = 65 \text{ см}, \delta = 5 \text{ мм}.$$

4.



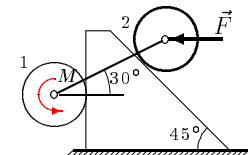
$$G_1 = 24 \text{ Н}, G_2 = 27 \text{ Н}, G_3 = 20 \text{ Н}, \\ F = 20 \text{ Н}, R = 50 \text{ см}, \delta = 3 \text{ мм}.$$

5.



$$G_1 = 25 \text{ Н}, G_2 = 29 \text{ Н}, G_3 = 30 \text{ Н}, \\ F = 25 \text{ Н}, R = 35 \text{ см}, \delta = 1 \text{ мм}.$$

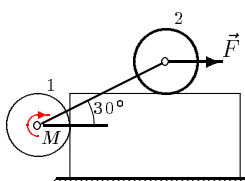
6.



$$G_1 = 21 \text{ Н}, G_2 = 26 \text{ Н}, G_3 = 40 \text{ Н}, \\ F = 5 \text{ Н}, R = 25 \text{ см}, \delta = 2 \text{ мм}.$$

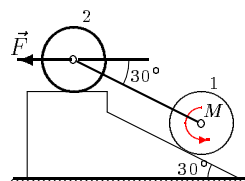
*) В задачах, где допускается проскальзывание, необходимо находить также силы $F_{\text{сц1}}$ и $F_{\text{сц2}}$ и проверять условие проскальзывания $F_{\text{сц1}} = F_{\text{тр1}} < fN_1$, $F_{\text{сц2}} = F_{\text{тр2}} < fN_2$, где f — коэффициент трения скольжения.

7.



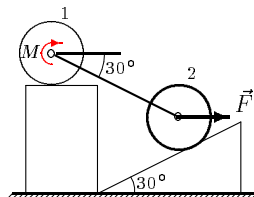
$$G_1 = 22 \text{ Н}, G_2 = 24 \text{ Н}, G_3 = 50 \text{ Н}, \\ F = 10 \text{ Н}, R = 40 \text{ см}, \delta = 3 \text{ мм}.$$

8.



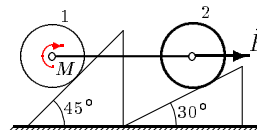
$$G_1 = 23 \text{ Н}, G_2 = 24 \text{ Н}, G_3 = 30 \text{ Н}, \\ F = 15 \text{ Н}, R = 55 \text{ см}, \delta = 4 \text{ мм}.$$

9.



$$G_1 = 24 \text{ Н}, G_2 = 26 \text{ Н}, G_3 = 50 \text{ Н}, \\ F = 20 \text{ Н}, R = 70 \text{ см}, \delta = 5 \text{ мм}.$$

10.



$$G_1 = 25 \text{ Н}, G_2 = 28 \text{ Н}, G_3 = 10 \text{ Н}, \\ F = 25 \text{ Н}, R = 35 \text{ см}, \delta = 1 \text{ мм}.$$

Ответы

№	Движение цилиндра 2 по часовой стрелке			Движение цилиндра 2 против часовой стрелки		
	N_1	N_2	M	N_1	N_2	M
	Н		Нм	Н		Нм
1	64.058	74.888	2.841	66.315	77.145	3.297
2	36.095	53.526	11.279	36.352	54.023	10.799
3	30.366	47.532	4.896	29.638	47.111	4.622
4	53.078	42.872	4.308	52.565	42.576	4.456
5	59.996	87.567	8.371	60.499	88.438	8.675
6	93.257	140.078	3.211	100.988	148.699	4.326
7	9.591	54.537	16.585	10.413	55.012	16.395
8	32.909	47.861	0.703	32.909	47.461	1.143
9	40.326	69.191	10.516	41.303	67.500	9.333
10	25.330	38.168	5.984	25.507	38.042	5.922

Глава 4

ПРОСТРАНСТВЕННАЯ СИСТЕМА СИЛ

4.1. Пространственная ферма

Постановка задачи. *Определить усилия в стержнях пространственной фермы, нагруженной в одном узле силами.*

ПЛАН РЕШЕНИЯ

Задача является естественным обобщением задачи § 1.1, с. 14, в которой методом вырезания узлов определялись усилия в простейшей плоской ферме. Этот же метод применим и здесь, единственное отличие — вместо двух уравнений равновесия узла в проекциях на оси в пространственной задаче будет три уравнения.

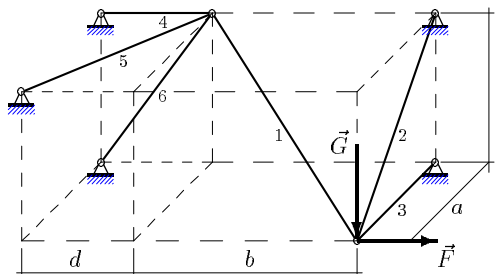


Рис. 60

1. Узлы фермы находятся в равновесии. Вырезаем узлы, заменяя действие стержней их реакциями. Реакцию незагруженного стержня направляем вдоль его оси. Используя правило знаков, согласно которому усилие растянутого стержня считается положительным, реакцию каждого стержня направляем из шарнира по направлению внешней нормали сечения стержня. Расчет начинаем с узла, к которому подходят три стержня с неизвестными усилиями.

2. Для каждого из шарниров составляем по три уравнения равновесия в проекциях. Решаем полученную систему.

ПРИМЕР. Найти усилия в стержнях 1–6 пространственной фермы, нагруженной в одном узле вертикальной силой $G = 100$ кН и горизонтальной $F = 40$ кН. Даны размеры $a = 12$ м, $b = 16$ м, $c = 10$ м, $d = 5$ м (рис. 60).

РЕШЕНИЕ

1. Узлы A и B находятся в равновесии. Вырезаем эти узлы, заменяя действие стержней их реакциями, направленными из узла к стержню (рис. 61).

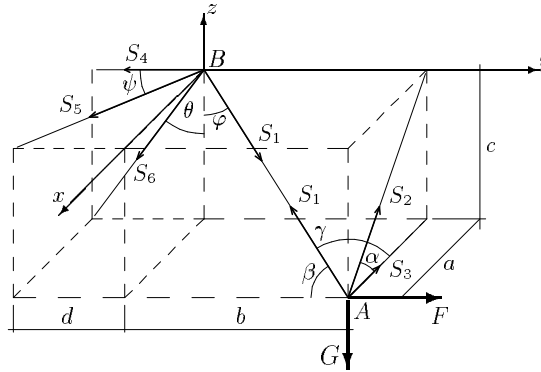


Рис. 61

Стержень 1 является общим для обоих узлов, поэтому на рисунке есть два противоположно направленных вектора с усилием S_1 . Один вектор приложен к узлу A , другой — к узлу B .

2. Расчет начинаем с узла A , к которому подходят три стержня с неизвестными усилиями. Составляем уравнения равновесия узла в проекциях на три оси координат:

$$\begin{aligned} \sum X_i &= -S_1 \cos \gamma - S_2 \cos \alpha - S_3 = 0, \\ \sum Y_i &= -S_1 \cos \beta + F = 0, \\ \sum Z_i &= S_1 \cos \varphi + S_2 \sin \alpha - G = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Система уравнений (1) содержит три неизвестных усилия S_1, S_2, S_3 .

Вычисляем тригонометрические функции, входящие в уравнения,

$$\begin{aligned}\sin \alpha &= \frac{c}{\sqrt{a^2 + c^2}} = 0.640, & \cos \alpha &= \frac{a}{\sqrt{a^2 + c^2}} = 0.768, \\ \cos \beta &= \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = 0.716, & \cos \gamma &= \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = 0.537, \\ \cos \varphi &= \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = 0.447.\end{aligned}$$

Решение системы (1):

$$S_1 = 55.902 \text{ кН}, \quad S_2 = 117.154 \text{ кН}, \quad S_3 = -120 \text{ кН}.$$

Знаки найденных усилий показывают, что стержни 1 и 2 растянуты, а стержень 3 сжат. Составляем уравнения равновесия узла B:

$$\begin{aligned}\sum X_i &= S_1 \cos \gamma + S_5 \sin \psi = 0, \\ \sum Y_i &= S_1 \cos \beta - S_4 - S_5 \cos \psi - S_6 \sin \theta = 0, \\ \sum Z_i &= -S_1 \cos \varphi - S_6 \cos \theta = 0.\end{aligned}\tag{2}$$

Уравнения (2) содержат три неизвестных усилия S_4, S_5, S_6 , усилие S_1 найдено ранее из условия равновесия узла A. Вычисляем необходимые тригонометрические функции:

$$\begin{aligned}\sin \psi &= \frac{a}{\sqrt{a^2 + d^2}} = 0.923, & \cos \psi &= \frac{d}{\sqrt{a^2 + d^2}} = 0.385, \\ \sin \theta &= \frac{d}{\sqrt{d^2 + c^2}} = 0.447, & \cos \theta &= \frac{c}{\sqrt{d^2 + c^2}} = 0.894.\end{aligned}$$

Решение системы (2):

$$S_4 = 65 \text{ кН}, \quad S_5 = -32.5 \text{ кН}, \quad S_6 = -27.951 \text{ кН}.$$

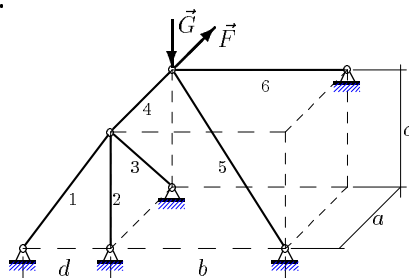
Знаки найденных усилий показывают, что стержни 5 и 6 сжаты, а стержень 4 растянут.

Результаты расчета (в кН) заносим в таблицу:

S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6
55.902	117.154	-120.000	65.000	-32.500	-27.951

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ. Найти усилия в стержнях 1–6 пространственной фермы, нагруженной в одном узле вертикальной силой \vec{G} и горизонтальной \vec{F} . Ответ выразить в кН.

1.

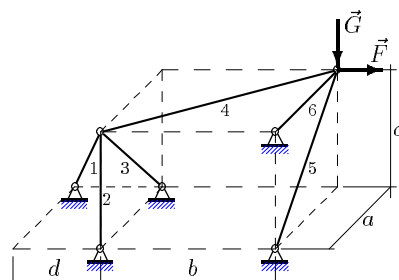


$$a = 2 \text{ м}, b = 3 \text{ м},$$

$$c = 4 \text{ м}, d = 3 \text{ м},$$

$$G = 2 \text{ кН}, F = 1 \text{ кН}.$$

2.

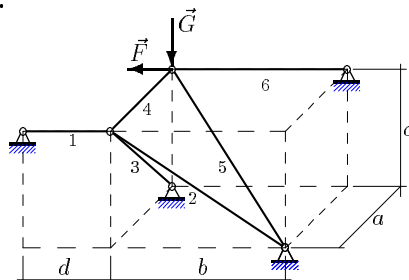


$$a = 4 \text{ м}, b = 6 \text{ м},$$

$$c = 5 \text{ м}, d = 4 \text{ м},$$

$$G = 7 \text{ кН}, F = 6 \text{ кН}.$$

3.

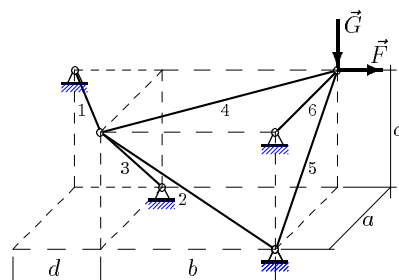


$$a = 5 \text{ м}, b = 4 \text{ м},$$

$$c = 3 \text{ м}, d = 2 \text{ м},$$

$$G = 4 \text{ кН}, F = 2 \text{ кН}.$$

4.

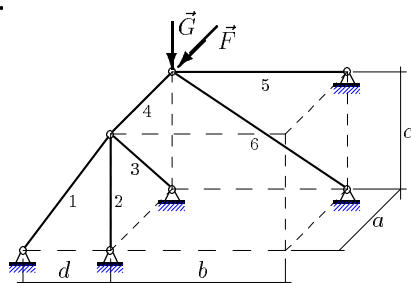


$$a = 7 \text{ м}, b = 6 \text{ м},$$

$$c = 5 \text{ м}, d = 4 \text{ м},$$

$$G = 6 \text{ кН}, F = 4 \text{ кН}.$$

5.

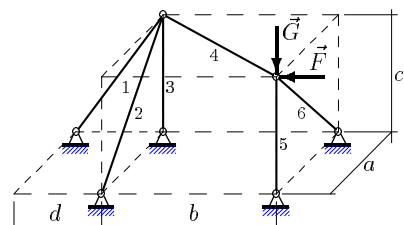


$$a = 2 \text{ м}, b = 3 \text{ м},$$

$$c = 4 \text{ м}, d = 3 \text{ м},$$

$$G = 8 \text{ кН}, F = 5 \text{ кН}.$$

6.

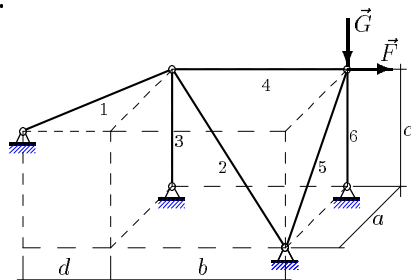


$$a = 4 \text{ м}, b = 6 \text{ м},$$

$$c = 5 \text{ м}, d = 3 \text{ м},$$

$$G = 6 \text{ кН}, F = 3 \text{ кН}.$$

7.

