ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА.
Основные тезисы

Содержание

1 МНОЖЕСТВА, ОТНОШЕНИЯ, ГРУППЫ

1.1 Множества

1. Два множества A и B называются равными ($A = B$), если они состоят из одних и тех же элементов.

2. Множество A называется *подмножеством* множества B если любой элемент множества A принадлежит множеству B.

3. Если $A \subset B$ и $A \neq B$, $A \neq \emptyset$, то A называется *собственным подмножеством* B. В этом случае B содержит хотя бы один элемент, не принадлежащий A.

4. *Объединением* множеств A и B (обозначение $A \cup B$) называется множество элементов x таких, что x принадлежит хотя бы одному из двух множеств A или B

5. *Пересечением* множеств A и B (обозначение $A \cap B$) называется множество, состоящее из элементов x, которые принадлежат и множеству A и множеству B

6. *Разностью* множеств A и B называется множество всех тех элементов множества A, которые не принадлежат множеству B

7. *Симметрической разностью* множеств A и B называется множество $A\Delta B = (A\backslash B) \cup (B\backslash A)$

8. *Абсолютным дополнением* множества A называется множество всех элементов, не принадлежащих A, т.е. множество $\bar{A} = U\backslash A$, где U – универсальное множество

9. Свойства операций

   (a) Коммутативность объединения и пересечения:
   $A \bigcup B = B \bigcup A$,
   $A \bigcap B = B \bigcap A$.

   (b) Ассоциативность объединения и пересечения:
   $A \bigcup (B \bigcup C) = (A \bigcup B) \bigcup C$,
   $A \bigcap (B \bigcap C) = (A \bigcap B) \bigcap C$.

   (c) Дистрибутивность пересечения относительно объединения и объединения относительно пересечения
   $A \bigcap (B \bigcup C) = (A \bigcap B) \bigcup (A \bigcap C)$,
   $A \bigcup (B \bigcap C) = (A \bigcup B) \bigcap (A \bigcup C)$.

   (d) Идемпотентность объединения и пересечения
   $A \bigcup A = A$, $A \bigcap A = A$.

   (e) Свойства универсального и пустого множеств
   $A \bigcup U = U$, $A \bigcap U = A$,
   $A \bigcup \emptyset = A$, $A \bigcap \emptyset = \emptyset$,
   $A \bigcup \overline{A} = U$, $A \bigcap \overline{A} = \emptyset$.

   (f) Закон двойного дополнения $\overline{(\overline{A})} = A$.

   (g) Законы де Моргана[1]
   $\overline{A \bigcup B} = \overline{A} \bigcap \overline{B}$,
   $\overline{A \bigcap B} = \overline{A} \bigcup \overline{B}$.

10. Парадокс Рассела[2]. Рассмотрим множество F, содержащее те и только те множества, которые не являются элементами самих себя: $F = \{\, M |\ M -$ множество и $M \notin M\}$. Парадокс состоит в том, что после такого способа задания множества F мы не можем однозначно ответить на вопрос: само множество F *как элемент* принадлежит F или нет?

11. Множество всех подмножеств данного множества называют булеаном (B) множества. $A = \{1, 2, 3, 4, ..., n\}$, $|A| = n$. Доказать, что $|B(A)| = 2^n$

1.2 Соответствие, отображение

1. *Упорядоченной парой* называют пару элементов (x, y) такую, что равенство двух пар $(x, y) = (a, b)$ возможно тогда и только тогда, когда $x = a$ и $y = b$.

2. *Прямым (декартовым) произведением* двух множеств A и B называется множество $A \times B = \{(x, y) |\ x \in A,\ \ y \in B\}$

3. Три свойства прямого произведения.
$$A \times \emptyset = \emptyset,$$
$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C),$$
$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C).$$

[1] Августус Морган (1806–1871) – шотландский математик, первый президент Лондонского математического общества, один из основателей формальной логики.

[2] Рассел Бертран Артур Вильям (1872-1970) – английский математик, философ идеалист, общественный деятель, лауреат Нобелевской премии по литературе (1950).

4. *Соответствием* между множествами A и B называют любое подмножество G их прямого произведения.

5. *Областью определения соответствия* (или *первой проекцией*) называется множество $DomG =$пр$_1G = \{\, x| \ \ (x,y) \in G\,\}$

6. *Областью значений соответствия* (или *второй проекцией*) называется множество $ImG =$пр$_2G = \{\, y| \ \ (x,y) \in G\,\}$.

7. *Сечением соответствия* G *по элементу* x_0 называется множество $G|_{x_0} = \{y(x_0, y) \in G\}$.

8. *Сечением соответствия* G *по элементу* y_0 называется множество $G|_{y_0} = \{\, y(x, y_0) \in G\,\}$.

9. *Соответствием, обратным соответствию* G, называется множество
$$G^{-1} = \{\, (y,x)| \ \ (x,y) \in G\,\}.$$

10. Пустым называется соответствие, которое не содержит ни одного элемента.

11. Соответствие называется полным, если $G = A \times B$.

12. Матрицы, каждый элемент которых равен нулю или единице, называются булевыми.

13. Дизъюнкция $\vee$ и конъюнкция $\wedge$. $\begin{array}{ll} 1 \vee 1 = 1 & 1 \wedge 1 = 1 \\ 1 \vee 0 = 1 & 1 \wedge 0 = 0 \\ 0 \vee 1 = 1 & 0 \wedge 1 = 0 \\ 0 \vee 0 = 0 & 0 \wedge 0 = 0 \end{array}$

14. Пусть заданы три множества X, Y и Z и два соответствия – $G_1 \subset X \times Y$ и $G_2 \subset Y \times$ $\times Z$. Композицией соответствий G_1 и G_2 называется подмножество G_3 прямого произведения $X \times Z$: $G_3 = G_2 \circ G_1 = \{\, (x,z) \ | \ \ (x,y) \in G_1, \ \ (y,z) \in G_2\,\}$.

15. Композиция $G_2 \circ G_1 \neq \emptyset$, если пересечение $Dom\, G_2 \cap ImG_1 \neq \emptyset$.

16. Соответствие $G \subset X \times Y$ называется *отображением*, если область определения соответствия совпадает с множеством X (т.е. $Dom\, G = X$ или пр$_1G = X$).

17. Отображение называется функциональным (или *однозначным*), если любое сечение $G|_x$ содержит только один элемент.

18. Шесть свойств отображений. Если $f : X \to Y$ и $A_1 \subset A_2 \subset X$, $B_1 \subset B_2 \subset Y$, то
    1. $f(A_1) \subset f(A_2)$,
    2. $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$,
    3. $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$,
    4. $f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$,
    5. $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$,
    6. $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$,

19. Отображение $f : X \to Y$ называется *сюръективным* или отображением на множество Y, если $Imf = Y$. Другими словами, f сюръективно, если каждый элемент $y \in Y$ имеет хотя бы один прообраз, т.е. $\forall y \in Y \ \exists\, x \in X : y = f(x)$.

20. Отображение $f : X \to Y$ называется *инъективным*, если из условия $x_1 \neq x_2$ следует, что $f(x_1) \neq f(x_2)$, т.е. различные элементы множества X должны иметь различные образы.

21. Отображение называется *биективным* если оно одновременно сюръективно и инъективно.

22. Пусть заданы два отображения $f : X \to Y$ и $g : Y \to Z$. *Композицией отображений (сложным отображением, суперпозицией отображений)* называют отображение $\varphi : X \to Z$, определяемое условием $\varphi(x) = g \circ f(x) = g(f(x))$, $\forall x \in X$.

23. Композиция отображений ассоциативна, т.е. для заданных трех отображений $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$, $h : X \to Z$, справедливо равенство $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

24. Отображение g называется обратным к отображению f если одновременно выполняются два условия $g \circ f = e_X$ и $f \circ g = e_Y$.

25. Когда справедливо только одно из двух условий, например, $g \circ f = e_X$, то g называют *левым обратным* отображением. Соответственно, если выполнено только второе равенство $f \circ g = e_Y$, то g называют *правым обратным* отображением.

26. **Лемма.** Если для композиции двух отображений выполняется равенство $g \circ f = e_X$, то g является сюръекцией, а f - инъекцией.

27. Отображение $f : X \to Y$ имеет обратное тогда и только тогда, когда f является биективным отображением.

28. Если $f : X \to Y$ биективно, то обратное отображение $f^{-1} : Y \to X$ также является биекцией, причем $(f^{-1})^{-1} = f$.

29. Пусть $f : X \to Y$ и $g : Y \to Z$ биективные отображения. Тогда: композиция $g \circ f$ биективных отображений биективна. $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

1.3 Отношение

1. Бинарное отношение на X — любое подмножество прямого произведения $\rho \subset X \times X$.

2. Единичное отношение e_x на X содержит только пары(x, x).

3. Полное отношение $U = X \times X$.

4. Обратное отношение $\rho^{-1} = \{(x, y)|(y, x) \in \rho\}$.

5. Отношение ρ на X рефлексивно, если для любого $x \in X$ пара $(x, x) \in \rho$.

6. Отношение ρ на X антирефлексивно, если для любого $x \in X$ пара $(x, x) \notin \rho$.

7. Отношение ρ на X симметрично, если для любой пары (x, y) из условия $(x, y) \in \rho$ следует $(y, x) \in \rho$.

8. Отношение ρ на X антисимметрично, если из условия $(x, y) \in \rho$ и $(y, x) \in \rho$ следует $x = y$.

9. Отношение ρ на X асимметрично, если для любой пары (x, y) из условия $(x, y) \in \rho$ следует $(y, x) \notin \rho$.

10. Отношение ρ на X транзитивно, если для любых двух пар (x, y)и (y, z) из условия $(x, y) \in \rho$ и $(y, z) \in \rho$ следует $(x, z) \in \rho$.

11. Композиция бинарных отношений σ и ρ на X называют отношение

$$\varphi = \rho \circ \sigma = \{(x, z)|(x, y) \in \sigma, (y, z) \in \rho\}$$

12. **Теорема.** Отношение ρ транзитивно тогда и только тогда, когда $\rho \circ \rho \subset \rho$.

13. Отношение $\tilde{\rho}$ называют замыканием отношения ρ на свойство A , если $\tilde{\rho}$ обладает свойством A, $\rho \subset \tilde{\rho}$ и для любого отношенияσсо свойством A , $\tilde{\rho} \subset \sigma$.

14. Транзитивное замыкание произвольного отношения имеет вид $\rho^+ = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \rho^k$

15. Рефлексивное транзитивное замыкание отношения имеет вид $\rho^+ = \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} \rho^k$

16. Алгоритм Уоршолла транзитивного замыкания. Рассмотрим булеву матрицу M отношения. Если $m_{ij} = 1, i \neq j$, то i-я строку матрицы заменяем поэлементной дизъюнкцией i-й и j-й строк матрицы. Процедуру повторяем до тех пор, пока процесс не установится — матрица перестанет изменяться.

17. Отношение называют отношением эквивалентности, если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно.

18. Множество элементов из X, эквивалентных некоторому элементу x_0, называется классом эквивалентности элемента x_0. Обозначения класса эквивалентности $[x_0]$.

19. Множество всех классов эквивалентности - фактор-множество.

20. Мощность фактор-множества - индекс разбиения.

21. Любое отношение эквивалентности порождает разбиение.

22. Любое разбиение порождает отношение эквивалентности.

23. Отношение называют предпорядком, если оно рефлексивно и транзитивно.

24. Отношение называют порядком, если оно рефлексивно, антисимметрично и транзитивно.

25. Порядок ρ называется линейным (или полным), если для любых элементов $x\rho y$ или $y\rho x$. В противном случае — частичный порядок.

26. Отношение называют строгим порядком, если оно асимметрично и транзитивно.

27. Элемент $y \in X$ накрывает элемент $x \in X$, если $x \prec y$ и не существует элемента $z \in X$ такого, что $x \prec z \prec y$.

28. Любое упорядоченное множество можно представить диаграммой Хассе.

29. Пусть ρ есть частичный порядок на X. Отношение σна элементах прямого произведения $(x, y)\sigma(a, b)$ называется отношением Парето, если оно выполняется в том и только в том случае, когда $x\rho a$ и $y\rho b$.

30. Алфавит - множество символов с отношением линейного порядка.

31. Лексикографический ρ порядок $a_1 \prec a_2$, где $a_1 = x_{11}x_{12}...x_{1i}..x_{1n}$ и $a_2 = x_{21}x_{22}...x_{2i}..x_{2m}$ на алфавите задается одним из двух условий 1) $a_1 = bx_{1i}c, \quad a_2 = bx_{2i}d$, где b, c, d - некоторые слова, возможно пустые, а символы x_{1i} и x_{2i} связаны отношением линейного порядка $x_{1i}\rho x_{2i}$ или 2) $a_1 = a_2 f$, где f- некоторое непустое слово.

1.4 Алгебраические структуры

1. *Бинарной операцией* на множестве X называется любое фиксированное отображение $\varphi : X \times \times X \to X$.

