НЕСТАБИЛЬНОСТЬ ВРАЩЕНИЯ ЗЕМЛИ

М.Н. Кирсанов

Московский энергетический институт (технический университет)

Аннотация. Записано и проанализировано на возмущения скоростей и ускорений уравнение свободного движения твердого тела с жидкостью. Показано, что движение симметричного тела нестабильно по отношению к возмущениям скоростей. Обнаружено нестабильное положение вектора момента количества движения при возмущении ускорений.

Рассмотрим свободное движение твердого тела с жидкостью относительно центра масс. Уравнения движения имеют вид [1]

$$\begin{aligned} A\dot{p} + (C-B)qr = hp(C(A-C)(A+C-B)r^2 + B(A-B)(A+B-C)q^2) \\ B\dot{q} + (A-C)rp = hq(A(B-A)(B+A-C)p^2 + C(B-C)(B+C-A)r^2) \\ C\dot{r} + (B-A)pq = hr(B(C-B)(C+B-A)q^2 + A(C-A)(C+A-B)p^2) \end{aligned} \tag{1}$$

где $h = \rho P/(\nu ABC)$ — коэффициент, зависящий от геометрии (P, A, B, C) и реологических свойств материала тела (ν); p, q, r — проекции вектора угловой скорости на подвижные оси координат x, y, z, являющиеся главными осями инерции; $A = J_{xx}$, $B = J_{yy}$, $C = J_{zz}$ — моменты инерции.

Пусть в результате некоторого процесса угловые скорости и ускорения получили некоторые малые приращения $p+\Delta p$, $q+\Delta q$, $r+\Delta r$ $\dot{p}+\Delta\dot{p}$, $\dot{q}+\Delta\dot{q}$, $\dot{r}+\Delta\dot{r}$. Вариация (1)) дает систему дифференциальных уравнений для приращений Δp, Δq, Δr

$$\begin{aligned} A\Delta\dot{p} + a_{11}\Delta p + a_{12}\Delta q + a_{13}\Delta r = 0, \\ B\Delta\dot{q} + a_{21}\Delta p + a_{22}\Delta q + a_{23}\Delta r = 0, \\ C\Delta\dot{r} + a_{31}\Delta p + a_{32}\Delta q + a_{33}\Delta r = 0. \end{aligned} \tag{2}$$

где $a_{ij} = a_{ij}(p, q, r)$. Поставим для системы (1)-(2) обобщенную задачу Коши. Зададим в начальных условиях значения производных $\Delta\dot{p}$, $\Delta\dot{q}$, $\Delta\dot{r}$. Для того, чтобы вычислить соответствующие значения функций и свести обобщенную задачу к классической, придется выразить величины Δp, Δq, Δr через их скорости, решив систему () как линейную алгебраическую. В тех случаях, когда определитель системы обращается в нуль появляются особые точки обобщенной задачи Коши[2]. Такие моменты будем связывать с нестабильностью движения, а соответствующие условия — точками нестабильности первого порядка (в соответствии с порядком задаваемой производной).

Для симметричного тела положим $A = B$. После некоторых преобразований определитель матрицы $\{a_{ij}\}$ примет вид $(C-B)k$, где k — положительная величина, зависящая от угловых скоростей. Таким образом, нестабильность такого рода может возникнуть только при $C = B$ при любых угловых скоростях и параметрах P и ν.

Аналогично, можно поставить задачу о точке нестабильности второго порядка. Для этого продифференцируем по времени (2)

$$\begin{aligned} &A\Delta\ddot{p} + c_{11}\Delta\dot{p} + c_{12}\Delta\dot{q} + c_{13}\Delta\dot{r} + b_{11}\Delta p + b_{12}\Delta q + b_{13}\Delta r = 0,\\ &B\Delta\ddot{q} + c_{21}\Delta\dot{p} + c_{22}\Delta\dot{q} + c_{23}\Delta\dot{r} + b_{21}\Delta p + b_{22}\Delta q + b_{23}\Delta r = 0,\\ &C\Delta\ddot{r} + c_{31}\Delta\dot{p} + c_{32}\Delta\dot{q} + c_{33}\Delta\dot{r} + b_{31}\Delta p + b_{32}\Delta q + b_{33}\Delta r = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Запишем систему (2)-(3) в матричном виде, отнеся в правую часть заданные ускорения

$$H\bar{X} = \bar{U},$$

где $\bar{X} = \{\Delta p, \Delta q, \Delta r,\ \Delta\dot{p}, \Delta\dot{q}, \Delta\dot{r}\}^T$, $\bar{U} = \{0,\ 0,\ 0,\ A\Delta\ddot{p}, B\Delta\ddot{q}, C\Delta\ddot{r}\}^T$. Приравнивая определитель матрицы H к нулю, получим условие возникновения нестабильной точки 2-го порядка. Перейдем к эйлеровым углам

$$Ap = K\sin\theta\sin\varphi,\ Bq = K\sin\theta\cos\varphi,\ Cr = K\cos\theta,$$

где φ — угол чистого вращения, θ — угол нутации, K — модуль вектора кинетического момента. Для $x = \cos^2\theta$ получим уравнение

$$45x^4 + 3(7b^2 - 25)x^3 + 3(3b^4 + b^2 + 20)x^2 - (7b^4 + 11b^2 + 20)x - b^2 = 0. \tag{4}$$

где $b = 1/(hKC)$. Зависимость $x(b)$, полученная из (4) численно, отражена на рис.1. Наблюдается стремление решения к значению $x = 0.777$, или $\theta = 28°$. Применительно к модели Земли это соответствует 62°с.ш.

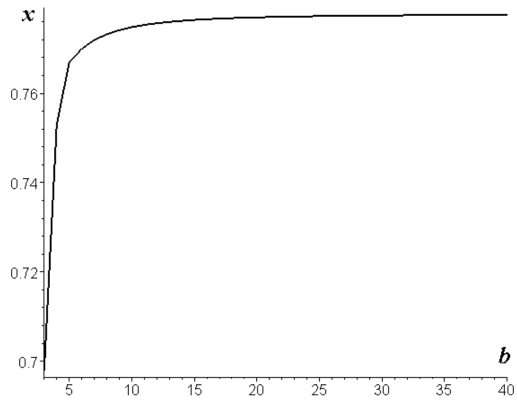

Рис.1

Список литературы

[1] Черноусько Ф.Л. Движение твердого тела с полостями, содержащими вязкую жидкость. М.:ВЦ АН СССР, 1968

[2] Кирсанов М.Н. Определение и анализ стабильности движения с использованием системы Maple. – Exponenta Pro. Математика в приложениях №3-4. 2004., с.134-137.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (04-01-00331).