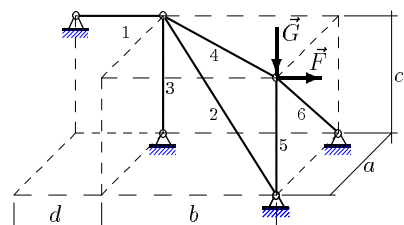


$$a = 5 \text{ м}, b = 4 \text{ м},$$

$$c = 3 \text{ м}, d = 1 \text{ м},$$

$$G = 8 \text{ кН}, F = 4 \text{ кН}.$$

8.

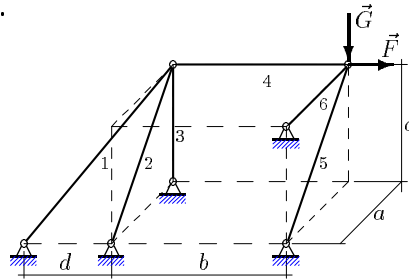


$$a = 7 \text{ м}, b = 6 \text{ м},$$

$$c = 5 \text{ м}, d = 3 \text{ м},$$

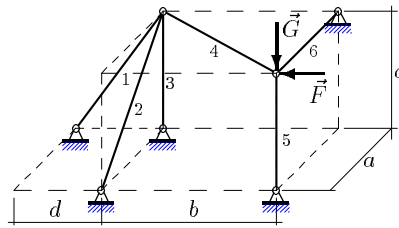
$$G = 7 \text{ кН}, F = 3 \text{ кН}.$$

9.



$$a = 2 \text{ м}, b = 3 \text{ м}, \\ c = 4 \text{ м}, d = 2 \text{ м}, \\ G = 9 \text{ кН}, F = 8 \text{ кН}.$$

10.



$$a = 4 \text{ м}, b = 6 \text{ м}, \\ c = 5 \text{ м}, d = 3 \text{ м}, \\ G = 8 \text{ кН}, F = 7 \text{ кН}.$$

Ответы

№	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6
1	0.000	4.000	-4.472	2.000	-2.693	1.500
2	11.325	5.000	-16.008	7.211	-8.964	1.600
3	5.333	6.667	-7.775	6.667	-9.428	7.333
4	-32.249	-26.034	28.674	6.146	-10.323	3.733
5	0.000	-10.000	11.180	-5.000	6.000	-10.000
6	-5.831	3.202	2.500	-3.606	-8.500	3.202
7	4.079	-5.657	2.400	4.000	0.000	-8.000
8	0.000	-5.244	2.500	4.610	-4.500	-4.301
9	19.596	-17.889	0.000	8.000	-10.062	4.500
10	-13.606	7.470	5.833	-8.413	-8.000	4.667

4.2. Момент силы относительно оси

Постановка задачи. В декартовой системе координат задан вектор силы. Найти моменты силы относительно осей координат.

План решения

1. Определяем радиус-вектор \vec{r}_0 точки приложения силы.

2. Находим момент силы относительно начала координат как векторное произведение $\vec{M}_0 = \vec{r}_0 \times \vec{F}$. Моменты силы относительно осей x, y, z являются компонентами M_{0x}, M_{0y}, M_{0z} вектора \vec{M}_0 *) .

ПРИМЕР. В декартовой системе координат задан вектор силы \vec{F} (рис. 62); $F = 20$ Н, $a = 6$ м, $b = 11$ м, $c = 8$ м. Найти моменты силы относительно осей координат x, y, z .

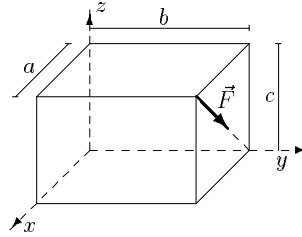


Рис. 62

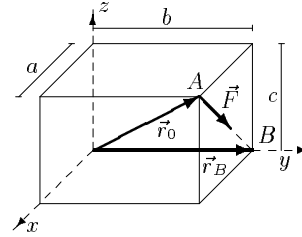


Рис. 63

РЕШЕНИЕ

1. Определяем радиус-вектор \vec{r}_0 точки приложения силы относительно начала координат (рис. 63): $\vec{r}_0 = \{a, b, c\}$.

2. Находим момент силы относительно начала координат:

$$\vec{M}_0 = \vec{r}_0 \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & b & c \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix},$$

где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ — орты осей x, y, z . Так как в явном виде компоненты вектора \vec{F} не заданы, а известна длина вектора и линия AB его действия, представляем \vec{F} в виде $\vec{F} = F \vec{AB}/|AB|$. Вектор \vec{AB} вычисляем как разность $\vec{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_0 = \{-a, 0, -c\}$. Длина вектора $|AB| = \sqrt{a^2 + c^2}$. В результате получаем

$$\vec{F} = \frac{F}{\sqrt{a^2 + c^2}} \{-a, 0, -c\}.$$

Находим компоненты M_{0x}, M_{0y}, M_{0z} вектора \vec{M}_0 :

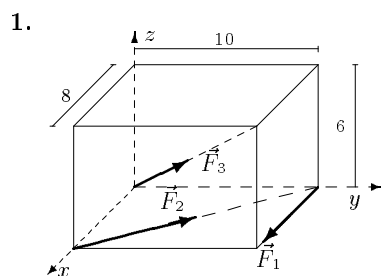
$$M_{0x} = bF_z - cF_y = -cbF/\sqrt{a^2 + c^2} = -176 \text{ Нм},$$

$$M_{0y} = cF_x - aF_z = (-caF + acF)/\sqrt{a^2 + c^2} = 0,$$

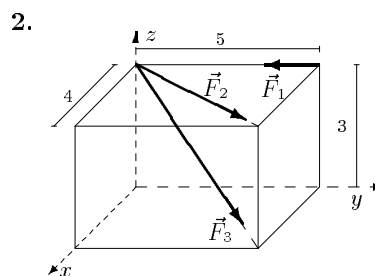
$$M_{0z} = aF_y - bF_x = abF/\sqrt{a^2 + c^2} = 132 \text{ Нм}.$$

*) Модуль вектора момента силы \vec{F} относительно начала координат: $M_0 = \sqrt{M_{0x}^2 + M_{0y}^2 + M_{0z}^2}$.

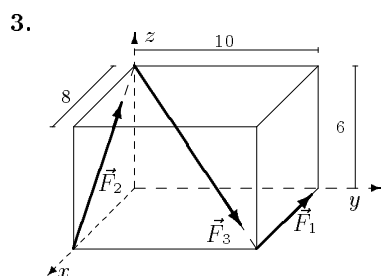
УСЛОВИЯ ЗАДАЧ. В декартовой системе координат даны три силы, приложенные к вершинам параллелепипеда. Найти моменты этих сил относительно осей координат (в Нм). Размеры на рисунках в метрах, силы — в Н.



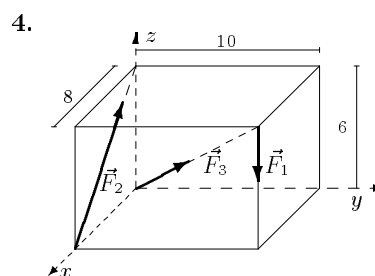
$$F_1 = 1, F_2 = 2, F_3 = 4.$$



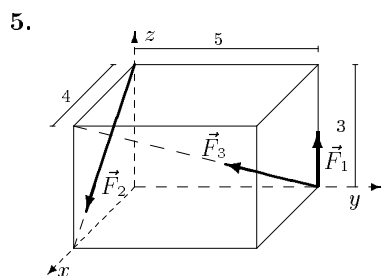
$$F_1 = 2, F_2 = 2, F_3 = 5.$$



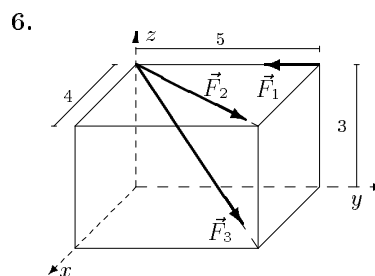
$$F_1 = 3, F_2 = 4, F_3 = 6.$$



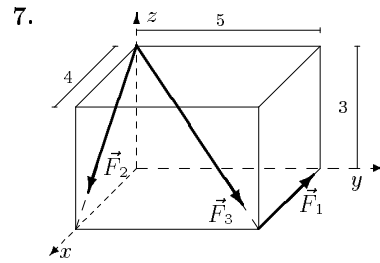
$$F_1 = 4, F_2 = 5, F_3 = 6.$$



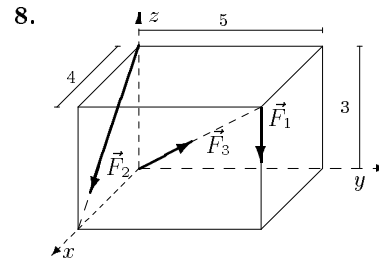
$$F_1 = 1, F_2 = 1, F_3 = 2.$$



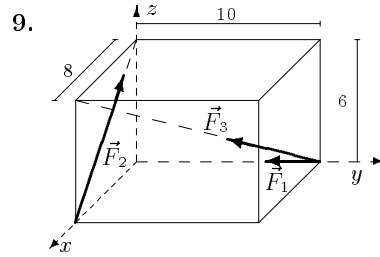
$$F_1 = 2, F_2 = 2, F_3 = 5.$$



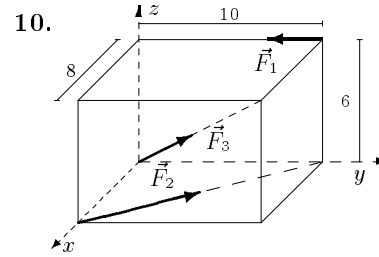
$$F_1 = 3, F_2 = 3, F_3 = 5.$$



$$F_1 = 4, F_2 = 4, F_3 = 5.$$



$$F_1 = 1, F_2 = 2, F_3 = 5.$$



$$F_1 = 2, F_2 = 3, F_3 = 6.$$

Ответы

№	M_{1x}	M_{1y}	M_{1z}	M_{2x}	M_{2y}	M_{2z}	M_{3x}	M_{3y}	M_{3z}
1	0.000	0.000	-10.000	0.000	0.000	12.494	0.000	0.000	0.000
2	6.000	0.000	0.000	-4.685	3.748	0.000	-10.607	8.485	0.000
3	0.000	0.000	30.000	0.000	-19.200	0.000	-25.456	20.365	0.000
4	-40.000	32.000	0.000	0.000	-24.000	0.000	0.000	0.000	0.000
5	5.000	0.000	0.000	0.000	2.400	0.000	4.243	0.000	-5.657
6	6.000	0.000	0.000	-4.685	3.748	0.000	-10.607	8.485	0.000
7	0.000	0.000	15.000	0.000	7.200	0.000	-10.607	8.485	0.000
8	-20.000	16.000	0.000	0.000	9.600	0.000	0.000	0.000	0.000
9	0.000	0.000	0.000	0.000	-9.600	0.000	21.213	0.000	-28.284
10	12.000	0.000	0.000	0.000	0.000	18.741	0.000	0.000	0.000

4.3. Равновесие вала

Постановка задачи. Горизонтальный вал может вращаться в цилиндрических шарнирах. К одному шкиву вала приложено нормальное давление и касательная сила сопротивления, пропорциональная давлению. На шкивы вала действуют известные нагрузки. Найти силу давления и реакции шарниров при условии равновесия вала.

ПЛАН РЕШЕНИЯ

1. Действие каждой из опор заменяем двумя взаимно перпендикулярными реакциями, лежащими в плоскости, перпендикулярной валу.

2. Для определения силы давления составляем уравнение моментов относительно оси вала. Момент силы натяжения ремня, нити и т.п. (наклонной или нет) вычисляем как произведение величины силы на соответствующий радиус со знаком, соответствующим направлению вращения вокруг вала. Уравнение содержит одну неизвестную, которую легко найти.

3. Определяем вертикальные реакции опор вала. Для этого составляем два уравнения моментов относительно осей, совпадающих с линиями действия горизонтальных реакций шарниров. Решаем эти уравнения.

4. Проверяем найденные реакции, составляя уравнение равновесия в проекции на вертикаль.

5. Определяем горизонтальные реакции опор вала. Для этого составляем два уравнения моментов относительно осей, совпадающих с линиями действия вертикальных реакций шарниров.

6. Проверяем горизонтальные реакции, составляя уравнение равновесия в проекции на ось вдоль линии действия горизонтальных реакций.

ПРИМЕР. Горизонтальный вал весом $G = 15$ Н может вращаться в цилиндрических шарнирах A и B (рис. 64). К шкиву 1 приложено нормальное давление N и касательная сила сопротивления $F = 0.1N$.