2. Бинарная операция $*$ на множестве X называется *ассоциативной,* если $a * (b * c) = (a * b) * c$ для любых $a, b, c \in X$. Операция $*$ называется *коммутативной,* если $a * b = b * a$.

3. Элемент $e \in X$ называется *единичным* (или *нейтральным*) относительно бинарной операции $*$, если $e * x = x * e = x$ для любого элемента $x \in X$.

4. Единичный элемент является единственным.

5. Множество X с заданной на этом множестве ассоциативной операцией (т.е. алгебраическая структура $(X,*)$ с ассоциативной операцией) называется *полугруппой*.

6. Полугруппа с единичным элементом называется *полугруппой с единицей* или моноидом.

7. Обратным к элементу x моноида $(X, *, e,)$называется элемент $y \in X$ такой, что $xy = yx = e$.

8. Моноид (X , $*$, e), у которого для каждого элемента $x \in X$ существует обратный элемент $x^{-1} \in X$, называется группой.

9. Четыре аксиомы, которым удовлетворяет группа.

10. *Мультипликативная и аддитивная группа.*

11. Группа с коммутативной бинарной операцией называется *коммутативной* или *абелевой.*

12. Непустое подмножество $H \subset G$ называется *подгруппой* группы G, если для любых $h_1, h_2 \in H$ элемент $h_1 * h_2 \in H$ и для любого $h \in H$ элемент $h^{-1} \in H$.

13. Подгруппа H, отличная от E и G, называется *собственной подгруппой* группы G.

14. Таблица Кэли. Каждый столбец (строка) таблицы Кэли содержит все элементы группы.

15. *Симметрической* группой S_n называется множество всех биективных отображений множества X на себя, снабженное бинарной операцией композиции отображений.

16. Циклическая группа содержит все возможные целые степени одного и того же элемента a.

17. Если циклическая группа содержит только элементы e, a, a^2,..., a^n, то такую циклическую группу называют *конечной* (Card $G = n$). Если же для любого натурального n все степени a^n различны, то G называется *бесконечной* циклической группой.

18. Сравнение по модулю m является отношением эквивалентности.

19. Группы G и H называются *изоморфными* (обозначение $G \cong H$), если существует биективное отображение $f: G \to H$, "сохраняющее" групповую операцию, т.е.$f(x * y) = f(x) \circ f(y)$.

20. Три свойства изоморфизма.

21. **Теорема.** Кэли. *Любая конечная группа порядка n изоморфна некоторой подгруппе симметрической группы S_n(без доказательства).*

22. **Теорема.** *Любая циклическая группа порядка m изоморфна группе $\boldsymbol{Z}_m$ классов вычетов по модулю m(без доказательства).*

23. Пусть K есть непустое множество, на котором заданы две бинарные операции: + (сложение) и (умножение), удовлетворяющие следующим условиям:

    (a) структура $(K, +)$ является абелевой (коммутативной) группой;

    (b) структура $(K, \bullet)$ есть полугруппа;

    (c) операции сложения и умножения связаны законом дистрибутивности:$(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ и $c \cdot (a+b) = c \cdot a + c \cdot b$ для любых $a, b, c \in K$.

    Алгебраическая структура $(K, +, \bullet)$, подчиненная этим требованиям, называется кольцом. При этом структура $(K, +)$ называется аддитивной группой кольца, а структура $(K, \bullet)$ называется его мультипликативной полугруппой.

24. Кольцо $(K, +, \bullet)$ называется полем, если выполняются следующие условия:

    (a) структура $(K, +, 0)$ – абелева группа; структура $(K \setminus \{0\}, \bullet, 1)$ – коммутативная группа;

    (b) выполняется закон дистрибутивности $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ для любых $a, b, c \in K$.

25. **Теорема.** *Кольцо классов вычетов ($\boldsymbol{Z}_m, +, \bullet$) тогда и только тогда является полем, когда m есть простое число.*

2 ТЕОРИЯ ГРАФОВ

2.1 Определения

Граф G — совокупность двух множеств: вершин V и ребер E, между которыми определено отношение инцидентности. Каждое ребро e из E инцидентно ровно двум вершинам v', v'', которые оно соединяет. При этом вершина v' и ребро e называются инцидентными друг другу, а вершины v' и v'' называются смежными. Часто пишут v', v'' из G и e из G. Если $|V(G)| = n$, $|E(G)| = m$, то граф G есть (n, m) граф, где n — порядок графа, m — размер графа.

1. Ребро (v_1, v_2) может быть ориентированным и иметь начало и конец (дуга в орграфе).

2. Ребро (v, v) называется петлей (концевые вершины совпадают).

3. Граф, содержащий ориентированные ребра (дуги), называется орграфом.

4. Граф, не содержащий ориентированные ребра (дуги), называется неографом.

5. Основание орграфа — неограф с теми же вершинами, но ребрами вместо соответствующих дуг.

6. Ребра, инцидентные одной паре вершин, называются параллельными или кратными.

7. Граф с кратными ребрами называется мультиграфом.

8. Граф, содержащий петли (и кратные ребра), называется псевдографом.

9. Конечный граф – число вершин (n) и ребер (m) конечно .

10. Пустой граф — множество ребер пусто (число вершин может быть произвольным).

11. Полный граф — граф без петель и кратных ребер, каждая пара вершин соединена ребром. Обозначение для полного графа с n вершинами - K_n.

12. Граф называется **двудольным**, если существует такое разбиение множества его вершин на две части, что концы каждого ребра принадлежат разным частям (долям).

13. **Теорема.** (Кениг). *Для двудольности графа необходимо и достаточно, чтобы он не содержал циклов нечетной длины.*

14. Если любые две вершины двудольного графа, входящие в разные доли, смежны, то граф называется **полным двудольным**. Обозначение для полного двудольного графа с n и m вершинами - $K_{n,m}$.

15. Дополнение графа G – граф, имеющий те же вершины, что и граф G, и содержащий только те ребра, которые нужно добавить к G, чтобы получить полный граф.

16. Каждому неориентированному графу **канонически соответствует** ориентированный граф с теми же вершинами, в котором каждое ребро заменено ребрами, инцидентными тем же вершинам и имеющими противоположные направления.

17. Локальная степень вершины — число ребер ей инцидентных. В неографе сумма степеней всех вершин равна удвоенному числу ребер (лемма о рукопожатиях). Петля дает вклад, равный 2 в степень вершины.

    Доказательство. Проводим индукцию по числу ребер. Для $m = 1$ лемма очевидна (одно ребро и две вершины со степенями по 1). Предполагая, что лемма справедлива для m ребер доказываем, что она справедлива и для $m + 1$ ребра. Для этого добавляем к графу ребро (в том числе и кратное), которое увеличивает число ребер на 1, а сумму степеней на 2, т.к. у ребра только 2 конца.

18. **Следствие.** (1). Произвольный граф имеет четное число вершин нечетной степени.

    Доказательство. Вычислим отдельно сумму степеней вершин четной степени $\sum deg^{odd}$ и сумму степеней вершин нечетной степени $\sum deg^{odd}$. Так как по лемме $\sum deg^{even} + \sum deg^{odd} = 2m$, то замечая что первое слагаемое четно и сумма четна то и второе слагаемое тоже четно. А так как второе слагаемое есть сумма нечетных чисел, то отсюда следует, что их число четно, ч.т.д.

19. **Следствие.** (2). Число ребер в полном графе $n(n - 1)/2$.

    Доказательство. В полном K_n графе каждая из n вершин соединяется со всеми остальными $n - 1$ вершинами, следовательно, сумма степеней равна $(n - 1)n$. Согласно лемме это число равно $2m$. Поэтому, $m = (n - 1)n/2$.

20. В орграфе две локальных степени вершины v: $deg(v)^+$ и $deg(v)^-$ (число ребер с началом и концом в v)

21. Графы равны, если множества вершин и инцидентных им ребер совпадают.

22. Графы, отличающиеся только нумерацией вершин и ребер, называются изоморфными.

23. Граф называется регулярным (однородным), если степени всех его вершин равны.

24. Характеристический полином графа - характеристический полином его матрицы смежности.

25. Для регулярного графа степени d число d является корнем характеристического полинома. Если граф связный, то кратность d равна 1. Для любого корня характеристического полинома $d \geq |\lambda|$.

26. Числом вершинной связанности (или просто числом связанности)$\kappa(G)$ графа G называется наименьшее число вершин, удаление которых приводит к несвязному или одновершинному графу.

27. Числом реберной связанности $\lambda(G)$ графа G называется наименьшее число ребер, удаление которых приводит к несвязному графу.

28. Граф называется k-связным, если $\kappa(G) \geq k$.

29. **Теорема.** *Для любого графа G верно неравенство $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$, где $\delta(G)$ — минимальная из степеней вершин графа.*

2.2 Способы задания графов

1. Матрица инцидентности A. Число строк равно числу вершин, число столбцов – ребер; $a_{ij} = 1$ если вершина i инцидентна ребру j, в противном случае $a_{ij} = 0$. Для орграфа $a_{ij} = -1$ если из вершины i исходит ребро j, $a_{ij} = 1$ если в вершину i входит ребро j. Если ребро – петля, то $a_{ij} = 2$.

2. Список ребер. В первом столбце ребра, во втором вершины им инцидентные.

3. Матрица смежности – квадратная симметричная матрица. По горизонтали и вертикали – все вершины. D_{ij} = число ребер, соединяющее вершины i, j.

4. Матрица Кирхгофа [3]. $b_{ij} = -1$, если вершины i и j смежны, $b_{ij} = 0$ если вершины i и j не смежны, $b_{ii} = -deg(i)$. Сумма элементов в каждой строке и каждом столбце матрицы Кирхгофа равна 0.

5. **Теорема.** *Алгебраические дополнения всех элементов матрицы Кирхгофа равны между собой* ([8], с.18).

   Доказательство. Рассмотрим граф порядка n. Матрица Кирхгофа $B = \{\beta_{ij}\}$. Обозначим $\vec{e} = \{1, 1, ...1\}$ — вектор длиной n, состоящий из единиц. Так как $\sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} = 0$, $i = 1..n$, то $B\vec{e} = 0$. Аналогично $\sum_{i=1}^{n} \beta_{ij} = 0$, $j = 1..n$ и $\vec{e}B = 0$. Следовательно, $\det B = 0$. Если $\mathrm{rank} B < n - 1$, то утверждение доказано, т.к. в этом случае алгебраические дополнения всех элементов матрицы равны 0. Пусть $\mathrm{rank} B = n - 1$. Обозначим $\hat{B}$ — присоединенная к B матрица, составленная из алгебраических дополнений B_{ij}. Очевидно, $B\hat{B} = \hat{B}B = \det BE$, где E — единичная матрица. Поэтому, столбцы X матрицы $\hat{B}$ удовлетворяют системе $BX = 0$. Но и $Be = 0$, т.е. любой столбец X пропорционален e, иначе говоря, $B_{i1} = B_{i2} ... = B_{in}$, $i = 1, 2, ..n$. Точно также $B_{1j} = B_{2j} ... = B_{nj}$, $j = 1, 2, ..n$. Следовательно, все алгебраические дополнения матрицы Кирхгофа равны.

2.3 Связность

1. Отношение вершин графа "существует маршрут, связывающий вершины" является отношением эквивалентности, задающее разбиение графа на компоненты связности. Индекс разбиения — k.

2. Разрезающее множество — множество ребер, удаление которого из графа приводит к увеличению компонент связности.

3. Разрез минимальное разрезающее множество.

4. Мост — одноэлементный разрез.

5. Если для некоторых вершин u и v в графе существует маршрут $u - v$, то существует и простая цепь $u - v$.

6. Каждый граф является дизъюнктивным объединением своих компонент связности.

[3] Кирхгоф Густав Роберт (1824-1887) – немецкий физик и механик

7. При удалении из графа моста (или разреза) число компонент связности увеличивается на 1.

8. Ребро графа является мостом тогда и только тогда, когда оно не содержится ни в одном цикле.

9. **Теорема.** *Для обыкновенного* (n, m, k) *графа справедлива оценка*

$$n - k \leq m \leq \frac{(n-k)(n-k+1)}{2}. \tag{1}$$

Доказательство. 1. Докажем $m \leq (n-k)(n-k+1)/2$. Пусть $G^* - (n, m_1, k)$ граф с максимально возможным числом ребер m_1 для этого числа вершин и числа компонент связности. Очевидно, каждая компонента связности графа G^* является полным графом. Имеем дизъюнктивное объединение k полных графов

$$G^* = K_{n1} \dot{\cup} K_{n2} \dot{\cup} .. \dot{\cup} K_{nk}.$$

Пусть для определенности

$$n_1 \geq n_2 \geq ... \geq n_k. \tag{2}$$

Докажем, что $n_2 = 1$. Предположим, что $n_2 > 1$. Перенесем какую-либо вершину графа K_{n2} в K_{n1}, число вершин и компонент связности не изменится, изменится только число ребер. Если раньше, в полном графе K_{n2} вершина была соединена с остальными вершинами $n_2 - 1$ ребрами, то в новом ее положении она должна быть соединена со всеми n_1 вершинами, т.е. в графе G^* будет ребер больше, т.к. $n_1 \geq n_2$ и, следовательно, $n_1 > n_2 - 1$, что противоречит исходному предположению о максимальном числе ребер на данном числе вершин и числе компонент связности. Таким образом $n_2 = 1$, а это означает в силу (2) , что и $n_3 = 1$,... $n_k = 1$, т.е. все графы $K_{n2}..K_{nk}$ пустые, содержащие по одной вершине (всего $k-1$ вершин). Следовательно все ребра графа G^* содержатся в K_{n1}. Число вершин этого графа $n_1 = n - (k-1)$. Согласно следствию 2 из леммы о рукопожатиях (19)

$$m_1 = (n_1 - 1)n_1/2 = (n-k)(n-k+1)/2.$$

2. Докажем оценку $n - k \leq m$. Проведем индукцию по числу ребер. В пустом графе при $m = 0$ число вершин совпадает с числом компонент связности $n = k$. Пусть при $m > 0$ оценка имеет место. Добавим к графу одно ребро. При этом возможны два случая. Если вместе с ребром к графу добавятся две вершины, то число компонент связности увеличится на 1. $\bar{n} = n + 2$, $\bar{m} = m + 1$, $\bar{k} = k + 1$. В силу предположения индукции $n - k + 1 \leq m + 1$. Но $n - k + 1 = \bar{n} - \bar{k}$, следовательно, $\bar{n} - \bar{k} \leq \bar{m}$, ч.т.д.

10. **Следствие.** (1). *Если для обыкновенного* (n, m, k) *графа* $m > (n-1)(n-2)/2$*, то граф связен.*

Доказательство. Предположим противное: пусть выполняется оценка

$$m > (n-1)(n-2)/2, \tag{3}$$

но $k \geq 2$. Тогда $n - k \leq (n-2)$ и $n - k + 1 \leq (n-1)$. Отсюда, согласно оценке (1)

$$m \leq \frac{(n-k)(n-k+1)}{2} \leq \frac{(n-2)(n-1)}{2},$$

что противоречит (3).

11. **Следствие.** (2). *Для произвольного* (n, m, k) *графа* $m \geq n - k$.

Доказательство. Для обыкновенного (n, m, k) графа $m \geq n - k$. Для произвольного графа $m_1 \geq m \geq n - k$.

12. Орграф называется связным, если связно его основание.

13. Вершина u достижима из вершины v, если существует (v, u) маршрут.

14. Орграф называется сильно связным (или орсвязным), если любая его вершина достижима из любой вершины.

15. Граф называется ориентируемым, если он является основанием сильно связного графа.

16. **Теорема.** Связный граф ориентируем тогда и только тогда, когда каждое его ребро не является мостом.

2.4 Маршруты, пути, цепи и циклы

1. Маршрут — последовательность ребер, в которых каждые два соседних ребра имеют общую вершину.
2. Маршрут, в котором начало и конец совпадают — циклический.
3. Маршрут в неографе, в котором все ребра разные — цепь.
4. Маршрут в орграфе, в котором все дуги разные — путь.
5. Путь, в котором начало и конец совпадают — контур.
6. Цепь с неповторяющимися вершинами — простая.
7. Циклический маршрут называется циклом, если он цепь и простым циклом, если эта цепь простая.
8. Вершины связанные, если существует маршрут из одной вершины в другую.
9. Связанный граф — если все его вершины связаны.
10. Число ребер маршрута — его длина.
11. Цепь в графе называется полуэйлеровой (эйлеровой), если она содержит все ребра и все вершины графа.
12. Эйлеров цикл – цикл графа, содержащий все его ребра.
13. Эйлеров граф – граф, имеющий Эйлеров цикл.
14. **Теорема.** (Эйлер). *Конечный неориентированный граф эйлеров тогда и только тогда, когда он связан и степени его вершин четны.*
15. **Теорема.** *Мультиграф обладает эйлеровой цепью тогда и только тогда, когда он связен и число вершин нечетной степени равно 0 или 2.*
16. **Теорема.** *Пусть $A = \{\alpha_{ij}\}$ — матрица смежности графа G без петель и $A^k = \{\beta_{ij}\}$, где $k \in N$. Тогда β_{ij} равно числу (v_i, v_j) маршрутов длины k.*
17. В произвольном графе, содержащем $2k$ вершин нечетной степени где $k \geq 1$, множество ребер графа можно разбить на k цепей, каждая из которых соединяет две вершины нечетной степени.
18. *Гамильтонова* цепь — простая цепь, проходящий через все вершины.
19. *Гамильтонов* цикл — простой цикл, проходящий через все вершины.
20. Граф называется *Гамильтоновым*, если он обладает гамильтоновым циклом.
21. **Лемма.** Последовательность степеней графа G мажорируется последовательностью степеней графа G', полученного из G добавлением нового ребра.
22. **Теорема.** (Хватал) *Пусть G — обыкновенный граф с последовательностью степеней $d_1 \leq d_2 \leq d_3 \leq ..d_n$ и $n \geq 3$. Если для любого верна импликация*

$$d_k \leq k < n/2 \rightarrow d_{n-k} \geq n - k,$$

то граф G гамильтонов.

2.5 Клики, независимые множества

1. Множество вершин $D \subseteq V$ называется *доминирующим* множеством графа $G(V, E)$, если каждая не принадлежащая D вершина является конечной вершиной некоторого ребра от вершины из D.

2. Минимальное доминирующее множество — доминирующее множество, не обладающее доминирующим подмножеством.

3. Число доминирования (внешней устойчивости) — минимальный порядок доминирующего множества (β_0).

4. Множество вершин $I \subseteq V$ называется *независимым* (внутренне устойчивым), если оно образует пустой граф (нет ребер, соединяющих вершины).

5. Множество вершин $I \subseteq V$ называется *полностью зависимым*, если оно образует полный граф (все вершины соединены).

6. Максимально независимое множество есть независимое множество, которое теряет свойство независимости при добавлении к нему любой вершины.

7. Порядок ε_0 максимально независимого множества графа называется числом вершинной независимости графа (максимальный порядок пустого подграфа).

8. Независимое множество ребер состоит из ребер, не имеющих общих вершин.

9. Размер ε_1 максимально независимого множества ребер называется числом реберной независимости графа.

10. **Теорема.** Независимое множество максимально тогда и только тогда, когда оно доминирующее, и число вершинной независимости не может быть меньше числа доминирования $\varepsilon_0 \geq \beta_0$.

11. Клика — полностью зависимое множество, теряющее это свойство при добавлении любой вершины.

2.6 Реберный граф

1. Для произвольного графа G $L(G)$ определяется условиями:

   (a) множество вершин реберного графа $L(G)$ совпадает с множеством ребер графа G: $VL(G) = EG$;

   (b) вершины e_1 и e_2 смежны в $L(G)$ тогда и только тогда, ребра e_1 и e_2 смежны в G.

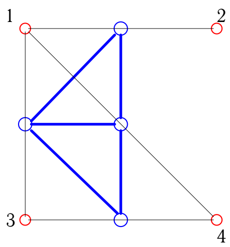


Рис. 1

На рисунке совмещены два графа. Граф G с вершинами 1,2,3,4 и реберный граф $L(G)$ (синие линии), вершины которого изображены на серединах соответствующих ребер исходного графа.

2. Если $d_1, d_2, ..., d_n$ – степенная последовательность (n, m) графа G, то $L(G)$ является (m, l) - графом, где

$$l = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} d_i^2 - m.$$

Доказательство. [5] Каждая вершина v_i, которой инцидентны d_i ребер графа G, порождает $d_i(d_i-1)/2$ ребер графа $L(G)$, поэтому

$$l = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} d_i^2 - \sum_{i=1}^{n} d_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} d_i^2 - m$$

согласно лемме о рукопожатиях.

3. Если $I(G)$ матрица инцидентности графа G и $A = A(L(G))$ — матрица смежности графа $L(G)$, записанная при той же нумерации ребер, что и I, то

$$I^T I = A + 2E. \qquad (*)$$

4. Любой корень характеристического полинома всякого реберного графа не меньше -2.

   Доказательство. Пусть G – реберный граф. Тогда для него верно равенство (*). С другой стороны, пусть $Ax = \lambda x$ для ненулевого вектора x. Тогда в силу равенства (*) $I^T I x = (\lambda+2)x$. Рассмотрим квадрат вектора Ix

$$|Ix|^2 = x^T I^T I x = (\lambda+2)x^T x = (\lambda+2)|x|^2$$

   Следовательно, $\lambda + 2 \geq 0$ ч.т.д.

2.7 Планарность

1. Плоский граф — граф с вершинами, расположенными на плоскости и непересекающимися ребрами.
2. Планарный граф изоморфен плоскому.
3. Всякий подграф планарного графа планарен.
4. **Жорданова** кривая — непрерывная линия без самопересечений.
5. Задача о трех домах и трех колодцах. Провести от каждого из трех домов дорожки ко всем трем колодцам так, чтобы дорожки не пересекались. Граф этой задачи не является планарным.
6. Почти все графы не являются планарными.
7. Грань графа — множество всех точек плоскости, каждая пара которых может быть соединена жордановой кривой.
8. Граница грани — множество вершин и ребер, принадлежащих грани.
9. Всякий плоский граф имеет одну, и притом единственную, неограниченную грань. Эта грань является внешней гранью графа, остальные — внутренние.
10. **Теорема.** (Эйлер). *Для всякого связного плоского графа $n-m+f=2$, где n — число вершин, m — число ребер, f — число граней* .
11. **Подразбиение** ребра — удаление ребра и добавление двух новых, инцидентных вершинам удаленного ребра и соединенных между собой новой вершиной.
12. Два графа называются **гомеоморфными**, если оба они могут быть получены из одного и того же графа подразбиением его ребер.
13. **Теорема.** (Понтрягин-Куратовский). *Граф планарен тогда и только тогда, когда он не содержит подграфов, гомеоморфных* K_5 и $K_{3,3}$.
14. Толщиной графа называется минимальное число его планарных подграфов.
15. Треугольник — грань плоского графа, ограниченная 3-циклом (треугольником).
16. Плоская триангуляция — связный плоский граф в котором каждая его грань (в том числе и внешняя) является треугольником.
17. Максимальным плоским графом (планарным) графом называется n - вершинный ($n \geq 3$) граф, который перестает быть плоским (планарным) при добавлении любого ребра.
18. **Теорема.** *Граф является максимальным плоским графом тогда и только тогда, когда он представляет собой плоскую триангуляцию.*
19. Для максимального планарного графа $m = 3n - 6$.

2.8 Деревья и лес

1. Дерево — связный граф без циклов.

2. Лес (или ациклический граф) — неограф без циклов (может быть и несвязным).

3. **Теорема.** *Для неографа G с n вершинами без петель следующие условия эквивалентны:*

   (a) *G — дерево;*

   (b) *G — связный граф, содержащий $n-1$ ребро;*

   (c) *G — ациклический граф, содержащий $n-1$ ребро;*

   (d) *любые две несовпадающие вершины графа G соединяет единственная цепь.*

   (e) *G — ациклический граф, такой, что если в него добавить одно ребро, то в нем появится ровно один цикл.*

4. Остов (каркас) связного графа — дерево, содержащее все вершины графа. Определяется неоднозначно.

5. **Теорема.** *При $n > 1$ число остовов в полном графе K_n равно n^{n-2}.*

   Доказательство. ([5], с.59) Матрица Кирхгофа графа K_n имеет вид

$$\begin{vmatrix} n-1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & n-1 & \dots & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -1 & \dots & n-1 \end{vmatrix}.$$

   Рассмотрим алгебраическое дополнение A_{11} элемента матрицы. Очевидно оно имеет тот же вид, но размер матрицы будет $n-1 \times n-1$. Преобразуем определитель, добавив к первой строке последовательно все остальные $n-2$ строки. Для первого столбца имеем $n-1+(n-2)(-1)=1$. То же получится и для других элементов первой строки. В результате определитель примет простой вид

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & n-1 & \dots & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -1 & \dots & n-1 \end{vmatrix}.$$

   Добавим первую строку (из единиц) ко всем строкам определителя

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & n & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & n \end{vmatrix} = n^{n-2}.$$

   Теорема. (А. Кэли). *Число помеченных деревьев порядка n равно n^{n-2}.*

6. Ранг графа $\nu^* = n - k$, где n — число вершин, k — число компонент связности графа.

7. **Цикломатическое** число (или коранг) графа $\nu = m - \nu^*$, где m — число ребер.

8. **Теорема.** *Число ребер неографа, которые необходимо удалить для получения остова, не зависит от последовательности их удаления и равно цикломатическому числу графа.*

9. Неограф G является лесом тогда и только тогда, когда $\nu(G) = 0$.

10. Неограф G имеет единственный цикл тогда и только тогда, когда $\nu(G) = 1$.

11. Остов неографа имеет ν^* ребер.

12. Ребра графа, не входящие в остов, называются хордами.