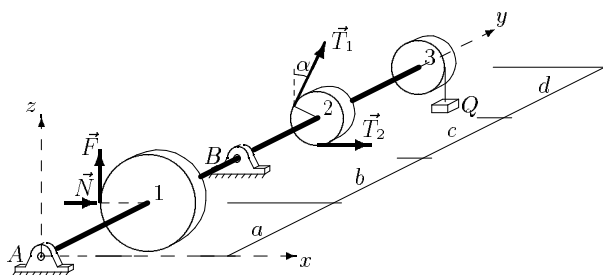


Рис. 64

На шкив 2 действуют силы натяжения ремней $T_1 = 30$ Н, $T_2 = 57$ Н. Груз $Q = 18$ Н висит на нити, навитой на шкив 3. Определить силу давления N и реакции шарниров в условии равновесия вала. Учесть веса шкивов: $P_1 = 35$ Н, $P_2 = 10$ Н, $P_3 = 15$ Н. Все нагрузки

действуют в вертикальных плоскостях. Известны радиусы шкивов, $R_1 = 26$ см, $R_2 = 10$ см, $R_3 = 11$ см и расстояния между характерными точками вала: $a = 22$ см, $b = 25$ см, $c = 26$ см, $d = 26$ см. Общая длина вала $L = a + b + c + d$; $\alpha = 30^\circ$.

РЕШЕНИЕ

1. Действие цилиндрических опор A и B заменим реакциями Z_A , X_A и Z_B , X_B (рис. 65). Вес вала \vec{G} приложим в центре. Вес груза изобразим вектором \vec{Q} .

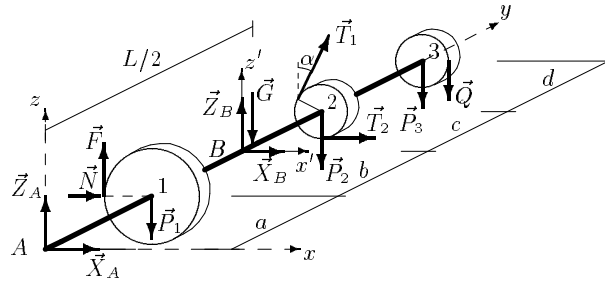


Рис. 65

2. Для определения силы давления составляем уравнение моментов относительно оси вала:

$$\sum M_y = FR_1 + (T_1 - T_2)R_2 + QR_3 = 0.$$

Уравнение содержит одну неизвестную F . Линии действия остальных сил пересекают ось y , и их моменты относительно оси вала равны нулю.

Из полученного уравнения находим

$$F = -\frac{(T_1 - T_2)R_2 + QR_3}{R_1} = 2.7692 \text{ Н.}$$

По условию $N = F/0.1 = 27.692$ Н.

3. Определяем вертикальные реакции шарнирных опор вала. Для этого составляем два уравнения моментов относительно горизонтальных осей, проходящих через шарниры A и B . Рассматриваем для удобства проекцию всех сил на плоскость zy (рис. 66). Таким образом, вычисление моментов относительно осей сводим к плоской задаче вычисления моментов относительно точек A и B .

Знаки моментов сил определяем как в задачах плоской статики: момент силы, вращающей тело вокруг моментной точки против ча-

совой стрелки, считается положительным, по часовой стрелке — отрицательным. Моменты сил, перпендикулярных плоскости zy (и поэтому не изображенных на рис. 66), относительно любой ее точки равны нулю.

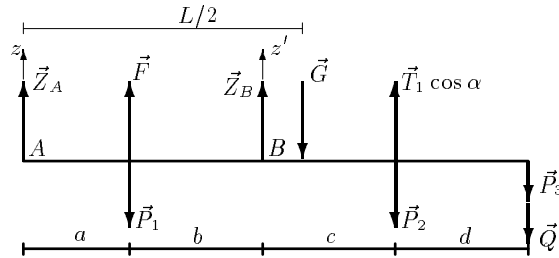


Рис. 66

Решая уравнения

$$\begin{aligned} \sum M_{x(A)} &= (F - P_1)a + Z_B(a + b) + (T_1 \cos \alpha - P_2)(a + b + c) - \\ &\quad - GL/2 - (P_3 + Q)(a + b + c + d) = 0, \\ \sum M_{x'(B)} &= -Z_A(a + b) + (P_1 - F)b - G(L/2 - a - b) + \\ &\quad + (T_1 \cos \alpha - P_2)c - (P_3 + Q)(c + d) = 0, \end{aligned}$$

находим $Z_A = -11.324$ Н, $Z_B = 75.574$ Н.

4. Проверяем правильность нахождения вертикальных реакций, составляя уравнение равновесия в проекции на ось z (рис. 66):

$$\begin{aligned} \sum Z_i &= Z_A + F - P_1 + Z_B - G + T_1 \cos \alpha - P_2 - P_3 - Q = \\ &= -11.324 + 2.769 - 35 + 75.574 - 15 + 30 \cdot 0.866 - 10 - 15 - 18 = 0. \end{aligned}$$

5. Определяем горизонтальные реакции опор вала. Для этого составляем два уравнения моментов относительно осей, совпадающих с линиями действия вертикальных реакций шарниров. Рассматриваем горизонтальную проекцию силовой схемы (рис. 67):

$$\begin{aligned} \sum M_{z(A)} &= -N \cdot a - X_B(a + b) - (T_1 \sin \alpha + T_2)(a + b + c) = 0, \\ \sum M_{z'(B)} &= X_A(a + b) + Nb - (T_1 \sin \alpha + T_2)c = 0. \end{aligned}$$

Решая уравнения, находим $X_A = 25.100$ Н, $X_B = -124.792$ Н.

6. Проверяем правильность нахождения горизонтальных реакций, составляя уравнение равновесия в проекции на ось x вдоль линии

действия горизонтальных реакций:

$$\begin{aligned}\sum X_i &= X_A + N + X_B + T_1 \sin \alpha + T_2 = \\ &= 25.1 + 27.692 - 124.792 + 15 + 57 = 0.\end{aligned}$$

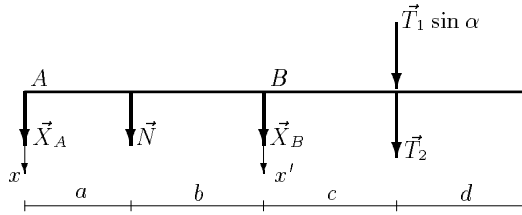


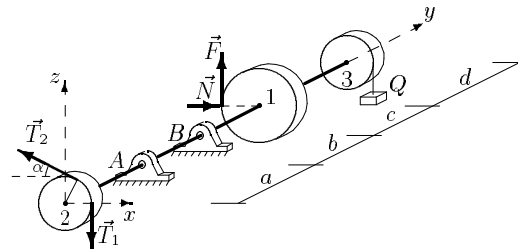
Рис. 67

Результаты расчетов в Н заносим в таблицу:

N	X_A	Z_A	X_B	Z_B
27.692	25.100	-11.324	-124.792	75.574

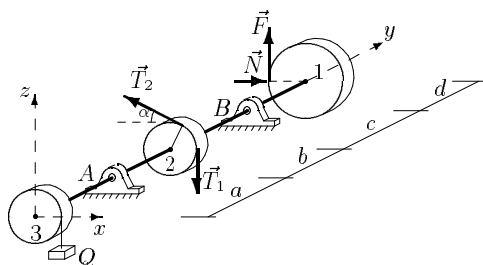
УСЛОВИЯ ЗАДАЧ. Горизонтальный вал весом G может вращаться в цилиндрических шарнирах A и B . К шкиву 1 приложено нормальное давление N и касательная сила сопротивления F , пропорциональная N . На шкив 2 действуют силы натяжения ремней T_1 и T_2 . Груз Q висит на нити, навитой на шкив 3. Определить силу давления N и реакции шарниров в условии равновесия вала (в H). Учесть веса шкивов P_1, P_2, P_3 . Все нагрузки действуют в вертикальной плоскости. Силы даны в H , размеры — в см.

1.



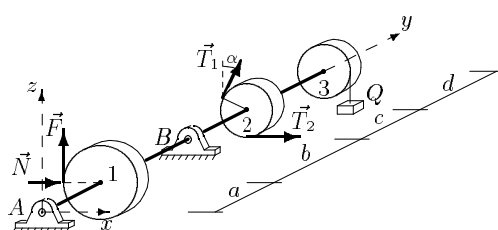
$$\begin{aligned}F &= 0.1N, T_1 = 50, \\ T_2 &= 97, P_1 = 16, \\ P_2 &= 10, P_3 = 14, \\ Q &= 18, G = 25, \\ \alpha &= 30^\circ, R_1 = 14, \\ R_2 &= 8, R_3 = 9, \\ a &= 22, b = 25, \\ c &= 26, d = 23.\end{aligned}$$

2.



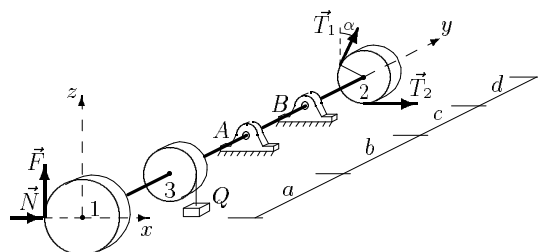
$$\begin{aligned}
 F &= 0.2N, T_1 = 70, \\
 T_2 &= 136, P_1 = 36, \\
 P_2 &= 30, P_3 = 34, \\
 Q &= 22, G = 35, \\
 \alpha &= 60^\circ, R_1 = 18, \\
 R_2 &= 12, R_3 = 13, \\
 a &= 22, b = 26, \\
 c &= 29, d = 23.
 \end{aligned}$$

3.



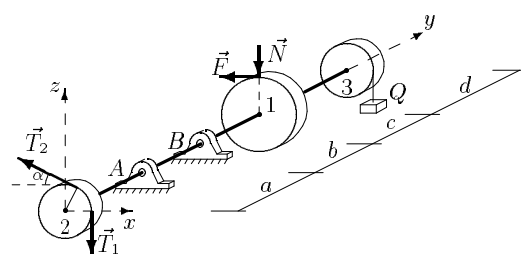
$$\begin{aligned}
 F &= 0.2N, T_1 = 30, \\
 T_2 &= 56, P_1 = 22, \\
 P_2 &= 10, P_3 = 14, \\
 Q &= 22, G = 15, \\
 \alpha &= 30^\circ, R_1 = 26, \\
 R_2 &= 8, R_3 = 9, \\
 a &= 22, b = 26, \\
 c &= 27, d = 26.
 \end{aligned}$$

4.



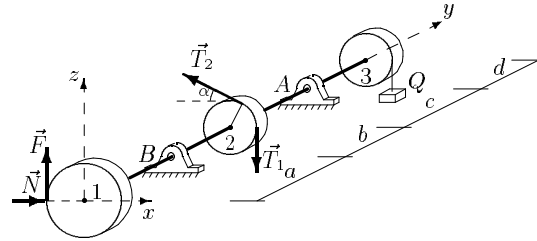
$$\begin{aligned}
 F &= 0.4N, T_1 = 60, \\
 T_2 &= 117, P_1 = 26, \\
 P_2 &= 10, P_3 = 18, \\
 Q &= 18, G = 30, \\
 \alpha &= 30^\circ, R_1 = 26, \\
 R_2 &= 8, R_3 = 10, \\
 a &= 24, b = 27, \\
 c &= 28, d = 28.
 \end{aligned}$$

5.



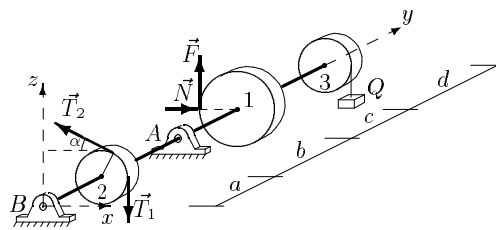
$$\begin{aligned}
 F &= 0.1N, T_1 = 50, \\
 T_2 &= 26, P_1 = 26, \\
 P_2 &= 20, P_3 = 24, \\
 Q &= 10, G = 25, \\
 \alpha &= 45^\circ, R_1 = 16, \\
 R_2 &= 10, R_3 = 11, \\
 a &= 22, b = 23, \\
 c &= 25, d = 23.
 \end{aligned}$$

6.



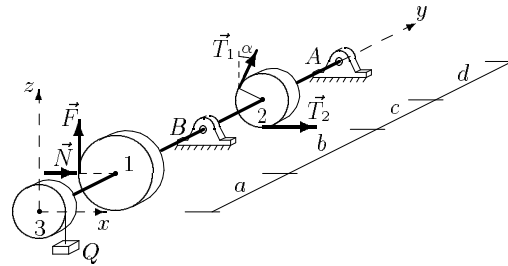
$$F = 0.2N, T_1 = 60, \\ T_2 = 118, P_1 = 38, \\ P_2 = 30, P_3 = 34, \\ Q = 14, G = 30, \\ \alpha = 60^\circ, R_1 = 22, \\ R_2 = 12, R_3 = 13, \\ a = 22, b = 24, \\ c = 27, d = 24.$$

7.



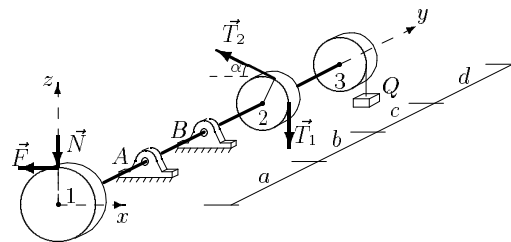
$$F = 0.3N, T_1 = 40, \\ T_2 = 78, P_1 = 22, \\ P_2 = 10, P_3 = 18, \\ Q = 14, G = 20, \\ \alpha = 30^\circ, R_1 = 18, \\ R_2 = 8, R_3 = 10, \\ a = 24, b = 26, \\ c = 27, d = 26.$$

8.