13. Цикл, получающийся при добавлении к остову графа его хорды, называется фундаментальным относительно этой хорды.

14. Код Гапта ([10], с.85). Код состоит из чисел сыновей каждой вершины дерева при обходе дерева слева направо, снизу вверх. Код Гапта выписывается для дерева, имеющего 2 или 3 сына у каждой вершины. Для дерева на рис. 2 код имеет вид (2,3,3,3).

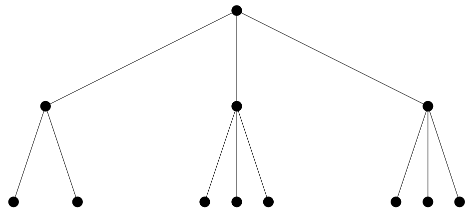


Рис. 2

2.9 Центр, центроид

1. Расстояние между вершинами u и v— минимальное число ребер, в маршруте $u - v$.
2. Эксцентриситет вершины u — максимальное расстояние $u - v$ по всем вершинам v графа.
3. Наименьший эксцентриситет вершин графа — радиус графа.
4. Наибольший эксцентриситет вершин графа — диаметр графа.
5. Центр графа — вершины с наименьшим эксцентриситетом.
6. Ветвь к вершине u дерева — максимальный подграф, содержащий u в качестве висячей вершины.
7. Вес вершины — наибольший размер ее ветвей.
8. Центроид дерева — вершины с наименьшим весом [12].

2.10 Раскраски

1. Произвольная функция на множестве вершин графа называется раскраской графа.
2. Раскраска называется правильной, если $f(u_1) \neq f(u_2)$ для любых смежных вершин u_1 и u_2.
3. Минимальное число k, при котором граф G является k- раскрашиваемым, называется хроматическим числом графа $\chi(G)$.
4. **Теорема.** *Для любого графа G верно неравенство $\chi(G) \leq \Delta(G)$, где $\Delta(G)$ — максимальная из степеней вершин графа.*
5. Произвольная функция на множестве ребер графа называется реберной раскраской графа.
6. Реберная раскраска называется правильной, если смежные ребра имеют разные цвета.
7. Минимальное число k, при котором граф G является реберно k- раскрашиваемым, называется хроматическим индексом графа $\chi'(G)$.
8. **Теорема.** (Визинг). *Для любого графа G верно неравенство*
$$\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1.$$
9. **Теорема.** (Кениг). *Для любого двудольного графа G верно равенство $\Delta(G) = \chi'(G)$.*
10. Для полных графов справедливы формулы
$$\chi'(K_{2n+1}) = 2n + 1, \quad \chi'(K_{2n}) = 2n - 1.$$
11. **Теорема.** (Четырех красок). *Для планарного графа G верно неравенство $\chi(G) \leq 4$.*

12. **Теорема.** (Кениг). *Для ненулевого графа* $\chi = 2$ *тогда и только тогда, когда граф не содержит циклов нечетной длины.*

13. **Следствие.** Для дерева $\chi = 2$.

14. Стягивание ребра — отождествление его вершин.

15. Граф G называется стягиваемым к графу H, если H получается из G последовательным стягиванием его ребер.

16. Число Хардвигера графа G — максимальный порядок полного графа, к которому стягивается граф G.

17. **Лемма.** (1) Хроматический полином графа имеет вид $P(G,x) = P(G_1,x) + P(G_2,x)$, где G_1 — граф, полученный из G добавлением нового ребра (uv), а граф G_2 получается из G отождествлением вершин u и v.

18. Хроматическая редукция — процесс нахождения семейства полных графов с помощью леммы 1.

19. Факториальная степень переменной $P(K_n,x) = x^{(n)} = x(x-1)\cdot ...(x-(n-1))$.

20. $x^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} s_1(n,k)x^k$, где $s_1(n,k)$ — числа Стирлинга первого рода.

21. $x^n = \sum_{k=0}^{n} s_2(n,k)x^{(k)}$, где $s_2(n,k)$ – числа Стирлинга второго рода, обладающие следующими свойствами $s_2(n,k) = s_2(n-1,k-1) + ks_2(n-1,k)$, $0 < k < n$, $s_2(n,n) = 1$, $(n \geq 0)$, $s_2(n,0) = = 0$, $(n > 0)$.

3 РАСЧЕТНЫЕ ЗАДАНИЯ

3.1 Отношение

Дано отношение, заданное матрицей

$$M = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Исследовать отношение на симметрию, антисимметрию, асимметрию, рефлексивность, антирефлексивность.

Найти транзитивное замыкание отношения. Построить граф отношения ρ и его транзитивного замыкания.

Решение

Исследуем свойства данного отношения.

1) Данное отношение не является симметричным, так как матрица несимметрична. Например, пара (2,1) принадлежит ρ, а пара (1,2) ему не принадлежит.

2) Отношение антисимметрично, так как нет ни одной пары $m_{ij} = m_{ji} = 1, i \neq j$.

3) Отношение антисимметрично, но не асимметрично, так как на диагонали матрицы имеются элементы равные 1.

4) Все диагональные элементы матрицы рефлексивного отношения равны

1. Данное отношение не является рефлексивным.

5) Отношение не обладает свойством антирефлексивности, так как диагональ матрицы ненулевая.

Найдем транзитивное замыкание ρ.

Данное отношение не является транзитивным, так как, например, пары (1,4) и (4,3) принадлежат ρ, а пара (1,3) ему не принадлежит.

Способ 1.

1. Вычисляем матрицу композиции $\rho^2 = \rho \circ \rho$. Для этого умножаем[4] матрицу саму на себя $M_1 = MM$.

Для $i, j = 1..4$ вычисляем

$$m_{1_{ij}} = (m_{i1} \wedge m_{1j}) \vee (m_{i2} \wedge m_{2j}) \vee (m_{i3} \wedge m_{3j}) \vee (m_{i4} \wedge m_{4j}).$$

Получаем

$$M_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

2. Находим логическую сумму (дизъюнкцию) матриц. Поэлементная дизъюнкция матриц дает

$$M_2 = M \vee M_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

3. Сравним M_2 и матрицу M. Если $M_2 = M$, то M_2 — искомая матрица. Если $M_2 \neq M$, то полагаем $M = M_2$, возвращаемся к п. 1 и повторяем всю процедуру для новой матрицы. В данном случае M$_2$ ≠M. Принимаем

$$M = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

1'. Умножаем матрицу саму на себя

$$M_1 = MM = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

2'. Находим логическую сумму (дизъюнкцию) матриц

$$M_2 = M \vee M_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

3'. Сравниваем: $M_2 \neq M$. Полагаем $M = M_2$ и повторяем процедуру еще раз.

1".

$$M_1 = MM = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

2". Находим сумму

$$M_2 = M \vee M_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

3". Сравниваем: $M_2 = M$. Следовательно, M_2 — матрица транзитивного замыкания заданного отношения.

[4] Не путать произведение булевых матриц $A = BC$ с поэлементным логическим умножением $B \wedge C$. Очевидно $a_{ij} = 1$, если хотя бы в одном случае k -й элемент i -й строки первого сомножителя и k -й элемент j-го столбца второго сомножителя одновременно равны 1. В противном случае $a_{ij} = 0$.

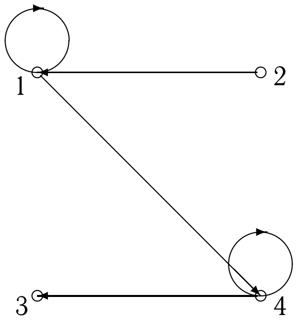


Рис. 3. Граф отношения ρ

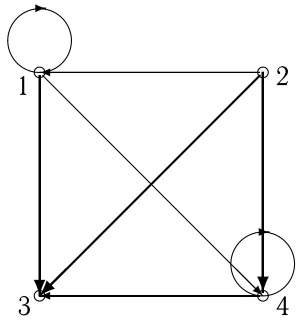


Рис. 4. Граф транзитивного замыкания ρ

Способ 2. Алгоритм Уоршолла[1]

Рассматриваем все внедиагональные элементы матрицы. Если $m_{ij} \neq 0$, то i-ю строку заменяем дизъюнкцией i-й и j-й строк.

1. Элемент $m_{14} = 1$. Первую строку заменяем поэлементной дизъюнкцией первой и четвертой строки

$$M_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

2. Элемент $m_{21} = 1$. Вторую строку заменяем поэлементной дизъюнкцией второй и первой строки

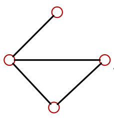
$$M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

3. Элемент $m_{43} = 1$. Дизъюнкция четвертой и третьей строки не меняет вид матрицы. Таким образом полученная матрица является матрицей транзитивного замыкания отношения ρ.

Оба способа дают один и тот же результат.

На рис. 3 и рис. 4 представлены графы отношения ρ и его транзитивного замыкания. Диагональные элементы матрицы соответствуют петлям на графе. Матрица несимметричная, поэтому граф отношения ориентированный.

3.2 Хроматический полином

Задача. Найти хроматический полином графа .

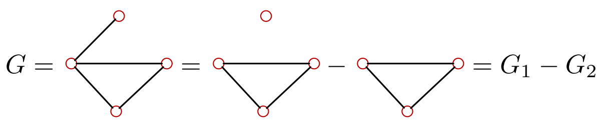
Решение

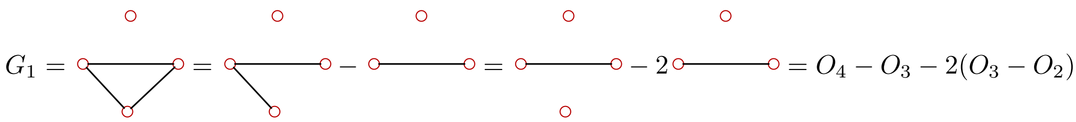
Способ 1

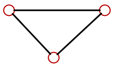
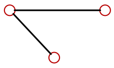
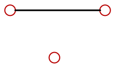
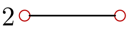
Воспользуемся леммой, записанной в виде

$$P(G_1, x) = P(G, x) - P(G_2, x)$$

Убирая ребра и отождествляя соответствующие вершины, сведем исходный граф к пустым графам. Известно, что для пустого графа $P(O_n, x) = x^n$.





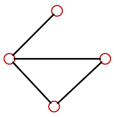
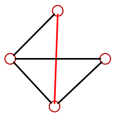
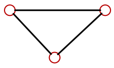
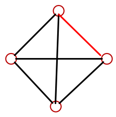
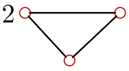
$G_2 =$  $=$  $-$ $=$  $- 2$  $= O_3 - O_2 - 2(O_2 - O_1)$

$$G = G_1 - G_2 = O_4 - O_3 - 2(O_3 - O_2) - (O_3 - O_2 - 2(O_2 - O_1)) = O_4 - 4O_3 + 5O_2 - 2O_1.$$

$$P(G, x) = x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 2x$$

Способ 2. Хроматическая редукция

Добавляя ребра и отождествляя соответствующие вершины, получим полные графы. Известно, что для полного графа хроматический полином равен факториальной степени переменной $P(O_n, x) = x^{(n)}$.

$G =$  $=$  $+$  $=$  $+ 2$  $= K_4 + 2K_3$

$$P(G, x) = x^{(4)} + 2x^{(3)} = x(x-1)(x-2)(x-3) + 2x(x-1)(x-2) = x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 2x$$

3.3 Ранг-полином

Ранг графа определяется как $\nu^* = n - k$, где n — число вершин, k — число компонент связности графа. Коранг графа, или цикломатический ранг, есть $\nu = m - \nu^* = m - n + k$, где m — число ребер.

Ранг-полином[5] графа G имеет вид

$$P_\nu(x, y) = \sum x^{\nu_G^* - \nu_H^*} y^{\nu_H},$$

где $\nu_G^* = n - k$ — ранг графа G, ν_H — коранг остовного (т.е. включающего в себя все вершины графа) подграфа H, а ν_H^* — его ранг. Суммирование ведется по всем остовным подграфам графа G. (Не путать с остовом графа! В остове нет циклов.)

Ранг-полином служит для анализа множества остовных подграфов. Так, например, коэффициент при x^{-k} в $P_\nu(x, 1/x)$ есть число подграфов размера k, а значение $P_\nu(0, 1)$ равно числу подграфов (включая несобственный подграф), ранг которых равен рангу самого графа. Другие свойства ранга-полинома приведены в [7].

Задача.

Найти ранг-полином графа (рис. 1.5).