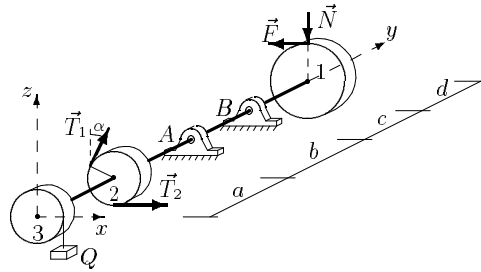
$$F = 0.4N, T_1 = 70, \\ T_2 = 136, P_1 = 36, \\ P_2 = 20, P_3 = 28, \\ Q = 22, G = 35, \\ \alpha = 45^\circ, R_1 = 28, \\ R_2 = 10, R_3 = 12, \\ a = 24, b = 28, \\ c = 30, d = 28.$$

9.



$$F = 0.1N, T_1 = 60, \\ T_2 = 31, P_1 = 16, \\ P_2 = 10, P_3 = 14, \\ Q = 26, G = 30, \\ \alpha = 30^\circ, R_1 = 14, \\ R_2 = 8, R_3 = 9, \\ a = 22, b = 27, \\ c = 28, d = 23.$$

10.



$F = 0.2N, T_1 = 70,$
 $T_2 = 37, P_1 = 20,$
 $P_2 = 10, P_3 = 14,$
 $Q = 10, G = 35,$
 $\alpha = 30^\circ, R_1 = 22,$
 $R_2 = 8, R_3 = 9,$
 $a = 22, b = 23,$
 $c = 24, d = 25.$

Ответы

№	N	X_A	Z_A	X_B	Z_B
1	194.286	359.986	-44.654	-470.267	114.726
2	165.000	104.855	84.680	-201.855	-3.459
3	1.154	-58.706	15.924	-24.428	130.614
4	34.038	50.963	218.368	-232.001	-165.945
5	261.250	7.573	-290.264	36.936	693.129
6	136.818	86.784	74.302	-164.602	10.143
7	29.487	-38.734	77.517	-102.395	56.637
8	43.214	-75.085	-75.861	-153.627	166.078
9	411.429	46.826	647.889	21.164	-90.960
10	100.000	-161.833	-130.593	109.833	269.971

4.4. Определение усилий в стержнях, поддерживающих плиту

Постановка задачи. Однородная прямоугольная горизонтальная плита известного веса опирается на шесть невесомых шарнирно закрепленных по концам стержней. Вдоль ребра плиты действует сила. Определить усилия в стержнях.

План решения

1. Отделяем плиту от стержней, заменяя действие стержней их реакциями. Реакции направляем вдоль стержней, от плиты. Вес однородной прямоугольной плиты прикладываем к ее центру вертикально вниз.

2. Две оси системы координат направляем вдоль сторон плиты, третью — перпендикулярно ее плоскости. Начало координат помещаем в точку, в которой сходятся наибольшее число стержней. Со-

ставляем уравнения равновесия (три уравнения в проекциях на оси и три уравнения моментов относительно осей). Решаем полученную систему.

3. Выполняем проверку решения, подставляя найденные значения в уравнение моментов относительно какой-либо дополнительной оси.

ПРИМЕР. Однородная прямоугольная горизонтальная плита весом $G = 20$ кН опирается на шесть невесомых шарнирно закрепленных по концам стержней. Вдоль ребра плиты действует сила $F = 10$ кН (рис. 68). Даны размеры: $a = 7$ м, $b = 8$ м, $c = 6$ м. Определить усилия в стержнях.

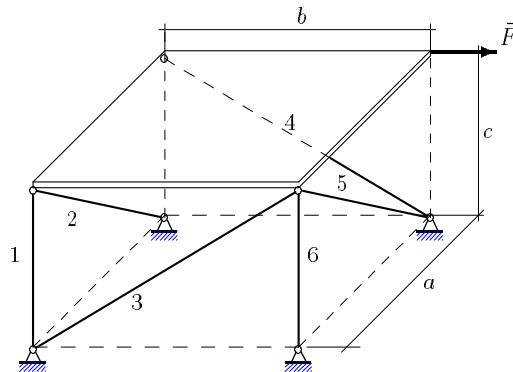


Рис. 68

РЕШЕНИЕ

1. Отделяем плиту от стержней, заменяя действие стержней их реакциями. Реакции направляем вдоль стержней, от плиты. Вес однородной прямоугольной плиты прикладываем к ее центру вертикально вниз (рис. 69).

2. Выбираем систему координат (рис. 69) и составляем уравнения равновесия. В уравнение проекций на ось x не входят силы S_1, S_3, S_4, S_6, F и G , лежащие в плоскостях, перпендикулярных Ox . В уравнение проекций на ось y не входят силы S_1, S_2, S_5, S_6 и G , лежащие в плоскостях, перпендикулярных Oy , а в уравнение проекций на вертикальную ось z входят все силы, кроме горизонтальной F :

$$\sum X_i = -S_2 \cos \alpha - S_5 \cos \alpha = 0, \quad (1)$$

$$\sum Y_i = -S_3 \cos \beta + S_4 \cos \beta + F = 0, \quad (2)$$

$$\sum Z_i = -S_1 - S_2 \sin \alpha - S_3 \sin \beta - S_4 \sin \beta - S_5 \sin \alpha - S_6 - G = 0. \quad (3)$$

Линии действия сил S_1, S_2, S_3 пересекают ось x , поэтому их моменты относительно этой оси равны нулю. Вычисляя момент силы S_4 относительно оси x , разложим ее на горизонтальную составляющую $S_4 \cos \beta$ с плечом c относительно x и вертикальную — $S_4 \sin \beta$, которая пересекает ось и имеет момент равный нулю.

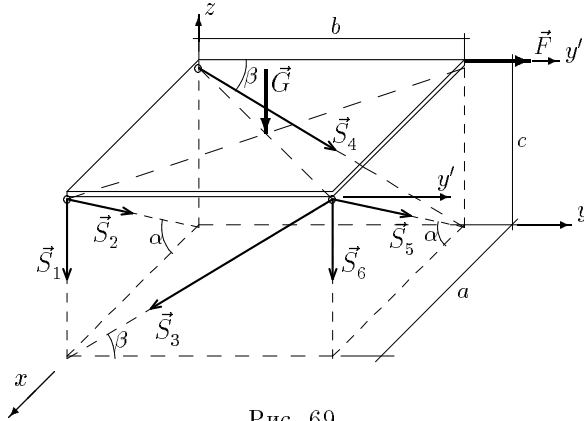


Рис. 69

Аналогично вычисляем моменты других сил и записываем все три уравнения моментов:

$$\begin{aligned} \sum M_{xi} &= -S_4 \cos \beta \cdot c - S_5 \sin \alpha \cdot b - S_6 \cdot b - F \cdot c - G \cdot b/2 = 0, \\ \sum M_{yi} &= S_1 \cdot a + S_3 \sin \beta \cdot a + S_6 \cdot a + G \cdot a/2 = 0, \\ \sum M_{zi} &= -S_3 \cos \beta \cdot a + S_5 \cos \alpha \cdot b = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Находим необходимые значения тригонометрических функций:

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{c}{\sqrt{a^2 + c^2}} = \frac{6}{9.219} = 0.651, & \cos \alpha &= \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = 0.759, \\ \sin \beta &= \frac{c}{\sqrt{b^2 + c^2}} = \frac{6}{10} = 0.6, & \cos \beta &= \sqrt{1 - \sin^2 \beta} = 0.8. \end{aligned}$$

Решая систему шести уравнений (1-4) с шестью неизвестными, получаем значения усилий, которые заносим в таблицу (в кН):

S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6
-2.500	3.841	-4.167	-16.667	-3.841	-5.000

3. Выполняем проверку решения, подставляя найденные значения в уравнение моментов относительно дополнительной оси y'' , проведенной в плоскости плиты параллельно y :

$$\begin{aligned} \sum M_{y''i} &= S_1 \cdot a + S_2 \sin \alpha \cdot a + S_3 \sin \beta \cdot a + \\ &\quad + S_5 \sin \alpha \cdot a + S_6 \cdot a + G \cdot a/2 = \\ &= -2.5 \cdot 7 + 3.841 \cdot 0.651 \cdot 7 - 4.167 \cdot 0.6 \cdot 7 - \\ &\quad - 3.841 \cdot 0.651 \cdot 7 - 5 \cdot 7 + 10 \cdot 7 = 0. \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Некоторые (или все) уравнения проекций можно заменить на уравнения моментов относительно других осей. Например, в нашей задаче вместо сложного уравнения $\sum Z_i = 0$, в которое входят все неизвестные усилия, удобно использовать более простое уравнение моментов относительно оси y' :

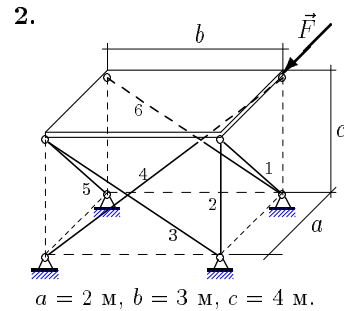
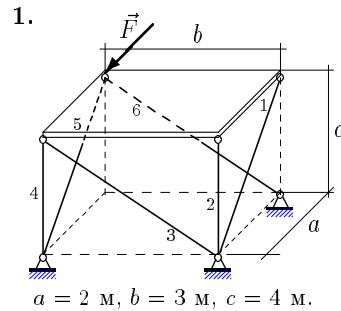
$$\sum M_{y'i} = -S_4 \sin \beta \cdot a - G \cdot a/2 = 0,$$

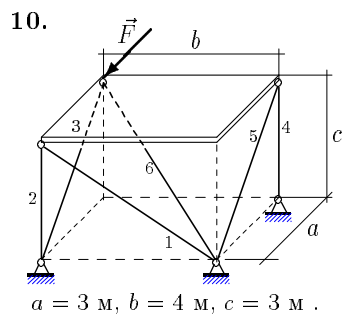
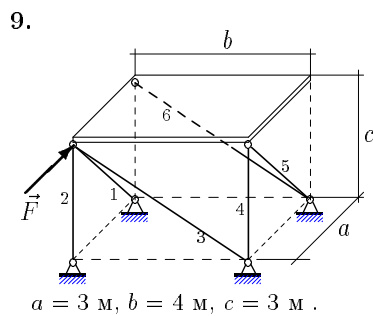
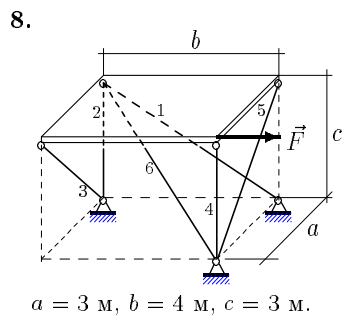
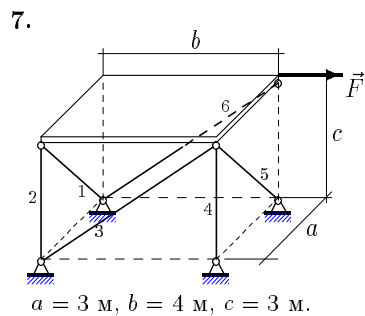
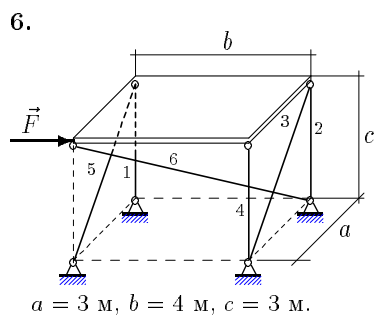
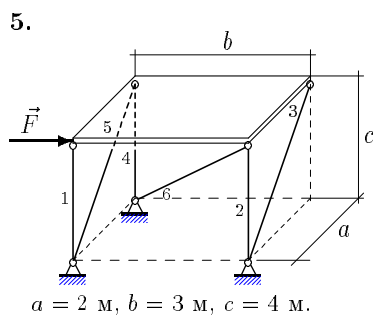
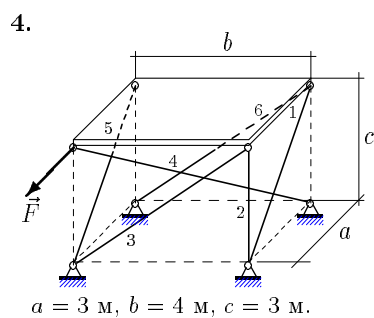
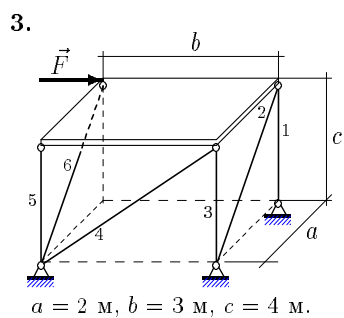
из которого сразу же находится усилие

$$S_4 = -10/0.6 = -16.667 \text{ кН},$$

а уравнение $\sum Z_i = 0$ можно использовать как проверочное, тем более, что выполнение такой проверки означает правильность сразу всех найденных усилий.

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ. Однородная прямоугольная горизонтальная плита весом $G = 25 \text{ кН}$ опирается на шесть невесомых шарнирно закрепленных по концам стержней. Вдоль ребра плиты действует сила $F = 10 \text{ кН}$. Определить усилия в стержнях (в кН).