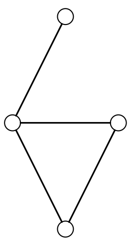
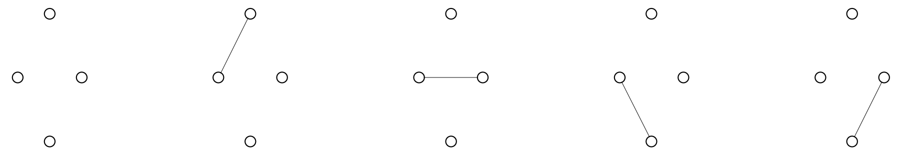


Рис. 5

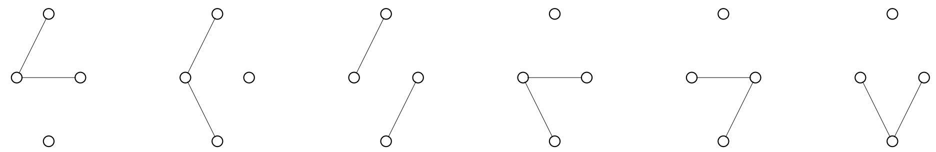
Решение. Найдем все 16 остовных подграфов графа G (рис. 1.6–1.8). Множество представим в виде четырех графов размера 1 (т.е. с одним ребром), шести графов размера 2, четырех графов размера 3 и двух несобственных графов (пустой граф и граф G). Найдем для каждого подграфа ранг (по формуле $\nu^* = 4 - k$, где k — число компонент подграфа, включая изолированные вершины) и коранг ($\nu = m - \nu^*$, где m — число ребер подграфа).

[5] Название этого полинома (rankpoly) заимствовано из Maple.



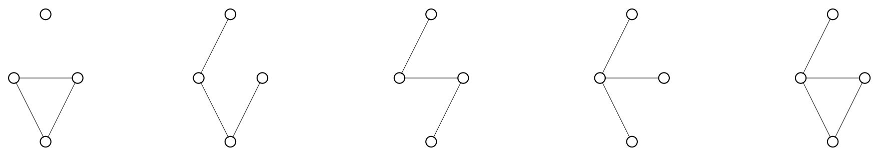
$\nu^*=0,\ \nu=0$ $\nu^*=1,\ \nu=0$ $\nu^*=1,\ \nu=0$ $\nu^*=1,\ \nu=0$ $\nu^*=1,\ \nu=0$

Рис. 6



$\nu^*=2,\ \nu=0$ $\nu^*=2,\ \nu=0$ $\nu^*=2,\ \nu=0$ $\nu^*=2,\ \nu=0$ $\nu^*=2,\ \nu=0$ $\nu^*=2,\ \nu=0$

Рис. 7



$\nu^*=2,\ \nu=1$ $\nu^*=3,\ \nu=0$ $\nu^*=3,\ \nu=0$ $\nu^*=3,\ \nu=0$ $\nu^*=3,\ \nu=1$

Рис. 8

Учитывая, что ранг ν_G^* графа равен 3, получаем сумму

$$\sum x^{\nu_G^* - \nu_H^*} y^{\nu_H} =$$
$$= x^{3-0}y^0 + 4x^{3-1}y^0 + 6x^{3-2}y^0 + 3x^{3-3}y^0 + x^{3-2}y^1 + x^{3-3}y^1 =$$
$$= x^3 + 4\,x^2 + 6\,x + 3 + x\,y + y.$$

Программа нахождения ранга-полинома графа в системе Maple приведена в [7].

3.4 Орграф

Дан орграф (рис. 9). Найти число маршрутов длины 2 из вершины №3 в №2, число маршрутов в графе длины 3 и маршрутов длины 4.

Решение

Запишем матрицу смежности графа. Элемент матрицы $m_{ij} = 1$, если есть ребро, выходящее из вершины i и входящее в вершину j.

$$M = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Матрица смежности простого орграфа несимметричная.

Для вычисления числа маршрутов длины 2 найдем $K = M^2 = MM$. Произведение матриц понимается в алгебраическом смысле. Получим

$$K = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Так как $k_{32} = 1$, то число маршрутов из вершины 3 в 2 равно 1. Очевидно, это маршрут 3-1-2 (рис. 10).

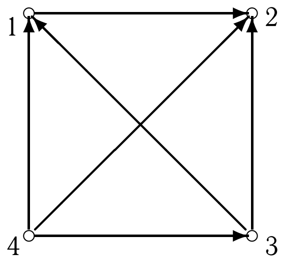


Рис. 9

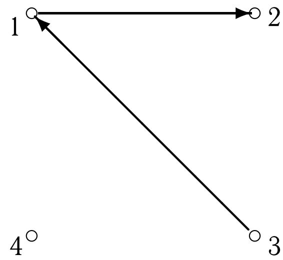


Рис. 10

Для вычисления числа маршрутов длины 3 найдем $K = M^3$. Получим

$$K = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Так как из всех элементов матрицы только $k_{42} = 1$, то маршрут длины 3 единственный. Очевидно, это маршрут 4-3-1-2.

Легко видеть, что матрица M^4 нулевая, следовательно маршрутов длины 4 в графе нет.

3.5 Неограф

Дан неограф

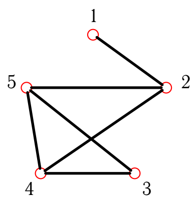


Рис. 11

Построить матрицу инцидентности, построить матрицу смежности, найти степени вершин графов, найти цикломатическое число графа, найти радиус и диаметр, проверить наличие эйлеровой цепи, вычислить количество циклических маршрутов длины 3.

Решение

1) Построим матрицу инцидентности. Ребра обозначаем по именам вершин, инцидентных данному ребру.

	1-2	2-4	2-5	3-4	3-5	4-5
1	1	0	0	0	0	0
2	1	1	1	0	0	0
3	0	0	0	1	1	0
4	0	1	0	1	0	1
5	0	0	1	0	1	1

.

Матрица инцидентности не обязательно квадратная, сумма элементов любого столбца равна 2. Для неографа без петель элементы могут быть 0 или 1.

2) Построим матрицу смежности

$$M = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Матрица смежности неографа симметричная, $m_{ij} = 1$, если вершина i и вершина j соединены ребром, в противном случае $m_{ij} = 0$.

3) Найдем степени вершин графов. Вершина №1 имеет степень 1 (ей инцидентно одно ребро), вершина №3 – 2, остальные вершины — степень 3.

4) Цикломатическое число связного[6] графа вычисляется по формуле

$$\nu = m - n + 1,$$

где m — число ребер, n — число вершин. В данном случае шесть ребер и пять вершин, следовательно, $\nu = 6 - 5 + 1 = 2$. Это число ребер надо удалить из графа, чтобы получить его остов.

5) Найдем радиус и диаметр графа.

Находя цепи наименьшей длины, вычислим расстояния между вершинами. Результаты занесем в таблицу. Для неографа таблица является симметричной матрицей. Для сокращения вычислений находим элементы половины матрицы, заполняя другую половину из условия симметрии

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Вычисляем эксцентриситет ε каждой вершины — расстояние до максимально удаленной от нее вершины. Эту величину можно определять как максимальный элемент соответствующего столбцы матрицы расстояний. Получаем

№	ε
1	3
2	2
3	3
4	2
5	2

Радиус графа r — минимальный эксцентриситет вершин. В данном случае $r = 2$. Такой эксцентриситет имеют вершины №2, №4 и №5. Эти вершины образуют центр графа. Диаметр графа d– максимальный эксцентриситет вершин. В данном случае $d = 3$. Такой эксцентриситет имеют вершины №1 и №3 — это периферия графа.

6) Ответим на вопрос, обладает ли граф эйлеровой цепью?

Мультиграф обладает эйлеровой цепью тогда и только тогда[3], когда он связен и число вершин нечетной степени равно 0 или 2.

В данном случае 4 вершины нечетной степени (1, 2, 4, 5). Граф эйлеровой цепью не обладает, т.е. нет цепи, содержащей все ребра графа по одному разу.

7) Вычислим число циклических маршрутов длины 3. Возведем матрицу смежности в 3-ю степень

$$M^3 = MMM = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 6 & 6 \\ 2 & 2 & 2 & 5 & 5 \\ 1 & 6 & 5 & 4 & 5 \\ 1 & 6 & 5 & 5 & 4 \end{bmatrix}.$$

Диагональные элементы показывают число циклических маршрутов длины 3. Например, маршруты, исходящие из вершины 5 и возвращающиеся в нее же, это маршруты 5-2-4-5, 5-4-2-5, 5-3-4-5, 5-4-3-5. Суммарное число маршрутов длины 3 равно $0 + 2 + 2 + 4 + 4 = 12$. Некоторые маршруты отличаются только начальными точками.

3.6 Минимальный остов графа

Дан взвешенный граф

[6] В общем случае $\nu = m - n + \kappa$, где κ — число связанности графа.

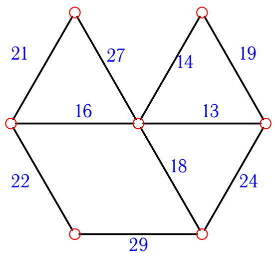


Рис. 12

Найти остов минимального веса (экстремальное дерево). Найти матрицу фундаментальных циклов графа относительно этого остова.

Решение

Построение остова минимального веса

Способ 1. Алгоритм Дж. Краскала [5], с.60.

Строим граф, присоединяя к пустому графу на множестве вершин заданного графа ребро наименьшего веса. К полученному графу последовательно присоединяем остальные ребра, выбирая на каждом шаге ребро наименьшего веса, не образующее цикл с имеющимися ребрами.

В нашем случае начинаем с ребра весом 13 – наименьшего в графе. На рисунках дана последовательность действий. Ребро весом 19 не включается в остов, так как оно образует цикл с ребрами весом 14 и 13.

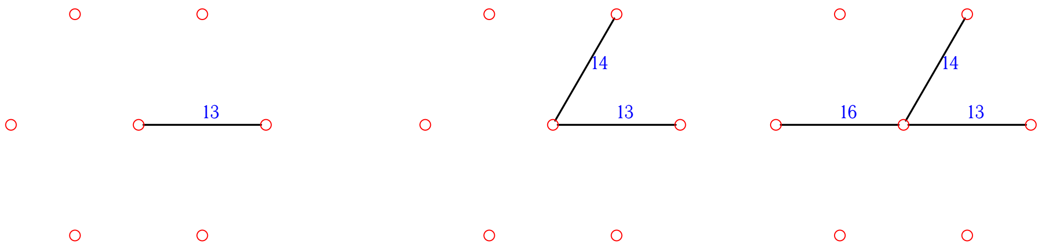


Рис. 13

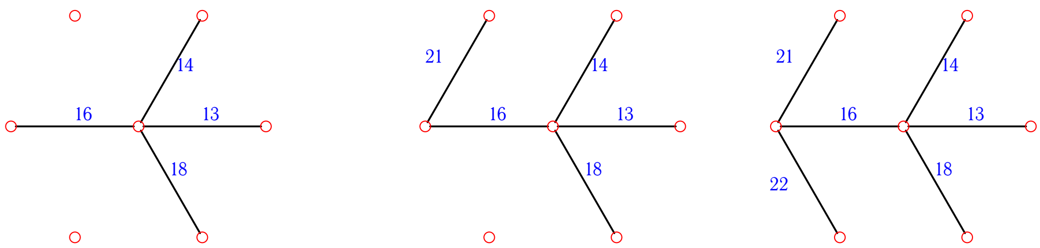


Рис. 14

Способ 2. Алгоритм ближайшего соседа[6], с.145.

Алгоритм Дж. Краскала требует на каждом шаге проверки на цикличность и предварительной сортировки ребер по весам, что затруднительно для графов с большим числом ребер. Несколько проще следующий алгоритм.

1. Отмечаем произвольную вершину графа, с какой начнется построение. Строим ребро наименьшего веса, инцидентное этой вершине.

2. Ищем ребро минимального веса инцидентное одной их двух полученных вершин. В множество поиска не входит построенное ребро.

3. Продолжаем далее, разыскивая каждый раз ребро наименьшего веса, инцидентное построенным вершинам, не включая в круг поиска все ребра, их соединяющие.

В нашем примере начнем с вершины A. На рисунках дана последовательность действий.

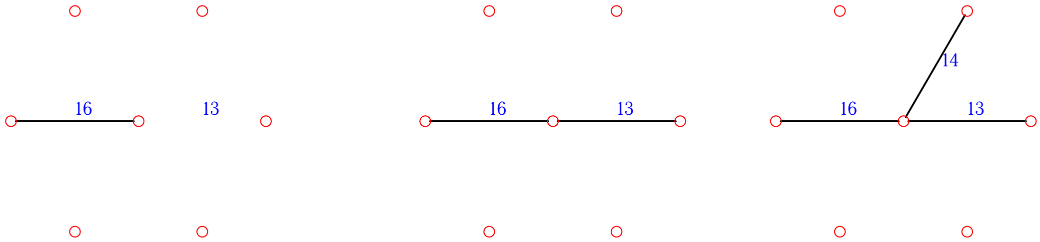


Рис. 15

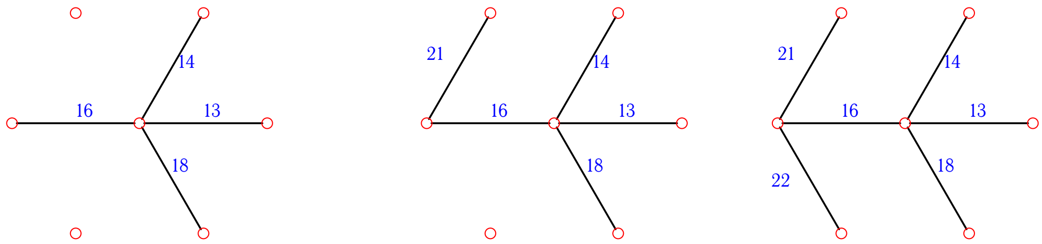


Рис. 16

3.7 Матрица фундаментальных циклов

Пронумеруем ребра графа, начиная нумерацию с хорд.

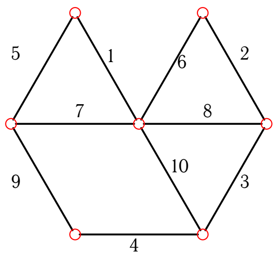


Рис. 17

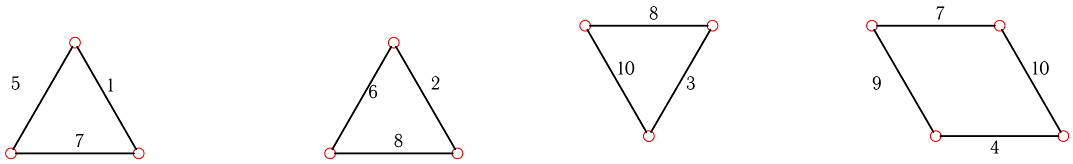


Рис. 18

Четырем хордам соответствую четыре фундаментальные цикла 1-5-7; 2-6-8; 3-8-10; 4-7-9-10. Матрица фундаментальных циклов имеет четыре строки (число циклов) и десять столбцов (число ребер).

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0
2	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0
3	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1
4	0	0	0	1	0	0	1	0	1	1

3.8 Кратчайшие пути на графе

Дан взвешенный орграф

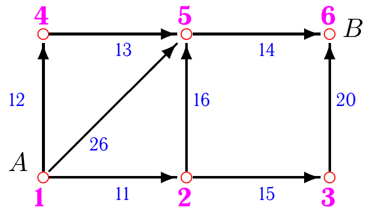


Рис. 19

Найти кратчайший путь из вершины A в B.

Решение

Применим алгоритм Е. Дейкстры [5], с.343; [4], с.128; [6], с.151.

Пошаговый алгоритм определения кратчайшего расстояния из вершины A в B состоит в следующем. С каждой вершиной связывается метка. Метка может быть постоянной или временной. Первоначально вершине A приписывается постоянная метка 0, а всем остальным ∞. На первом шаге вычисляются расстояния от вершины с постоянной меткой A до всех остальных. Если до некоторая вершина не соединена с вершиной с постоянной меткой или дуга направлена в обратную сторону, то расстояние принимается ∞. Найденные расстояния являются временными метками вершин. Минимальная из временных меток берется за постоянную. На следующем шаге временные метки всех вершин (кроме тех, у которых постоянные метки) вычисляются как сумма значения последней полученной постоянной метки и расстояния **от** нее, в том случае, если это значение не больше предыдущего значения временной метки этой вершины. Минимальная из временных меток опять берется за постоянную. Процесс продолжается до тех пор, пока вершина B не получит постоянную метку. Значение этой метки — кратчайшее расстояние от A до B.

Рассмотрим отдельные шаги решения.

1. Вершина А получает постоянную метку 0, остальные — ∞.

1	2	3	4	5	6
$\boxed{0}$	∞	∞	∞	∞	∞

2. Вычисляем расстояния от вершины 1 с постоянной меткой 0. Вершины 2, 4 и 5 меняют свои временные метки на 11, 12 и 26. Остальные имеют прежние метки ∞. Очевидно, наименьшая метка 11. Она и становится постоянной.

1	2	3	4	5	6
$\boxed{0}$			∞	∞	∞
	$\boxed{11}$	∞	12	26	∞

3. Вычисляем расстояния от вершины 2 с постоянной меткой 11. Вершины 3 и 5 имеют расстояния 15 и 16 до вершины 2, метка которой имеет значение 11. Суммируя, получаем значения 26 и 27. Для вершины 5 прежнее значение 26 было меньше нового значения 27. Следовательно значение метки 5 не меняем, оно остается равным 26. Из трех временных меток 12, 26 и 26 наименьшая принадлежит вершине 4. Эта метка становится постоянной.

1	2	3	4	5	6
$\boxed{0}$		∞		∞	∞
	$\boxed{11}$	∞	$\boxed{12}$	26	∞
		26			∞

4. Вычисляем расстояния от вершины 4 с постоянной меткой 12. Вершина 5 имеет до нее расстояние 13. Суммируя 13+12, получаем значение 25 временной метки вершины 5 вместо прежнего значения 26. Из двух временных меток вершин 3 и 5 наименьшая принадлежит вершине 5. Эта метка становится постоянной.

1	2	3	4	5	6
$\boxed{0}$		∞			∞
	$\boxed{11}$	∞	$\boxed{12}$		∞
		26			∞
		26		$\boxed{25}$	∞

5. На следующем этапе, вычисляя расстояния от вершины 5 с постоянной меткой 25, приходим к конечной вершине B. Но ее метка 25+14=39 не становится постоянной, так как она не является минимальной. От вершины 5 до вершины 3 расстояние ∞ (они не соединены). Прежнее значение временной метки вершины 3 меньше ∞. Поэтому метка вершины 3 не меняется. Метка вершины 3 со значением 26 меньше 39 становится постоянной и от нее на следующем этапе ищем расстояния.

1	2	3	4	5	6
$\boxed{0}$					∞
	$\boxed{11}$		$\boxed{12}$		∞
					∞
				$\boxed{25}$	∞
		$\boxed{26}$			39

6. От вершины 3 до вершины 6 расстояние 20, так как 26+20>39, то значение метки 6 не меняем. На этом шаге она остается прежней и единственной временной меткой. Временная метка вершины 6 становится постоянной, что означает конец процесса. Минимальное расстояние от A до B равно 39.

3.9 Компоненты сильной связности графа

Найти компоненты сильной связности графа

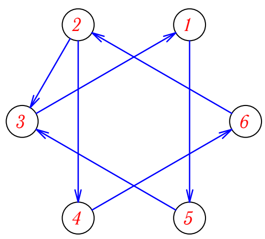


Рис. 20

Решение

Матрица смежности графа имеет вид

$$A_1 = A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

В графе 7 дуг, поэтому наибольший путь будет не длиннее 7. Построим матрицу достижимости

$$A_7 = \sum_{k=1}^{7} A^k = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 6 & 3 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Выделим из этой матрицы главные миноры максимального порядка, не содержащие нули. Если граф связен, то в матрице будут строки, не содержащие нулей. Это строки 2,4,6

$$\begin{bmatrix} . & . & . & . & . & . \\ 3 & 2 & 6 & 3 & 3 & 2 \\ . & . & . & . & . & . \\ 3 & 2 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ . & . & . & . & . & . \\ 3 & 3 & 3 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Минор со строками и столбцами с этими номерами соответствует одной компоненте связности.

$$A_{(2,4,6)} = \begin{bmatrix} . & . & . & . & . & . \\ . & 2 & . & 3 & . & 2 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & 2 & . & 2 & . & 3 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & 3 & . & 2 & . & 2 \end{bmatrix}$$

Удалим из матрицы строки и столбцы с этими номерами. Получим минор, соответствующий второй компоненте связности

$$A_{(1,3,5)} = \begin{bmatrix} 2 & . & 2 & . & 3 & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 3 & . & 2 & . & 2 & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 2 & . & 3 & . & 2 & . \\ . & . & . & . & . & . \end{bmatrix}$$

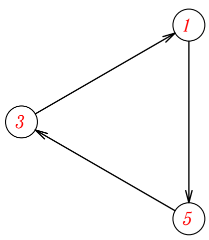


Рис. 21

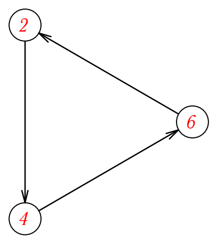


Рис. 22

Итак, в графе две компоненты сильной связности: подграф с вершинами 1,3,5 и подграф с вершинами 2,4,6.

3.10 Кодировка дерева

Записать двоичный и десятичный код дерева с корнем в вершине 3.

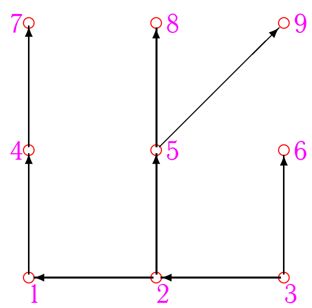


Рис. 23

Кодируя дерево, придерживаемся следующих правил

1. Кодировка начинается с корня и заканчивается в корне.
2. Каждый шаг на одну дугу от корня кодируется единицей.
3. В узле выбираем направление на вершину с меньшим номером.
4. Достигнув висячей вершины, идем назад, кодируя каждый шаг нулем.
5. При движении назад в узле выбираем всегда направление на непройденную вершину.

Итак, имеем кодировку при движении из корня 3 к вершине 7:

$$1111$$

От вершины 7 к узлу 2:

$$000$$

От узла 2 к 5 и далее к 8 (меньший номер)

$$11$$

От 8 назад к 5 и к от 5 к 9:

$$01$$

От 9 к корню 3

$$000$$

От 3 к 6 и от 6 к 3

$$10$$

В итоге:

$$1\ 111\ 000\ 110\ 100\ 010$$

Переводим полученное двоичное представление в восьмеричное (разбивая число на тройки) 1700642_8, а затем в десятичное $2 \cdot 8^0 + 4 \cdot 8^1 + 6 \cdot 8^2 + 0 \cdot 8^3 + 7 \cdot 8^4 + 1 \cdot 8^5 = 61858$.

3.11 Код Прюфера

Задача 1. Записать код Прюфера [10] для дерева

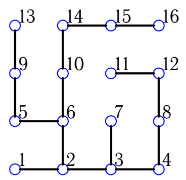
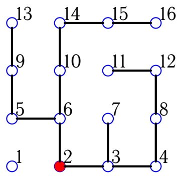


Рис. 24

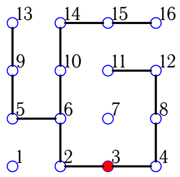
Алгоритм определения кода Прюфера.

1. Найти висячую вершину с минимальным номером i.
2. Записать в код Прюфера вершину, смежную с i.
3. Удалить вершину i из дерева. Если дерево не пустое, то перейти к п.1.

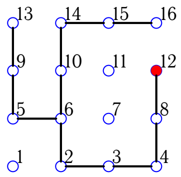
Для рассматриваемого дерева будем иметь следующую последовательность определения кода Прюфера



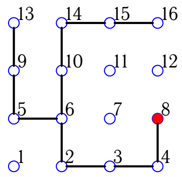
P=[2]



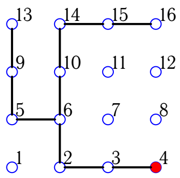
P=[2,3]



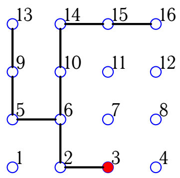
P=[2,3,12]



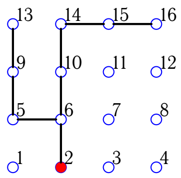
P=[2,3,12,8]



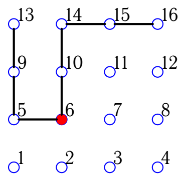
P=[2,3,12,8,4]



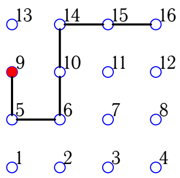
P=[2,3,12,8,4,3]



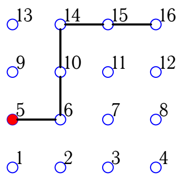
P=[2,3,12,8,4,3,2]



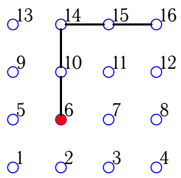
P=[2,3,12,8,4,3,2,6]



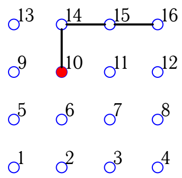
P=[2,3,12,8,4,3,2,6,9]



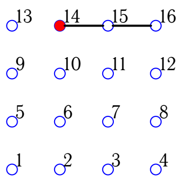
P=[2,3,12,8,4,3,2,6,9,5]



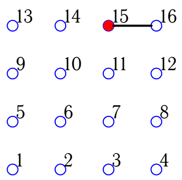
P=[2,3,12,8,4,3,2,6,9,5,6]



P=[2,3,12,8,4,3,2,6,9,5,6,10]



P=[2,3,12,8,4,3,2,6,9,5,6,10,14]



P=[2,3,12,8,4,3,2,6,9,5,6,10,14,15]

Ответ. Код Прюфера имеет вид $P = [2, 3, 12, 8, 4, 3, 2, 6, 9, 5, 6, 10, 14, 15]$.

Задача 2. Построить дерево, соответствующее коду Прюфера $P = [5, 6, 7, 8, 6, 10, 14, 15, 11, 10, 6, 7, 8, 12]$.