Ответы

№	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6
1	-8.385	-5.000	-9.375	0.000	-13.975	9.375
2	17.702	-20.000	-5.208	-11.219	-4.658	-5.208
3	-12.500	-14.907	0.000	16.667	-25.833	14.907
4	-1.179	-10.000	-1.389	-3.239	-15.321	-1.389
5	13.333	-39.167	14.907	-25.833	0.000	17.951
6	2.500	-7.500	0.000	-5.000	-10.607	-14.577
7	-28.284	7.500	33.333	-40.000	28.284	-20.833
8	-12.500	-12.500	10.607	-20.000	10.607	0.000
9	31.820	-35.000	20.833	0.000	-17.678	-20.833
10	-16.667	-2.500	-14.142	-2.500	-14.142	19.437

4.5. Тело на сферической и стержневых опорах

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. Горизонтальная однородная прямоугольная полка имеет в одной точке сферическую опору и поддерживается двумя невесомыми, шарнирно закрепленными по концам, стержнями (горизонтальным и вертикальным) и наклонной подпоркой. К полке приложена сила, направленная вдоль одного из ее ребер. Определить реакции опор.

ПЛАН РЕШЕНИЯ

1. Рассматриваем равновесие полки. Действие на полку опорных стержней заменяем их реакциями. Реакции стержней направляем вдоль их осей. Выбираем оси координат с началом в сферической опоре. Реакцию сферической опоры раскладываем на три составляющие вдоль выбранных осей.

2. Составляем систему уравнений равновесия (три уравнения в проекциях на оси и три уравнения моментов относительно осей). Решаем полученную систему.

3. Выполняем проверку решения, подставляя найденные значения в уравнение моментов относительно какой-либо дополнительной оси.

ПРИМЕР. Горизонтальная однородная полка весом $G = 6$ кН имеет в точке A сферическую опору и поддерживается двумя невесомыми, шарнирно закрепленными по концам, стержнями (горизонтальным и вертикальным) и подпоркой в точке B (рис. 70). К этой же точке

приложена сила $F = 5$ кН, направленная вдоль одного из ребер полки. Даны размеры $a = 2$ м, $b = 4$ м, $c = 3$ м. Определить реакции опор.

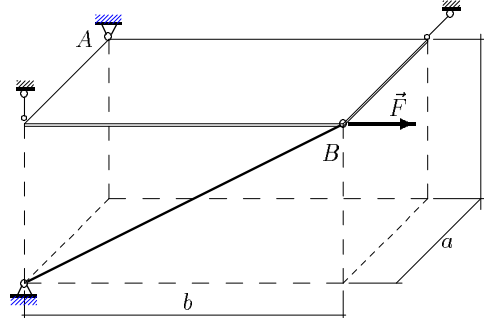


Рис. 70

РЕШЕНИЕ

1. Рассматриваем равновесие полки. Действие на тело опорных стержней заменяем их реакциями. Реакция \vec{V} — вертикальная, \vec{H} — горизонтальная вдоль бокового ребра полки.

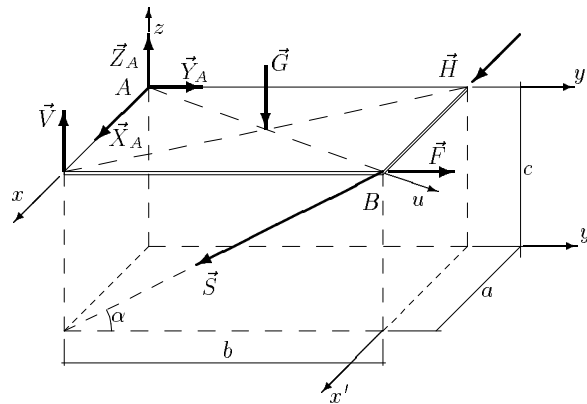


Рис. 71

Усилие \vec{S} в подпорке направлено вдоль стержня. В сферическом шарнире A имеется три составляющие реакции \vec{X}_A , \vec{Y}_A , \vec{Z}_A , которые направляем по осям координат. Так как полка однородная, ее центр тяжести совпадает с геометрическим центром. Сюда приложен вес \vec{G} . Начало системы координат xuz помещаем в точку A (рис. 71).

2. Составляем систему уравнений равновесия, состоящую из трех

уравнений проекций на оси координат всех сил, действующих на полку, и трех уравнений моментов относительно этих же осей (аналогичные уравнения см. § 4.4, с. 103):

$$\begin{aligned}
 \sum X_i &= X_A + H = 0, \\
 \sum Y_i &= Y_A - S \cos \alpha + F = 0, \\
 \sum Z_i &= Z_A + V - S \sin \alpha - G = 0, \\
 \sum M_{x_i} &= -S \cdot b \sin \alpha - G \cdot b/2 = 0, \\
 \sum M_{y_i} &= -V \cdot a + S \cdot a \sin \alpha + G \cdot a/2 = 0, \\
 \sum M_{z_i} &= -H \cdot b - S \cdot a \cos \alpha + F \cdot a = 0.
 \end{aligned} \tag{1}$$

Так как начало координат находится в сферической опоре, система уравнений равновесия разделяется и становится проще. Из уравнений моментов можно найти независимо от других три неизвестные реакции S , H и V .

Вычисляем значения тригонометрических функций:

$$\sin \alpha = c/\sqrt{b^2 + c^2} = 3/5 = 0.6, \quad \cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = 0.8.$$

Из системы (1) находим реакции и заносим их в таблицу (в кН):

X_A	Y_A	Z_A	H	V	S
-4.5	-9.0	3.0	4.5	0	-5.0

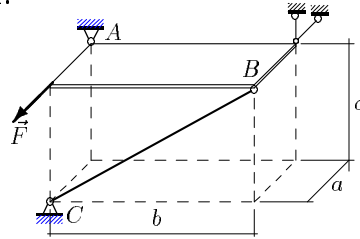
3. Выполняем проверку решения, подставляя найденные значения в уравнение моментов относительно дополнительных осей x' и y' , проведенных параллельно соответствующим осям исходной системы координат:

$$\begin{aligned}
 \sum M_{x'_i} &= -Y_A \cdot c - Z_A \cdot b - V \cdot b + G \cdot b/2 + S \cdot c \cos \alpha - F \cdot c = 0, \\
 \sum M_{y'_i} &= X_A \cdot c - V \cdot a + S \cdot a \sin \alpha + G \cdot a/2 + H \cdot c = 0.
 \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Из решения системы (1) получается $V = 0$. В этом можно убедиться сразу из уравнения моментов относительно дополнительной оси u , лежащей на диагонали полки AB (рис. 71). Действительно, все векторы, кроме \vec{V} , пересекают эту ось и их моменты равны нулю. Уравнение принимает простой вид $\sum M_u = V \cdot h = 0$, где h — некоторое плечо реакции \vec{V} относительно оси AB . Не вычисляя $h \neq 0$, получаем $V = 0$.

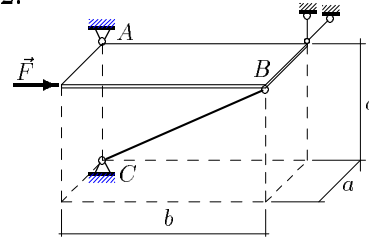
УСЛОВИЯ ЗАДАЧ. Горизонтальная однородная прямоугольная полка весом $G = 2 \text{ кН}$ имеет в точке A сферическую опору и поддерживается двумя невесомыми, шарнирно закрепленными по концам, стержнями (горизонтальным и вертикальным) и подпоркой BC . К полке приложена сила $F = 3 \text{ кН}$, направленная вдоль одного из ее ребер. Определить реакции опор (в кН).

1.



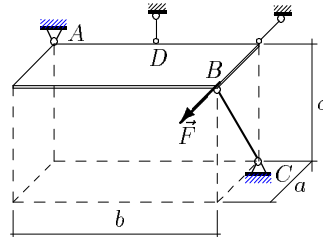
$$a = 2 \text{ м}, b = 6 \text{ м}, c = 4 \text{ м}.$$

2.



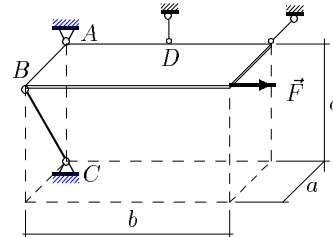
$$a = 3 \text{ м}, b = 8 \text{ м}, c = 3 \text{ м}.$$

3.



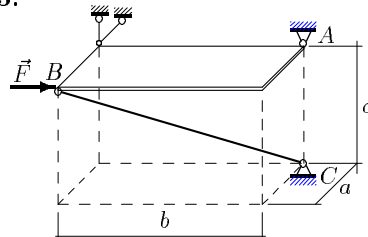
$$a = 5 \text{ м}, b = 8 \text{ м}, c = 3 \text{ м}, \\ AD = 4 \text{ м}.$$

4.



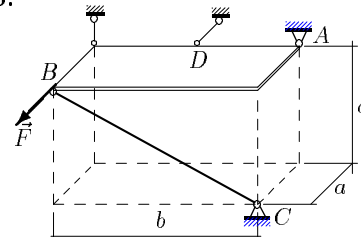
$$a = 6 \text{ м}, b = 10 \text{ м}, c = 4 \text{ м}, \\ AD = 5 \text{ м}.$$

5.



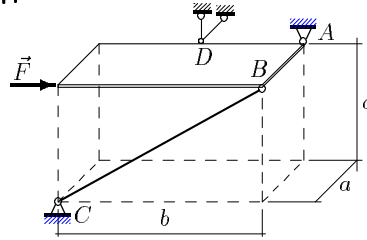
$$a = 3 \text{ м}, b = 8 \text{ м}, c = 3 \text{ м}.$$

6.



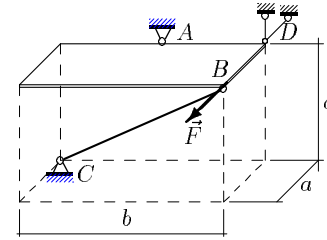
$$a = 3 \text{ м}, b = 8 \text{ м}, c = 3 \text{ м}, \\ AD = 4 \text{ м}.$$

7.



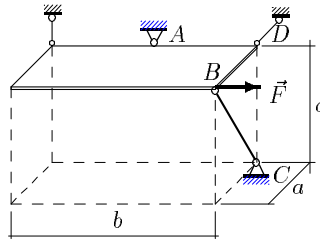
$a = 5 \text{ м}, b = 8 \text{ м}, c = 3 \text{ м},$
 $AD = 4 \text{ м}.$

8.



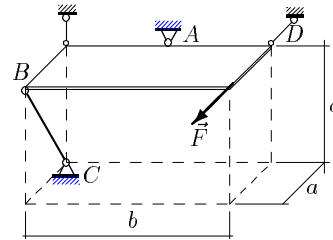
$a = 6 \text{ м}, b = 10 \text{ м}, c = 4 \text{ м},$
 $AD = 5 \text{ м}.$

9.



$a = 6 \text{ м}, b = 10 \text{ м}, c = 4 \text{ м},$
 $AD = 5 \text{ м}.$

10.



$a = 5 \text{ м}, b = 8 \text{ м}, c = 3 \text{ м},$
 $AD = 4 \text{ м}.$

Ответы

№	Стержень		Сферический шарнир			Подпорка BC
	горизонтальный	вертикальный	X_A	Y_A	Z_A	
1	0.500	0.000	-3.500	-1.500	1.000	-1.803
2	1.125	0.000	-2.125	-5.667	1.000	-3.018
3	-4.667	0.000	0.000	0.000	1.000	-1.944
4	1.800	2.000	-3.300	-3.000	-1.000	-1.803
5	-1.125	0.000	0.125	-0.333	1.000	-3.018
6	-4.000	0.000	1.000	2.667	1.000	-2.848
7	-7.083	2.000	7.083	-5.667	-1.000	-2.848
8	-1.500	-1.000	-3.000	-2.500	2.000	-3.082
9	2.100	1.000	-3.600	-3.000	0.000	-1.803
10	-1.333	-1.000	-3.333	0.000	2.000	-1.944

4.6. Приведение системы сил к простейшему виду

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. Систему сил, заданную в прямоугольной системе координат, привести к началу координат. Найти точку пересечения центральной винтовой оси с заданной плоскостью.

Привести систему сил к центру O — означает найти главный вектор \vec{R} и главный момент \vec{M}_O системы относительно этого центра. При перемене центра изменяется главный момент. Можно найти точки, относительно которых получается главный момент, параллельный главному вектору. Эти точки образуют центральную винтовую ось (или ось динами), а совокупность главного вектора и параллельного ему главного момента называют динамой или динамическим винтом. Не меняя воздействия на тело, вектор момента можно переносить параллельно самому себе, поэтому динаму часто изображают в виде главного вектора и главного момента, лежащими на одной прямой (на винтовой оси). Если система не уравновешена, то ее можно привести к трем простейшим вариантам — к динаме, силе (равнодействующей), к паре сил.

ПЛАН РЕШЕНИЯ

1. Вычисляем компоненты главного вектора системы, составляя суммы проекций всех сил на оси координат:

$$R_x = \sum X_i, \quad R_y = \sum Y_i, \quad R_z = \sum Z_i.$$

2. Находим модуль главного вектора $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$.

3. Вычисляем компоненты главного момента системы относительно начала координат:

$$M_{Ox} = \sum M_{xi}, \quad M_{Oy} = \sum M_{yi}, \quad M_{Oz} = \sum M_{zi}.$$

4. Находим модуль главного момента $M_0 = \sqrt{M_{Ox}^2 + M_{Oy}^2 + M_{Oz}^2}$.

5. Определяем скалярный инвариант системы. Система сил имеет две величины, не меняющиеся при перемене центра приведения (инварианты) — главный вектор и скалярное произведение главного вектора на главный момент:

$$I = \vec{R} \cdot \vec{M}_0 = R_x M_{Ox} + R_y M_{Oy} + R_z M_{Oz}.$$

Если $I = 0$, то система сил приводится к равнодействующей.

6. Находим минимальный главный момент $M_* = I/R$. Проверяем неравенство $M_* \leq M_0$. Если $R = 0$, то задача решена — система приводится к паре (или уравновешена, если и $M_0 = 0$.)

7. Вычисляем шаг винта $p = M_*/R$. Если $p < 0$, то главный вектор и главный момент направлены по винтовой оси в разные стороны, если $p > 0$ — в одну сторону, а если $p = 0$, то система приводится к равнодействующей.

8. Записываем уравнения центральной винтовой оси *) :

$$\frac{M_{Ox} - yR_z + zR_y}{R_x} = \frac{M_{Oy} - zR_x + xR_z}{R_y} = \frac{M_{Oz} - xR_y + yR_x}{R_z} = p. \quad (1)$$

Индексы в уравнениях образуют круговую перестановку $\overleftarrow{x} \rightarrow y \rightarrow \overleftarrow{z}$.

Если систему привести к любой точке на центральной винтовой оси, то главный вектор и главный момент будут лежать на этой оси и образовывать динаму.

Из трех уравнений (1) два являются независимыми.

Если один из компонентов главного вектора равен нулю, например, $R_x = 0$, то соответствующее уравнение записывается в другой форме: $M_{Ox} - yR_z + zR_y = 0$.

9. Находим координаты точки A пересечения центральной оси с плоскостью xy (*Решбник ВМ*, §1.11). Если прямая параллельна плоскости xy , то такой точки не существует. Решая систему (1) при $z = 0$, получаем $y = y_A, z = z_A$. Аналогично можно найти точки пересечения центральной винтовой оси с плоскостями xz и yz (если они существуют).

10. Проверяем решение, приводя систему к любой точке центральной винтовой оси (например, x_A, y_A). Для этого новые оси координат, параллельные старым, проводим через выбранную точку и повторяем пп. 3–4 плана. Главный момент должен быть равен минимальному M_* .

ПРИМЕР. Систему сил $F_1 = 4$ Н, $F_2 = 10$ Н, $F_3 = 21$ Н, $F_4 = 4$ Н, приложенных к вершинам параллелепипеда, привести к началу координат (рис. 72). Найти координаты точки пересечения центральной винтовой оси с плоскостью xy . Размеры параллелепипеда: $a = 3$ м, $b = 5$ м, $c = 4$ м.

*) Общие уравнения прямой и каноническая форма уравнения прямой см. *Решбник ВМ*, §1.10

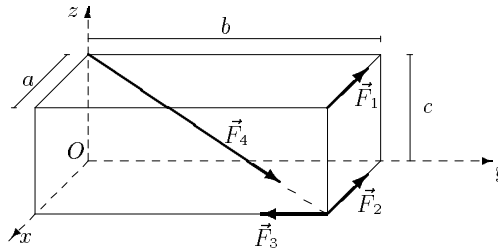


Рис. 72

РЕШЕНИЕ

1. Вычисляем компоненты главного вектора системы. Проекции вектора \vec{F}_4 , лежащего на большой диагонали параллелограмма длиной $L = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$, вычисляем по формулам:

$$\begin{aligned} F_{4x} &= F_4 \cos(\vec{F}_4 \wedge x) = F_4 a / L, \\ F_{4y} &= F_4 \cos(\vec{F}_4 \wedge y) = F_4 b / L, \\ F_{4z} &= F_4 \cos(\vec{F}_4 \wedge z) = -F_4 c / L. \end{aligned}$$

Определяем компоненты главного вектора:

$$\begin{aligned} R_x &= \sum X_i = -F_1 - F_2 + F_{4x} = -12.303 \text{ Н}, \\ R_y &= \sum Y_i = -F_3 + F_{4y} = -18.172 \text{ Н}, \\ R_z &= \sum Z_i = F_{4z} = 2.262 \text{ Н}. \end{aligned}$$

2. Находим модуль главного вектора:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = 22.061 \text{ Н}.$$

3. Вычисляем компоненты главного момента системы сил относительно начала координат:

$$\begin{aligned} M_{Ox} &= \sum M_{xi} = -F_{4y} c = -11.314 \text{ Нм}, \\ M_{Oy} &= \sum M_{yi} = -F_1 c + F_{4x} c = -9.212 \text{ Нм}, \\ M_{Oz} &= \sum M_{zi} = F_1 b + F_2 b - F_3 a = -7.00 \text{ Нм}. \end{aligned}$$

4. Находим модуль главного момента:

$$M_0 = \sqrt{M_{Ox}^2 + M_{Oy}^2 + M_{Oz}^2} = 16.182 \text{ Нм}.$$

5. Определяем скалярный инвариант системы:

$$I = \vec{R} \cdot \vec{M}_0 = R_x M_{Ox} + R_y M_{Oy} + R_z M_{Oz} = 290.745 \text{ Н}^2\text{м}.$$

Скалярный инвариант не равен нулю, следовательно, система сил приводится к динаме.

6. Вычисляем минимальный главный момент системы сил:

$$M_* = \frac{I}{R} = \frac{290.745}{22.061} = 13.178 \text{ Нм}.$$

Неравенство $M_* \leq M_0 = 16.182 \text{ Нм}$ выполняется. Точки, относительно которой момент системы сил меньше M_* , не существует.

7. Находим шаг винта системы сил:

$$p = \frac{M_*}{R} = 0.597 \text{ м}.$$

Шаг положительный, следовательно, главный момент и главный вектор направлены по центральной винтовой оси в одну сторону.

8. Записываем уравнения центральной винтовой оси:

$$\frac{M_{Ox} - yR_z + zR_y}{R_x} = \frac{M_{Oy} - zR_x + xR_z}{R_y} = \frac{M_{Oz} - xR_y + yR_x}{R_z} = p.$$

Из этих трех уравнений только два являются независимыми:

$$\begin{aligned} 2.262y - 18.172z - 3.964 &= 0, \\ -2.262x + 12.303z + 1.644 &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

9. Находим координаты точки пересечения центральной оси с плоскостью xy . Решая систему (2) при $z = 0$, получаем, что

$$y = y_A = 1.752 \text{ м}, \quad x = x_A = 0.726 \text{ м}.$$

Основные результаты расчета заносим в таблицу:

R_x	R_y	R_z	R	M_{Ox}	M_{Oy}	M_{Oz}	M_O	x_A	y_A
Н				Нм				м	
-12.303	-18.172	-2.263	22.061	-11.314	-9.212	7.000	16.182	0.726	1.752

10. Проверяем решение, приводя систему к точке A центральной винтовой оси. Через точку A проводим оси новой системы координат x' , y' , z' , параллельные исходным осям (рис. 73).

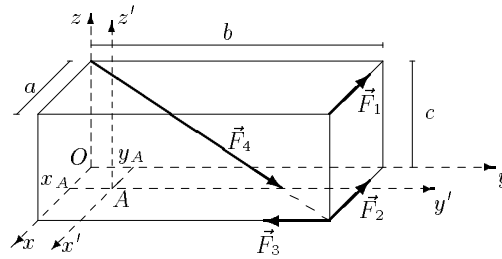


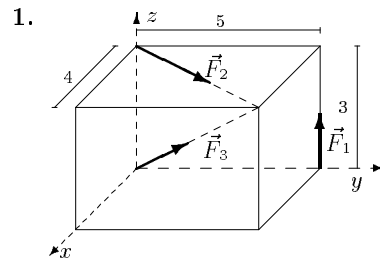
Рис. 73

Получаем моменты заданной системы относительно новых осей координат и величину главного момента относительно центра A :

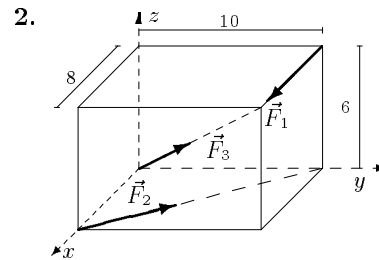
$$\begin{aligned}
 M_{Ax'} &= \sum M_{x'i} = -F_{4z}y_A - F_{4y}c = -7.350 \text{ Нм}, \\
 M_{Ay'} &= \sum M_{y'i} = -F_1c + F_{4x}c + F_{4z}x_A = -10.856 \text{ Нм}, \\
 M_{Az'} &= \sum M_{z'i} = (F_1 + F_2)(b - y_A) - F_{4y}x_A + \\
 &\quad + F_{4x}y_A - F_3(a - x_A) = -1.352 \text{ Нм}, \\
 M_A &= \sqrt{M_{Ax'}^2 + M_{Ay'}^2 + M_{Az'}^2} = 13.179 \text{ Нм}.
 \end{aligned}$$

Главный момент системы M_A относительно новой точки приведения совпадает с полученным ранее минимальным M_* , что подтверждает правильность расчетов.

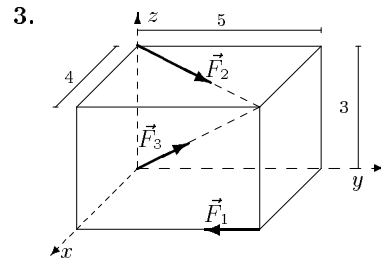
УСЛОВИЯ ЗАДАЧ. Систему трех сил, приложенных к вершинам параллелепипеда, привести к началу координат. Найти координаты точки пересечения центральной винтовой оси с плоскостью xy . Размеры на рисунках даны в м, силы — в Н.



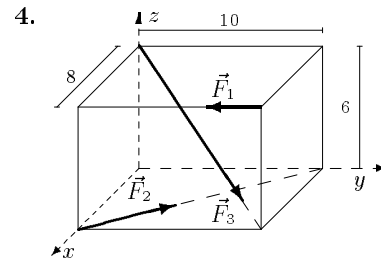
$$F_1 = 1, F_2 = 1, F_3 = 2.$$



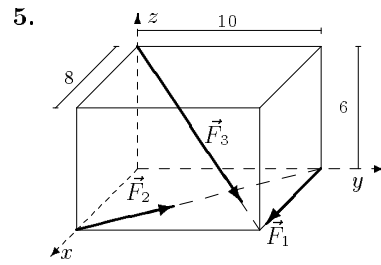
$$F_1 = 2, F_2 = 3, F_3 = 5.$$



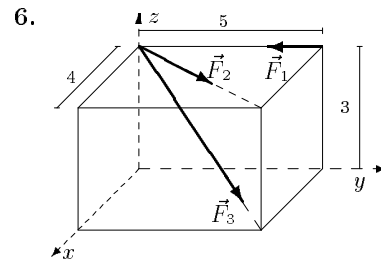
$$F_1 = 3, F_2 = 3, F_3 = 6.$$



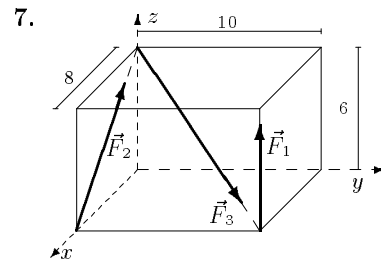
$$F_1 = 4, F_2 = 5, F_3 = 8.$$



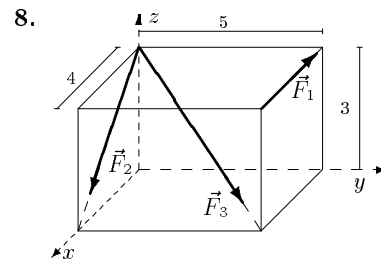
$$F_1 = 1, F_2 = 2, F_3 = 4.$$



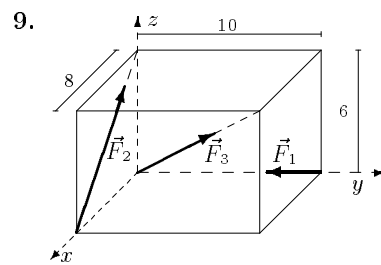
$$F_1 = 2, F_2 = 2, F_3 = 5.$$



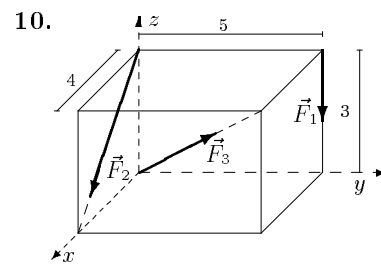
$$F_1 = 3, F_2 = 4, F_3 = 5.$$



$$F_1 = 4, F_2 = 4, F_3 = 6.$$



$$F_1 = 1, F_2 = 2, F_3 = 5.$$



$$F_1 = 2, F_2 = 2, F_3 = 3.$$

Ответы

№	R_x	R_y	R_z	R	M_{Ox}	M_{Oy}	M_{Oz}	M_O	x_A	y_A
	Н				Нм				м	
1	1.756	2.195	1.849	3.364	2.657	1.874	0.000	3.252	-0.093	0.701
2	2.954	5.878	2.121	6.912	0.000	12.000	-1.259	12.066	-1.721	-1.978
3	5.268	3.585	2.546	6.862	-7.028	5.622	-12.000	15.000	-3.627	-0.677
4	1.402	5.561	-3.394	6.664	-9.941	27.153	-0.765	28.926	2.848	4.228
5	2.013	4.390	-1.697	5.119	-16.971	13.576	2.494	21.876	5.907	10.960
6	4.078	3.097	-2.121	5.543	-9.292	12.233	0.000	15.362	5.767	4.380
7	-0.372	3.536	3.279	4.836	8.787	-26.229	0.000	27.662	3.574	2.215
8	2.594	4.243	-4.946	7.013	-12.728	7.782	20.000	24.951	3.299	1.519
9	1.228	2.536	3.321	4.355	0.000	-9.600	0.000	9.600	1.911	0.475
10	3.297	2.121	-1.927	4.369	-10.000	4.800	0.000	11.092	3.805	3.146

ЗАМЕЧАНИЕ. Решение задачи легко проверить в системе Maple V. Приведем фрагмент программы вычислений^{*)}.