Решение

Алгоритм распаковки кода Прюфера P для дерева с n вершинами.
Обозначим $A = [a_1..a_n]$, $A_* = [a_2, a_3, ...a_n]$.

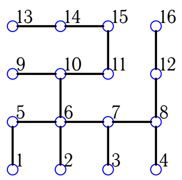
1. $A = P$, $B := [1..n]$,
2. $v = \min B$, $v \notin A$, $u = a_1$,
3. вершины u и v соединить ребром,
4. $B := B \setminus v$, $A := A_*$,
5. если $|B| = 2$, то соединить две последние вершины b_1, и b_2 и завершить процедуру, иначе — вернуться к п.2.

Для кода, данного в условии задачи, последовательно получаем

- $A = [5, 6, 7, 8, 6, 10, 14, 15, 11, 10, 6, 7, 8, 12]$,
  $B = [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16]$,
  ребро [5,1]

- $A = [6, 7, 8, 6, 10, 14, 15, 11, 10, 6, 7, 8, 12]$,
  $B = [2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16]$,
  ребро [6,2]
- $A = [7, 8, 6, 10, 14, 15, 11, 10, 6, 7, 8, 12]$,
  $B = [3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16]$,
  ребро [7,3]
- $A = [8, 6, 10, 14, 15, 11, 10, 6, 7, 8, 12]$,
  $B = [4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16]$,
  ребро [8,4]
- $A = [6, 10, 14, 15, 11, 10, 6, 7, 8, 12]$,
  $B = [5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16]$,
  ребро [6,5]
- $A = [10, 14, 15, 11, 10, 6, 7, 8, 12]$,
  $B = [6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16]$,
  Вершины 6,7,8 есть в A, поэтому вершину 10 (первая из A) соединяем с 9, получаем ребро [10,9]. Укорачиваем A и удаляем вершину 9 из B.
- $A = [14, 15, 11, 10, 6, 7, 8, 12]$,
  $B = [6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16]$, ребро [14,13]
- $A = [15, 11, 10, 6, 7, 8, 12]$,
  $B = [6, 7, 8, 10, 11, 12, 14, 15, 16]$, ребро [15,14]
- $A = [11, 10, 6, 7, 8, 12]$, $B = [6, 7, 8, 10, 11, 12, 15, 16]$, ребро [11,15]
- $A = [10, 6, 7, 8, 12]$, $B = [6, 7, 8, 10, 11, 12, 16]$,
  ребро [10,11]
- $A = [6, 7, 8, 12]$, $B = [6, 7, 8, 10, 12, 16]$, ребро [6,10]
- $A = [7, 8, 12]$, $B = [6, 7, 8, 12, 16]$, ребро [7,6]
- $A = [8, 12]$, $B = [7, 8, 12, 16]$, ребро [8,7]
- $A = [12]$, $B = [8, 12, 16]$, ребро [12,8]
- $A = []$, $B = [12, 16]$, ребро [12,16]

Таким образом, дерево имеет вид



3.12 Потоки в сетях

Задача. Задана пропускная способность дуг транспортной сети с началом в вершине 1 и концом в вершине 8. Используя алгоритм *Форда-Фалкерсона* [6], найти максимальный поток по сети.

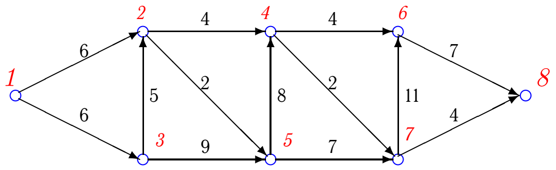
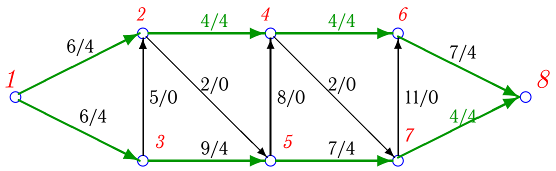


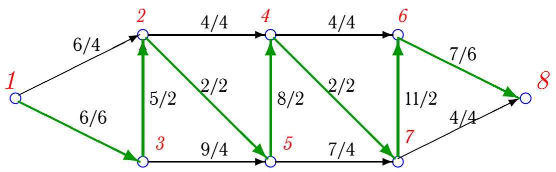
Рис. 25

1. **Насыщение потока**. Поток называется насыщенным, если любой путь из истока (1) в сток (8) содержит насыщенную дугу.

Рассмотрим путь 1-2-4-6-8. Пропустим через этот путь поток равный 4. При этом дуга 2-4 и 4-6 будут насыщенными. Аналогично, путь 1-3-5-7-8 насытим потоком 4. Распределение потока отметим на графе. В числителе ставим пропускную способность, в знаменателе — поток. Числитель всегда больше знаменателя, знаменатель может быть и нулем.

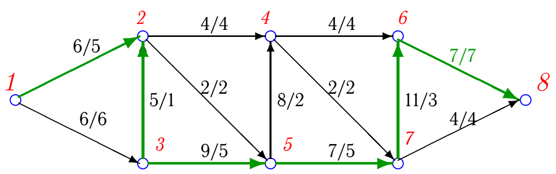


Заметим, что из 1 в 8 есть еще ненасыщенный путь 1-3-2-5-4-7-6-8, в котором можно увеличить поток на 2. При этом насытятся дуги 1-3, 2-5, 4-7.



Из 1 в 8 больше нет ненасыщенных путей. По дуге 1-3 двигаться нельзя (она уже насыщена), а движение по дуге 1-2 заканчивается в вершине 2, так как обе выходящие из нее дуги насыщены.

2. **Перераспределение потока.** Найдем последовательность вершин из 1 в 8, такую, что дуги, соединяющие соседние вершины, направленные из 1 в 8 ненасыщены, а дуги, направленные в обратном направлении не пусты. Имеем единственную последовательность 1-2-3-5-7-6-8 Перераспределяем поток. Поток в дугах прямого направления увеличиваем на 1, а поток в дугах обратного направления уменьшаем на 1. Процесс продолжаем до тех пор, пока одна из прямых дуг будет насыщена или какая-нибудь обратная дуга будет пуста.



Поток в насыщенной сети можно посчитать по потоку выходящему из истока 1, или по входящему в 8. В рассматриваемом примере поток равен 11.

3.13 Наибольшее паросочетание

Задача. В заданном двудольном (рис. 26) графе найти наибольшее паросочетание.

Решение

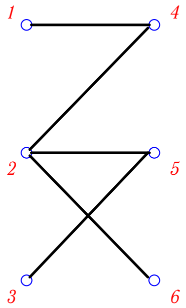


Рис. 26

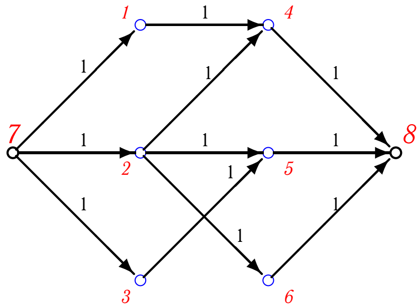


Рис. 27

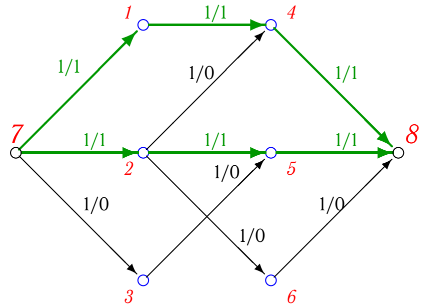


Рис. 28

Образуем из двудольного графа сеть, добавляя исток 7 и сток 8 и ориентируя ребра из истока в сток. Пропускную способность всех полученных дуг положим равной 1 (рис. 27). Максимальный поток по этой сети соответствует искомому паросочетанию графа. Заметим, что решение не единственно. Применим алгоритм Форда-Фалкерсона (с. 30). Найдем все возможные маршруты из истока в сток и насытим их. Таких маршрута два (рис. 28). Перераспределим поток. Найдем пути из истока в сток, содержащие ненасыщенные прямые дуги и не пустые обратные. В данной задаче это путь 7-3-5-2-6-8. Уменьшим поток в обратных дугах и увеличим на эту же величину поток в прямых дугах (рис. 29). В покрытие войдут ребра с потоком 1 (рис. 30).

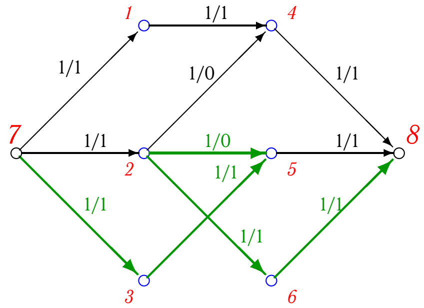


Рис. 29

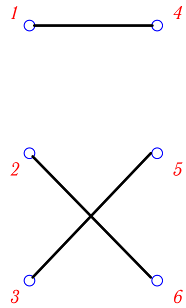


Рис. 30

Число паросочетаний в двудольном графе, имеющем одинаковое число вершин в долях, можно определить, вычислив перманент[7] его матрицы смежности. Матрица смежности двудольного графа на рис. 31 имеет вид

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Перманент этой матрицы равен 4. Четыре покрытия графа изображены на рис. 32-35.

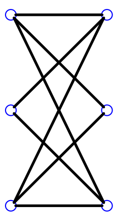


Рис. 31

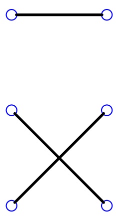


Рис. 32

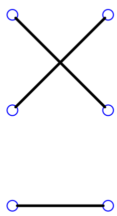


Рис. 33

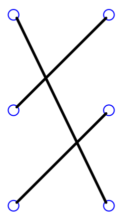


Рис. 34

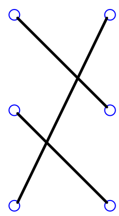


Рис. 35

3.14 Задача о назначениях

Пример 1. Стоимость производства детали i на станке j определяется коэффициентом a_{ij}. Найти одно из оптимальных распределений станков и суммарную стоимость производства

[7] Перманент [9] P квадратной матрицы $a_{ij}, i, j = 1..n$ определяется подобно определителю рекуррентным образом. При $n = 1$ $P_1 = a_{11}$. Для матрицы A_{n+1} размером $n+1$ имеем разложение по первой строке $P_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} a_{1k} P_k$, где P_k — перманент матрицы размером n, полученной из A_n вычеркиванием первой строки и k – го столбца.

$$A = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & 4 \end{vmatrix}$$

Решение

Воспользуемся алгоритмом Куна (венгерским алгоритмом).

1. Преобразуем матрицу весов. Вычтем из каждой строки минимальный элемент. В каждой строке появится по одному нулю

$$A' = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Если в каком-либо столбе не оказалось ни одного нуля, с ним надо проделать такую же процедуру как и со строками: найти минимальный элемент и вычесть его из этого столбца. В данном случае таких столбцов нет

2. По преобразованной матрице весов A' построим матрицу смежности двудольного графа S, так что $s_{i,j} = 1$ если $a_{i,j} = 0$ и $s_{i,j} = 0$ если $a_{i,j} \neq 0$. Получим

$$S = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

3. Находим наибольшее паросочетание полученного двудольного графа G. Для этого можно воспользоваться алгоритмом Форда-Фалкерсона (с. 30). Изображаем граф (рис. 36) и одно (любое) из его наибольших паросочетаний (рис. 37)

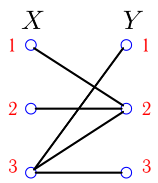


Рис. 36

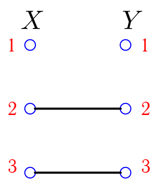


Рис. 37

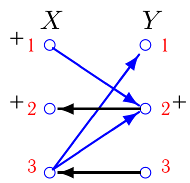


Рис. 38

Образуем множества ненасыщенных паросочетанием M вершин $X_M = \{1\}$, $Y_M = \{1\}$. Если эти множества пустые, то задача решена, найдено оптимальное решение. Из графа G составим орграф, в котором дуги, входящие в паросочетание M, направим от Y к X, а остальные дуги от X к Y (рис. 38).

Найдем вершины, достижимые из множества X_M. Эти вершины образуют два множества $X' = \{1, 2\}$ и $Y' = \{2\}$ (на рис. 38 помечены +). В соответствии с номерами X' находим минимальный элемент в строках 1,2 и столбцах $Y - Y' = \{1, 3\}$ матрицы A'. Это $a'_{2,3} = 1$. Вычитаем 1 из строк $X' = \{1, 2\}$ и добавляем 1 к столбцу $Y' = \{2\}$

$$A' = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Возвращаемся к п. 2.

2'. Находим матрицу смежности двудольного графа

$$S = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

3'. Находим наибольшее паросочетание полученного двудольного графа. Очевидно, паросочетание состоит из элементов $a_{1,2}$, $a_{2,3}$, $a_{3,1}$, с общим весом 4+2+2=8. Это и есть минимальная стоимость работы.

Пример 2.