Введены следующие обозначения: $F[1]$ — сила F_1 , $T[1]$ — радиус-вектор точки приложения силы F_1 , R — главный вектор, M — главный момент, II — скалярный инвариант.

```

> with(linalg):
> F[1]:=vector(3,[-4,0,0]): F[2]:=vector(3,[-10,0,0]):
> F[3]:=vector(3,[0,-21,0]):
> F[4]:=evalm(4*normalize(vector(3,[a,b,-c]))):
> T[5]:=vector(3,[0,0,0]): T[1]:=vector(3,[0,b,c]):
> T[2]:=vector(3,[a,b,0]): T[3]:=vector(3,[a,b,0]):
> T[4]:=vector(3,[0,0,c]):
> R:=evalm(add(F[i],i=1..N)); R0:=evalf(norm(R,2));
> M:=evalm(add(crossprod(T[i],F[i]),i=1..N));
> M0:=evalf(norm(M,2)); II:=dotprod(R,M);

```

Здесь использована библиотека `linalg`. В последних версиях Maple 6,7,8 существует более совершенный пакет `LinearAlgebra`. В этом случае операторы скалярного и векторного произведения необходимо заменить соответственно на `DotProduct` и `CrossProduct`.

^{*)} Полный текст программы размещен на странице сети Интернет www.academiaxxi.ru/solverTM.html.

Глава 5

ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ

5.1. Центр тяжести плоской фигуры

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. Найти площадь и координаты центра тяжести плоской фигуры.

ПЛАН РЕШЕНИЯ

1. Разбиваем фигуру на простые отдельные части, положение центров тяжести которых известны.
2. Выбираем систему координат. Вычисляем площади и координаты x_i, y_i центров тяжести отдельных частей. Площади вырезанных частей берем со знаком минус.
3. Находим общую площадь фигуры по формуле $A = \sum A_i$.
4. Определяем координаты центра тяжести фигуры:

$$x_c = \frac{\sum A_i x_i}{A}, \quad y_c = \frac{\sum A_i y_i}{A}.$$

ПРИМЕР. Найти площадь и координаты центра тяжести плоской фигуры. Криволинейный участок контура является половиной окружности с центром на оси Ox (рис. 74). Размеры на рисунке даны в метрах.

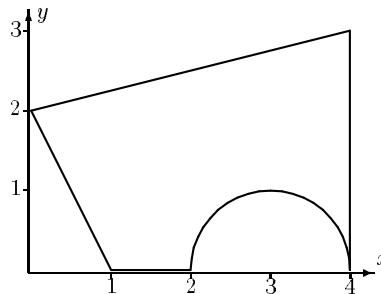


Рис. 74

РЕШЕНИЕ

1. Разбиваем фигуру на простые отдельные части, положение центров тяжести которых известны.

Центр тяжести прямоугольника находится в его геометрическом центре, положение центра тяжести других фигур, встречающихся в задачах, изображено на рис. 75.

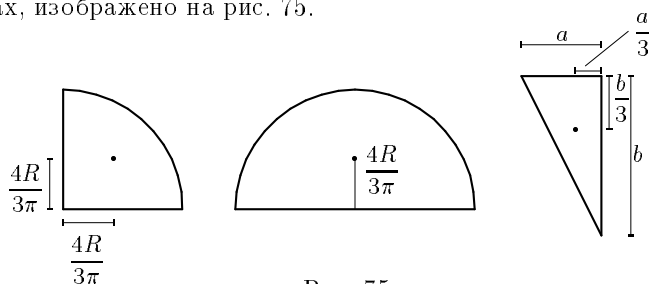


Рис. 75

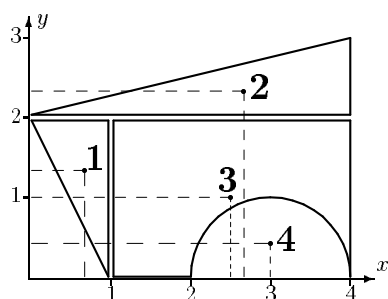


Рис. 76

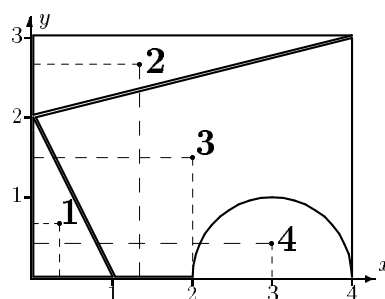


Рис. 77

Представляем фигуру в виде двух треугольников **1,2**, прямоугольника **3** и выреза **4** в виде полукруга (рис. 76).

2. Вычисляем площадь (в м²) и координаты центра тяжести (в м) каждого элемента:

$$A_1 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 = 1, \quad x_1 = \frac{2}{3} \cdot 1 = 0.667, \quad y_1 = \frac{2}{3} \cdot 2 = 1.333,$$

$$A_2 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 1 = 2, \quad x_2 = \frac{2}{3} \cdot 4 = 2.667, \quad y_2 = 2 + \frac{1}{3} \cdot 1 = 2.333,$$

$$A_3 = 3 \cdot 2 = 6, \quad x_3 = 1 + \frac{1}{2} \cdot 3 = 2.5, \quad y_3 = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1,$$

$$A_4 = -\frac{3.142 \cdot 1^2}{2} = -1.571, \quad x_4 = 3, \quad y_4 = \frac{4 \cdot 1}{3 \cdot \pi} = 0.424.$$

Площадь выреза берем со знаком минус.

3. Площадь фигуры $A = \sum A_i = 1 + 2 + 6 - 1.571 = 7.429 \text{ м}^2$.

4. Находим координаты центра тяжести всей фигуры:

$$x_c = \frac{\sum A_i x_i}{A} = \frac{0.667 \cdot 1 + 2.667 \cdot 2 + 2.5 \cdot 6 - 3 \cdot 1.571}{7.429} = 2.192 \text{ м},$$

$$y_c = \frac{\sum A_i y_i}{A} = \frac{1.333 \cdot 1 + 2.333 \cdot 2 + 1 \cdot 6 - 0.424 \cdot 1.571}{7.429} = 1.526 \text{ м}.$$

Вычисления удобно свести в таблицу:

i	A_i	x_i	y_i	$A_i x_i$	$A_i y_i$
1	1	0.667	1.333	0.667	1.333
2	2	2.667	2.333	5.333	4.667
3	6	2.5	1	15	6
4	-1.571	3	0.424	-4.712	-0.666
\sum	7.429			16.288	11.333

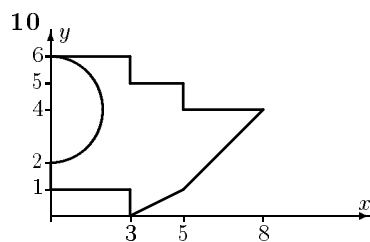
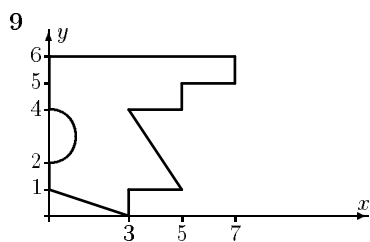
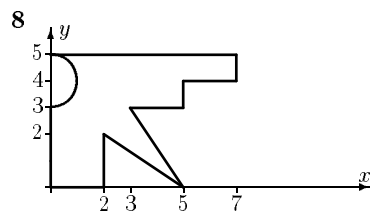
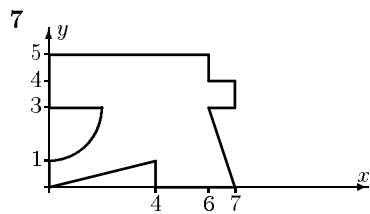
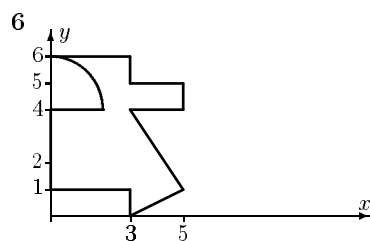
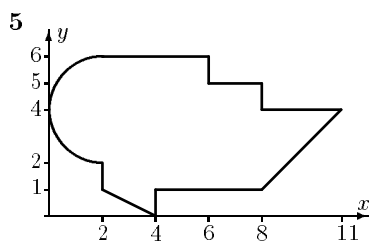
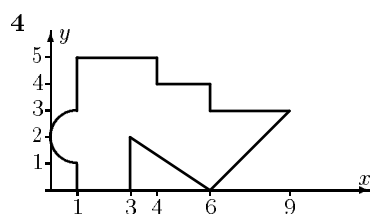
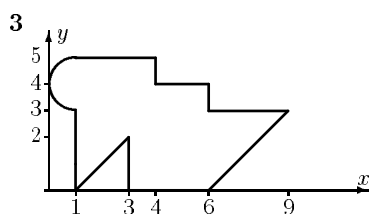
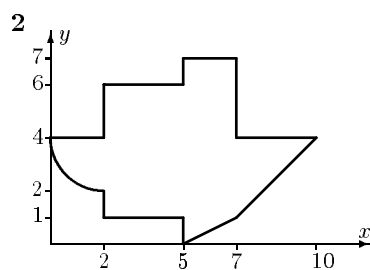
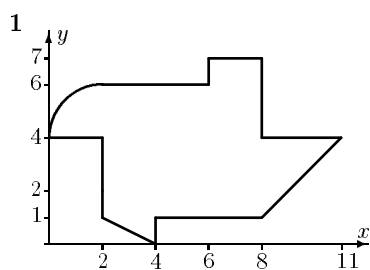
Сначала заполняем столбцы A_i, x_i, y_i , затем вычисляем статические моменты $A_i x_i, A_i y_i$. Внизу записываем суммы столбцов, необходимые для вычисления координат центра тяжести. Таким образом,

$$x_c = \frac{16.288}{7.429} = 2.192 \text{ м}, \quad y_c = \frac{11.333}{7.429} = 1.526 \text{ м}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Большинство задач на определение центра тяжести допускает несколько способов разбиения фигуры. Это можно использовать для проверки решения. Второй вариант разбиения фигуры в данном примере состоит из прямоугольника **3** с размерами $4\text{ м} \times 3\text{ м}$ и вырезанных из него полукруга **4** и двух треугольников **1** и **2** (рис. 77).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Решение задачи в системе Maple V методом контурного интегрирования приведено в § 15.2, с. 355.

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ. Найти площадь (в м^2) и координаты центра тяжести плоской фигуры (в м). Отметки на осях даны в метрах. Криволинейный участок контура является дугой половины или четверти окружности.



ЗАМЕЧАНИЕ 3. Во всех вариантах фигуру можно разбить на пять частей.

Ответы

№	A	x_c	y_c	№	A	x_c	y_c
1	40.642	5.203	3.627	6	17.858	2.380	2.964
2	35.642	4.764	3.495	7	27.358	3.582	2.653
3	27.071	3.887	2.492	8	19.429	2.668	2.945
4	26.071	3.755	2.441	9	23.929	2.668	3.585
5	39.783	4.702	3.351	10	22.217	3.593	2.950

5.2. Пространственная стержневая система

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. Найти координаты центра тяжести пространственной фигуры, состоящей из N однородных стержней.

ПЛАН РЕШЕНИЯ

1. Разбиваем фигуру на отдельные стержни.
2. Выбираем систему координат. Вычисляем длины и координаты x_i, y_i, z_i , $i = 1, \dots, N$ центров тяжести отдельных стержней. Координаты центра прямолинейного однородного стержня вычисляем как полусумму координат его концов.

3. Находим суммарную длину стержней системы $L = \sum_{i=1}^N L_i$.

4. Определяем координаты центра тяжести тела по формулам

$$x_c = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^N L_i x_i, \quad y_c = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^N L_i y_i, \quad z_c = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^N L_i z_i.$$

ПРИМЕР. Найти координаты центра тяжести пространственной фигуры, состоящей из шести однородных стержней (рис. 78). Даны размеры: $a = 12$ м, $b = 16$ м, $c = 10$ м, $d = 5$ м.

РЕШЕНИЕ

1. Разбиваем фигуру на шесть стержней.
2. Выбираем систему координат (рис. 78). Вычисляем длины и координаты x_i, y_i, z_i , $i = 1, \dots, N$ центров тяжести отдельных стержней.