Дано

$$A = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 9 & 5 & 5 & 7 & 7 \\ 5 & 9 & 11 & 7 & 7 & 5 \\ 5 & 10 & 12 & 8 & 6 & 6 \\ 5 & 8 & 8 & 10 & 10 & 10 \\ 5 & 13 & 9 & 11 & 9 & 11 \end{vmatrix}$$

Из первой строки вычитаем 3, из 2-6 вычитаем 5. Образуются два столбца, не содержащие нулей. Из второго столбца вычитаем 2, из пятого — 3. Преобразованная матрица весов имеет вид

$$A' = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 6 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 7 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 5 & 4 & 5 \\ 0 & 6 & 4 & 6 & 3 & 6 \end{vmatrix}$$

Матрица двудольного графа получается заменой нулей на 1, а ненулевых элементов нулями:

$$S = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Строим матрицу максимального паросочетания. Для этого просматриваем строки, в которых расположена только одна единица. В данном случае это две последние строки. Переносим одну из них (например, последнюю) в матрицу максимального паросочетания. Отмечаем занятый столбец и продолжаем далее, исключая этот столбец из рассмотрения. Получаем один из вариантов искомой матрицы

$$W = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Множество вершин S, ненасыщенных паросочетанием W: $X_m = \{5\}, \quad Y_m = \{4\}$. Множество вершин, достижимых из X_m: $X' = \{5, 6\}, \quad Y' = \{1\}$. Из строк 5 и 6 вычитаем 1, а к столбцу 1 добавляем 1

$$A' = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 7 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 3 & 5 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

Матрица двудольного графа и матрица его максимального паросочетания

$$S = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad W = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Множество вершин S, ненасыщенных паросочетанием W

$$X_m = \{6\}, \quad Y_m = \{4\}$$

Множество вершин, достижимых из X_m

$$X' = \{1, 5, 6\}, \quad Y' = \{1, 2\}$$

Из строк 1, 5 и 6 вычитаем 1, а к столбцам 1 и 2 добавляем 1

$$A' = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 6 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 7 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 2 & 4 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

Матрица двудольного графа и матрица его максимального паросочетания

$$S = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad W = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Множество вершин S, ненасыщенных паросочетанием W $X_m = \{6\}, \quad Y_m = \{4\}$. Множество вершин, достижимых из X_m: $X' = \{1, 5, 6\}, \quad Y' = \{1, 2\}$. Из строк 1, 5 и 6 вычитаем 1, а к столбцу 1 и 2 добавляем 1

$$A' = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 6 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 7 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 1 & 3 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

Матрица двудольного графа и матрица его максимального паросочетания

$$S = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad W = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Все вершины S, насыщены паросочетанием W. Сумма соответствующих весов

$$A = \begin{vmatrix} . & 5 & . & . & . & . \\ . & . & . & 5 & . & . \\ . & . & . & . & . & 5 \\ . & . & . & . & 6 & . \\ . & . & 8 & . & . & . \\ 5 & . & . & . & . & . \end{vmatrix}$$

равна 5+5+5+6+8+5=34. Это и есть оптимальное (минимальное) паросочетание. Отметим, что паросочетание не единственно. Имеется еще несколько паросочетаний такого же веса, например,

$$A = \begin{vmatrix} . & . & . & 5 & . & . \\ . & . & 5 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & 5 \\ . & . & . & . & 6 & . \\ . & 8 & . & . & . & . \\ 5 & . & . & . & . & . \end{vmatrix}$$

3.15 Паросочетания в двудольном графе

Разберем на примере алгоритм решения задачи о паросочетаниях в двудольном графе. Найдем наибольшее паросочетание в графе (рис. 5.39).

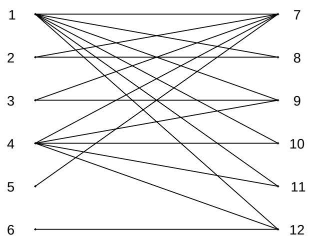


Рис. 39

Матрица смежности графа имеет вид

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Выделим отдельные шаги алгоритма.

1. Составим таблицу с размерами матрицы смежности. Пометим недопустимые для паросочетания элементы, проставив какой-либо символ, например звездочку, в тех местах, где стоят нули матрицы. Получим

$$B_1 = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline & & & & & \\ \hline & & * & * & * & * \\ \hline & * & & * & * & * \\ \hline & * & & & & \\ \hline & * & * & * & * & * \\ \hline * & * & * & * & * & \\ \hline \end{array}.$$

2. Двигаясь по матрице B в каком-либо порядке, например слева направо, сверху вниз, проставим на допустимые поля единицы, не допуская более одной единицы в строке и столбце. Так мы получим первый вариант паросочетания. Это будет максимальное (но не обязательно наибольшее) паросочетание:

$$B_2 = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & & & & & \\ \hline & 1 & * & * & * & * \\ \hline & * & 1 & * & * & * \\ \hline & * & & 1 & & \\ \hline & * & * & * & * & * \\ \hline * & * & * & * & * & 1 \\ \hline \end{array}.$$

3. Если во всех строках появились единицы, то задача решена, найдено наибольшее паросочетание. В нашем примере в пятой строке нет единицы. Пометим такие строки в специальном столбце, например справа от матрицы:

$$B_3 = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & & & & & \\ \hline & 1 & * & * & * & * \\ \hline & * & 1 & * & * & * \\ \hline & * & & 1 & & \\ \hline & * & * & * & * & * \\ \hline * & * & * & * & * & 1 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \\ \hline \\ \hline \\ \hline * \\ \hline \\ \hline \end{array}.$$

4. В помеченной строке (или строках) найдем незапрещенные места в непомеченных столбцах. В специальной строке (ниже матрицы) поместим в этих столбцах номера помеченной строки. Здесь это 5-я строка, а незапрещенное место находится в первом столбце. Поэтому ставим номер 5 в первый столбец в специальную строку. Первый столбец считается помеченным. Получаем

$$B_4 = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}\hline 1 & & & & & \\ \hline & 1 & * & * & * & * \\ \hline & * & 1 & * & * & * \\ \hline & * & & 1 & & \\ \hline & * & * & * & * & * \\ \hline * & * & * & * & * & 1 \\ \hline \multicolumn{1}{c}{5} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{} \end{array} \quad \begin{array}{|c|}\hline \\ \hline \\ \hline \\ \hline \\ \hline * \\ \hline \\ \hline \multicolumn{1}{c}{} \end{array} .$$

5. Ищем единицы в помеченных столбцах. Помечаем (справа) строки, в которых найдены единицы:

$$B_5 = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}\hline 1 & & & & & \\ \hline & 1 & * & * & * & * \\ \hline & * & 1 & * & * & * \\ \hline & * & & 1 & & \\ \hline & * & * & * & * & * \\ \hline * & * & * & * & * & 1 \\ \hline \multicolumn{1}{c}{5} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{} \end{array} \quad \begin{array}{|c|}\hline * \\ \hline \\ \hline \\ \hline \\ \hline * \\ \hline \\ \hline \multicolumn{1}{c}{} \end{array} .$$

Первая строка оказалась помеченной. Далее возвращаемся к шагу 4.

4′. В первой (помеченной) строке есть пять незапрещенных (без звездочки) мест в непомеченных столбцах. Проставляем ее номер (т.е. 1) в специальной строке:

$$B_6 = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}\hline 1 & & & & & \\ \hline & 1 & * & * & * & * \\ \hline & * & 1 & * & * & * \\ \hline & * & & 1 & & \\ \hline & * & * & * & * & * \\ \hline * & * & * & * & * & 1 \\ \hline \multicolumn{1}{c}{5} & \multicolumn{1}{c}{1} & \multicolumn{1}{c}{1} & \multicolumn{1}{c}{1} & \multicolumn{1}{c}{1} & \multicolumn{1}{c}{1} \end{array} \quad \begin{array}{|c|}\hline * \\ \hline \\ \hline \\ \hline \\ \hline * \\ \hline \\ \hline \multicolumn{1}{c}{} \end{array} .$$

Далее надо перейти к шагу 5 и искать единицы в помеченных столбцах, помечать строки, в которых найдены единицы, переходить к шагу 4 и т.д. Здесь мы приходим к ситуации, когда в пятом помеченном столбце нет единиц. Это сигнал к следующему этапу решения задачи.

6. Проставляем единицу в найденный столбец в первую строку. При этом обнаруживаем, что в этой строке уже есть единица — в первом столбце. Ее надо куда-то переставить. Указателем для перестановки служит специальная строка внизу. Она дает адрес: 5-я строка этого же столбца. Получаем

$$B_7 = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}\hline & & & & 1 & \\ \hline & 1 & * & * & * & * \\ \hline & * & 1 & * & * & * \\ \hline & * & & 1 & & \\ \hline 1 & * & * & * & * & * \\ \hline * & * & * & * & * & 1 \\ \hline \multicolumn{1}{c}{5} & \multicolumn{1}{c}{1} & \multicolumn{1}{c}{1} & \multicolumn{1}{c}{1} & \multicolumn{1}{c}{1} & \multicolumn{1}{c}{1} \end{array} \quad \begin{array}{|c|}\hline * \\ \hline \\ \hline \\ \hline \\ \hline * \\ \hline \\ \hline \multicolumn{1}{c}{} \end{array} .$$

Если эта строка тоже занята, то единицу, которая стояла в строке раньше (в другом столбце), двигаем по ее столбцу туда, куда указывает номер в специальной строке внизу. Однако в нашем случае этого нет. Более того, убеждаемся, что мы нашли решение — совершенное (покрывающее все вершины) покрытие. Строим граф, являющийся ответом на поставленную задачу (рис. 5.40).

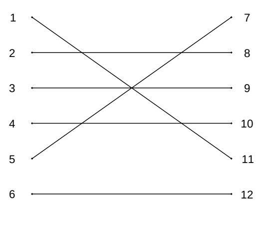


Рис. 40

Вычисляя перманент матрицы A, обнаруживаем, что найденное совершенное паросочетание — лишь одно из двух возможных. Очевидно, если на шаге 6 ставить единицу не в первую, а в другую, также свободную, строку 4, то последовательно получим

$$
\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}\hline
1 & & & & & \\ \hline
 & 1 & * & * & * & * \\ \hline
 & * & 1 & * & * & * \\ \hline
 & * & & 1 & 1 & \\ \hline
 & * & * & * & * & * \\ \hline
* & * & * & * & * & 1 \\ \hline
\end{array}\,,
\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}\hline
1 & & & 1 & & \\ \hline
 & 1 & * & * & * & * \\ \hline
 & * & 1 & * & * & * \\ \hline
 & * & & & 1 & \\ \hline
 & * & * & * & * & * \\ \hline
* & * & * & * & * & 1 \\ \hline
\end{array}\,,
\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}\hline
 & & & 1 & & \\ \hline
 & 1 & * & * & * & * \\ \hline
 & * & 1 & * & * & * \\ \hline
 & * & & & 1 & \\ \hline
1 & * & * & * & * & * \\ \hline
* & * & * & * & * & 1 \\ \hline
\end{array}\,.
$$

Сначала передвигаем единицу из четвертого столбца туда, куда указывает специальная строка (здесь она не изображена), т.е. в первую строку. Единицу, стоявшую в первой строке и первом столбце, двигаем опять вниз, на пятую строку. Вновь получаем совершенное паросочетание графа.

Граф может и не иметь совершенного паросочетания.

Список литературы

[1] Показеев В.В., Матяш В.И., Черкесова Г.В., Кирсанов М.Н. Элементы дискретной математики. Курс лекций. – М.: МГТУ "МАМИ", 2004. – 271 с.

[2] Москинова Г.И. Дискретная математика. Математика для менеджера. – М.: Логос, 2000. – 240 с.

[3] Берж К. Теория графов и ее применения. –М.: Изд.иностранной литературы, 1962. – 319 с.

[4] Судоплатов С.В., Овчинникова Е.В. Элементы дискретной математики: Учебник. – М.:ИНФРА-М, Новосибирск:Изд-во НГТУ, 2002. –280с.

[5] Емеличев В.А., Мельников О.И., Сарванов В.И., Тышкевич Р.И. Лекции по теории графов.– М.:Наука, 1990.– 384 с.

[6] Иванов Б.Н. Дискретная математика. Алгоритмы и программы.– М.:Лаборатория базовых знаний,2002.– 288 с.

[7] *Кирсанов М.Н.* Графы в Maple. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007.

[8] Асанов М.О., Баранский В.А.,Расин В.В. Дискретная математика: графы, матроиды алгоритмы.-Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2001–288с.

[9] Оре О. Теория графов.– М.:Наука, 1980.– 336 с.

[10] Касьянов В.Н., Евстигнеев В.А. Графы в программировании: обработка, визуазализация и применение. СПб.: БХВ-Петербург, 2003. – 1104с.

[11] Хаггарти Р. Дискретная математика для программистов. М.: Техносфера, 2003. – 320 с.

[12] Харари Ф. Теория графов. М.: Едиториал УРСС, 2003 — 296 с.

[13] Горбатов В.А., Горбатов А.В., Горбатова М.В. Дискретная математика. – М.: АСТ, 2003. – 447 с.

Предметный указатель