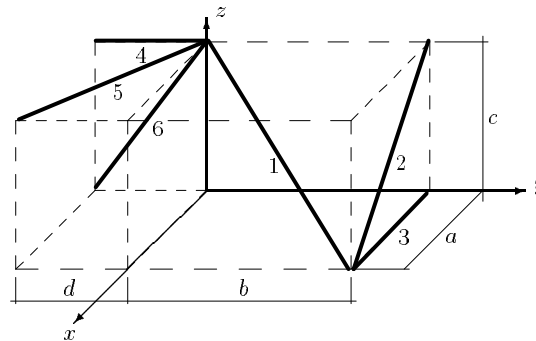


Рис. 78

3. Находим суммарную длину стержней системы:

$$L = \sum_{i=1}^6 L_i = 79.162 \text{ м.}$$

Промежуточные результаты удобно занести в таблицу:

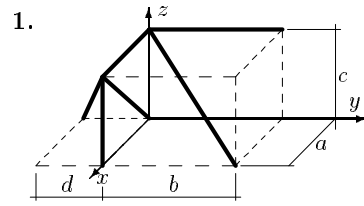
i	L_i	x_i	y_i	z_i
1	$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$	$a/2$	$b/2$	$c/2$
2	$\sqrt{a^2 + c^2}$	$a/2$	b	$c/2$
3	a	$a/2$	b	0
4	d	0	$-d/2$	c
5	$\sqrt{a^2 + d^2}$	$a/2$	$-d/2$	c
6	$\sqrt{c^2 + d^2}$	0	$-d/2$	$c/2$

4. Определяем координаты центра тяжести тела по формулам

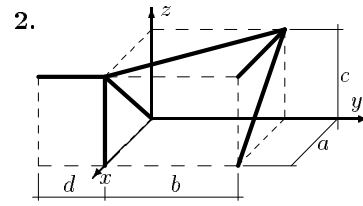
$$x_c = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^N L_i x_i = 4.774 \text{ м, } y_c = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^N L_i y_i = 6.921 \text{ м,}$$

$$z_c = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^N L_i z_i = 5.379 \text{ м.}$$

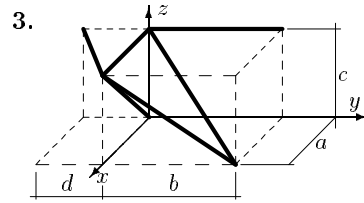
УСЛОВИЯ ЗАДАЧ. Найти координаты центра тяжести пространственной фигуры, состоящей из шести однородных стержней (в метрах). Размеры даны в метрах.



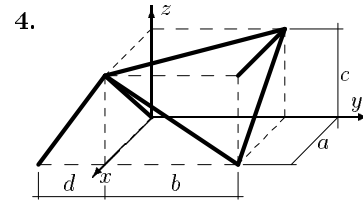
$$a = 3, b = 4, c = 3, d = 2.$$



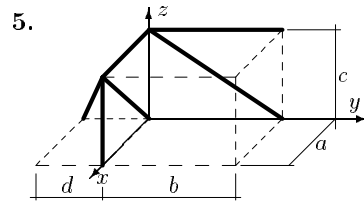
$$a = 5, b = 4, c = 3, d = 2.$$



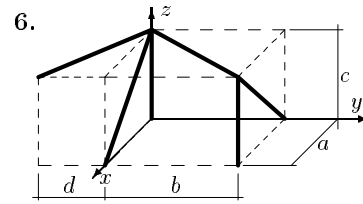
$$a = 6, b = 5, c = 4, d = 3.$$



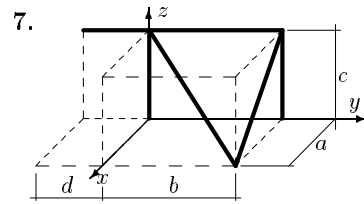
$$a = 4, b = 6, c = 5, d = 4.$$



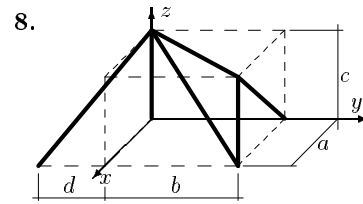
$$a = 3, b = 4, c = 3, d = 2.$$



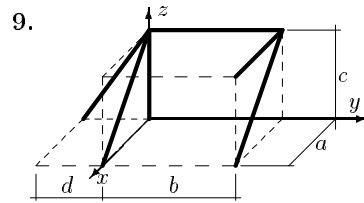
$$a = 5, b = 4, c = 3, d = 1.$$



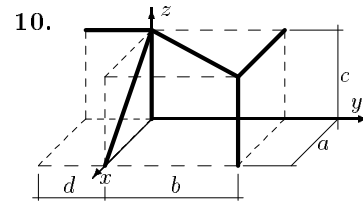
$$a = 6, b = 5, c = 4, d = 2.$$



$$a = 4, b = 6, c = 5, d = 3.$$



$$a = 3, b = 4, c = 3, d = 1.$$



$$a = 6, b = 5, c = 4, d = 2.$$

Ответы

№	L	x_c	y_c	z_c	№	L	x_c	y_c	z_c
1	24.764	1.439	0.605	1.924	6	29.164	2.500	1.563	2.092
2	28.065	2.945	1.929	2.216	7	30.986	1.548	2.856	2.452
3	40.097	3.105	1.007	2.883	8	39.460	2.000	2.680	2.957
4	38.231	2.744	2.476	3.233	9	21.648	0.796	1.635	1.985
5	23.933	1.124	0.556	1.939	10	31.021	2.807	2.177	3.019

В таблице ответов L — суммарные длины стержней (в м).

5.3. Центр тяжести объемного тела

Постановка задачи. Найти координаты центра тяжести однородного объемного тела.

План решения

1. Разбиваем тело на простые части, положение центров тяжести которых известно.

2. Выбираем систему координат. Вычисляем объемы V_i и координаты x_i, y_i, z_i центров тяжести отдельных частей. Объемы вырезанных частей берем со знаком минус.

3. Находим общий объем тела по формуле $V = \sum V_i$.

4. Определяем координаты центра тяжести тела:

$$x_c = \sum V_i x_i / V, \quad y_c = \sum V_i y_i / V, \quad z_c = \sum V_i z_i / V.$$

ПРИМЕР. Найти координаты центра тяжести однородного объемного тела (рис. 79); $a = 10$ м, $b = 12$ м, $c = 6$ м, $d = 8$ м, $R = d/2$.

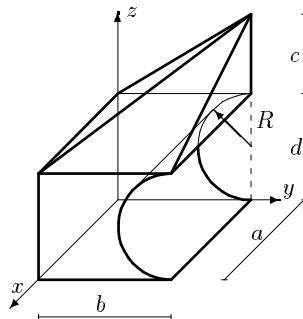


Рис. 79

РЕШЕНИЕ

1. Разбиваем тело на пирамиду **1**, параллелепипед **2** и половину цилиндра **3** (рис. 80).

2. Выбираем систему координат. Вычисляем объемы V_i и координаты x_i, y_i, z_i центров тяжести отдельных частей. Центр тяжести пирамиды **1** лежит в точке $C_1, C_0C_1 = C_0O_1/4$,

$$V_1 = \frac{1}{3}abc, \quad x_1 = \frac{3}{8}a, \quad y_1 = \frac{5}{8}b, \quad z_1 = d + \frac{1}{4}c.$$

Центр тяжести параллелепипеда **2** совпадает с его геометрическим центром:

$$V_2 = abd, \quad x_2 = \frac{1}{2}a, \quad y_2 = \frac{1}{2}b, \quad z_2 = \frac{1}{2}d.$$

Объем половины цилиндра **3** берем со знаком минус:

$$V_3 = -\pi R^2 a/2, \quad x_3 = \frac{1}{2}a, \quad y_3 = b - l, \quad z_3 = \frac{1}{2}d,$$

где $l = 4R/(3\pi)$ — расстояние по оси y от оси цилиндра до его центра тяжести ^{*)}.

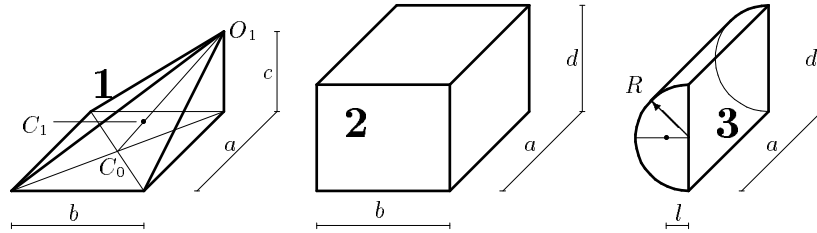


Рис. 80

3. Находим общий объем тела:

$$V = \sum_{i=1}^3 V_i = 240 + 960 - 251.327 = 948.673 \text{ м}^3.$$

^{*)} В общем случае объем тела, лежащего в области Ω , можно найти, вычисляя тройной интеграл по области $V = \iiint_{\Omega} dx dy dz$, а координаты центра тяжести, например, x_c однородного тела можно определить по формуле $x_c = \frac{1}{V} \iiint_{\Omega} x dx dy dz$; см. *Решebник ВМ*, §12.9.

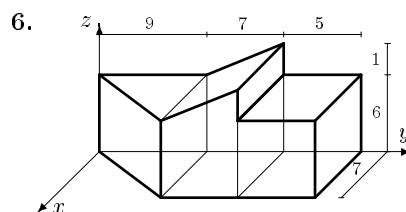
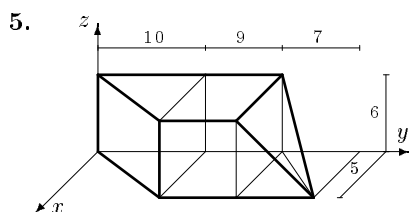
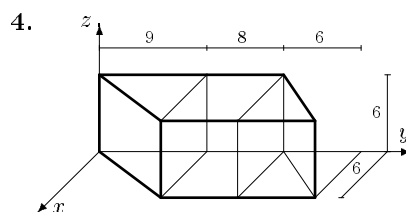
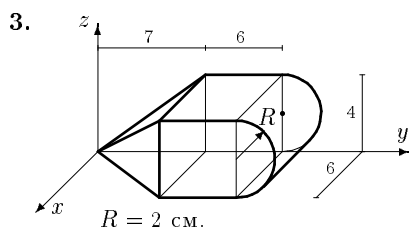
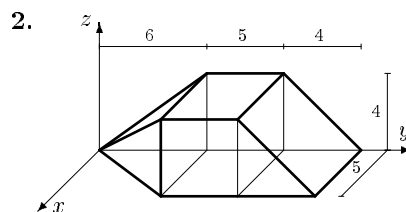
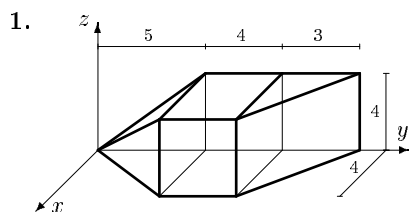
4. Определяем координаты центра тяжести тела:

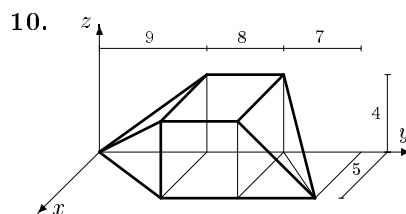
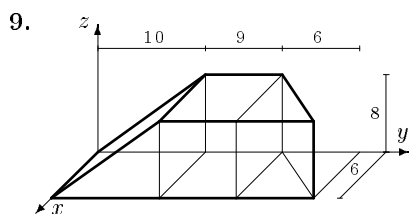
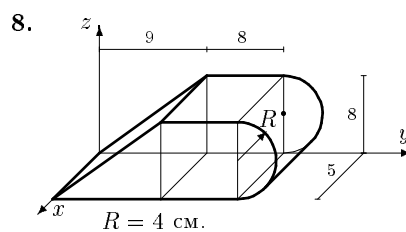
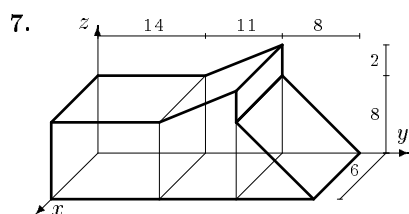
$$x_c = \frac{1}{V} \sum_{i=1}^3 V_i x_i = \frac{240 \cdot 3.75 + 960 \cdot 5 - 251.327 \cdot 5}{948.673} = 4.684 \text{ м,}$$

$$y_c = \frac{1}{V} \sum_{i=1}^3 V_i y_i = \frac{240 \cdot 7.5 + 960 \cdot 6 - 251.327 \cdot 10.302}{948.673} = 5.240 \text{ м,}$$

$$z_c = \frac{1}{V} \sum_{i=1}^3 V_i z_i = \frac{240 \cdot 9.5 + 960 \cdot 4 - 251.327 \cdot 4}{948.673} = 5.391 \text{ м.}$$

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ. Найти координаты центра тяжести однородного объемного тела. Размеры даны в метрах.





Ответы

№	V	x_c	y_c	z_c	№	V	x_c	y_c	z_c
1	114.667	1.744	6.872	1.884	6	717.500	3.193	12.584	4.263
2	180.000	2.361	8.463	1.741	7	1458.000	3.000	14.897	5.333
3	237.699	2.823	9.491	1.882	8	625.664	2.500	12.131	3.616
4	558.000	2.903	12.129	3.000	9	816.000	3.176	13.343	3.608
5	490.000	2.334	12.995	2.893	10	266.667	2.469	12.600	1.800

В таблице ответов дан объем тела в м^3 , координаты центра тяжести — в м.